



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΛΟΠΟΝΝΗΣΟΥ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ
ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ
Π.Μ.Σ. «ΠΡΟΗΓΜΕΝΑ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΚΑ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΔΙΚΤΥΑ»**

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**«ΜΕΛΕΤΗ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ ΣΕ ΑΣΥΡΜΑΤΑ
ΔΙΚΤΥΑ POISSON»**

ΠΑΝΩΡΑΙΑ ΝΙΚΟΛΑΚΑΚΟΥ

**ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΑΝΔΡΕΑΣ ΜΑΡΑΣ**

ΤΡΙΠΟΛΗ, ΙΟΥΝΙΟΣ 2011

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Δεδομένου ότι η παρεμβολή είναι ο κυριότερος περιοριστικός παράγοντας ως προς την απόδοση των ασύρματων και αδόμητων δικτύων, είναι κατ' εξοχήν σημαντικό να περιγραφούν τα στατιστικά μοντέλα της, ώστε να καταστεί δυνατή η ανάλυσή της και οι επιπτώσεις, μέσω της πρώτης, που επιφέρει στις διάφορες μετρικές επίδοσης. Δύο καθοριστικά συστατικά της παρεμβολής είναι η γεωμετρία των δικτύων (η χωρική κατανομή κόμβων που μεταδίδουν ταυτόχρονα) και η στατιστική κατανομή των απωλειών διαδρομής (η μείωση της ισχύος ή του πλάτους σημάτων σε σχέση με την απόσταση). Για ορισμένες κατηγορίες κατανομών κόμβων, ειδικότερα για την κατανομή που αναφέρεται ως η σημειακή διαδικασία Poisson και για τους στατιστικούς νόμους εξασθένισης, είναι διαθέσιμα κλειστής μορφής αποτελέσματα για την ίδια την παρεμβολή καθώς επίσης και για το λόγο σήματος προς παρεμβολή (SIR), τα οποία αποτελέσματα από κοινού καθορίζουν την απόδοση των διαφόρων τύπων και ομάδων ασύρματων δικτύων.

Σκοπός της παρούσας μεταπτυχιακής διπλωματικής εργασίας είναι να παρουσιάσει μια επισκόπηση των προαναφερθέντων αποτελεσμάτων και να δώσει μια περιγραφή για τις τεχνικές που χρησιμοποιούνται για την ανάλυση της επίδοσης μέσω αυτών. Σημειώνεται ότι τα αναλυτικά μοντέλα κατανομής κόμβων που χρησιμοποιούνται είναι τα δικτυωτά πλέγματα και οι ομοιογενείς καθώς επίσης και οι συμπλεγματικές (clustered) διαδικασίες Poisson. Τα γενικότερα συμπεράσματα από τα αποτελέσματα της ανάλυσης, που γίνεται για τα προαναφερθέντα στατιστικά μοντέλα στα Κεφάλαια 2, 3 και 4, αντίστοιχα, συνοψίζονται στο τελευταίο κεφάλαιο, Κεφάλαιο 5, της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Περιεχόμενα

ΛΙΣΤΑ ΣΧΗΜΑΤΩΝ.....	5
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ.....	8
1.1 Εισαγωγή	8
1.2 Περιγραφή της παρεμβολής	10
1.3 Λόγος σήματος προς θόρυβο και παρεμβολή - Πιθανότητα διακοπής μετάδοσης.....	11
1.3.1 Ορισμοί.....	11
1.3.2 Πιθανότητα διακοπής μετάδοσης για την περίπτωση εξασθένησης κατά Rayleigh.....	12
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ ΣΤΑ ΔΟΜΗΜΕΝΑ ΔΙΚΤΥΑ.....	13
2.1 Δομημένα δίκτυα	13
2.2 Μονοδιάστατα δικτυωτά πλέγματα	14
2.2.1 Μετασχηματισμός Laplace	14
2.2.2 Πυκνότητες πιθανότητας	16
2.3 Δισδιάστατα δικτυωτά πλέγματα.....	19
2.3.1 Τετραγωνικό δικτυωτό πλέγμα.....	19
2.3.2 Τριγωνικά δικτυωτά πλέγματα	22
2.4 Διακοπή λειτουργίας.....	23
2.4.1 ALOHA στα μονοδιάστατα δίκτυα γραμμών	23
2.4.2 TDMA στα μονοδιάστατα δίκτυα γραμμών	24
2.4.3 Αμφίπλευρα δίκτυα γραμμών	25
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ ΣΤΑ ΔΙΚΤΥΑ POISSON.....	26
3.1 Θόρυβος βολής.....	26
3.2 Κατανομή παρεμβολής	27
3.2.1 Μέση τιμή παρεμβολής.....	28
3.2.2 Κατανομή παρεμβολής χωρίς εξασθένηση	29
3.2.3 Κατανομή παρεμβολής με την εξασθένηση	32
3.3 Η SIR κατανομή και η Διακοπή λειτουργίας	38
3.4 Ακραία συμπεριφορά.....	39
3.5 Έλεγχος ισχύος	40
3.5.1 Αντιστροφή καναλιών χωρίς εξασθένηση.....	41
3.5.2 Έλεγχος δύναμης και εξασθένησης	42
3.5.3 Επιπτώσεις στην πιθανότητα διακοπής λειτουργίας	45
3.6 Επικοινωνίες διασκορπισμένου φάσματος	46
3.7 CSMA και ακύρωση παρεμβολής	47
3.7.1 CSMA	47
3.7.2 Ακύρωση παρεμβολής	49
3.8 Συσχέτιση παρεμβολής.....	51
3.8.1 Χωροχρονική συσχέτιση της παρεμβολής	52
3.8.2 Χρονικός συσχετισμός των διακοπών λειτουργίας συνδέσεων.....	58

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ ΣΤΑ ΣΥΜΠΛΕΓΜΑΤΙΚΑ ΔΙΚΤΥΑ (ή ΔΙΚΤΥΑ ΣΥΣΤΑΔΩΝ) POISSON.....	62
4.1 Στατιστική περιγραφή της παρεμβολής.....	65
4.2 Ανάλυση διακοπής λειτουργίας.....	71
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΣΗΜΑΝΤΙΚΟΤΕΡΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	74
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΑΚΡΩΝΥΜΑ	77
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ.....	78

ΛΙΣΤΑ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Σχήμα 2.1: Οι διακεκομμένες καμπύλες παρουσιάζουν την πυκνότητα πιθανότητας $f_{In}(x)$ από την (2.11) για $a=2$ και $n=2$ (πρώτη καμπύλη από την αριστερή πλευρά), $n=5$, και $n=12$, και η συμπαγής καμπύλη παρουσιάζει την οριακή πυκνότητα $f_I(x)$ από την (2.12).

Σχήμα 2.2: Οι διακεκομμένες καμπύλες παρουσιάζουν την πυκνότητα πιθανότητας $f_{In}(x)$ από την (2.11) για $a=4$ και $n=1, 2, 3$, και η συμπαγής καμπύλη παρουσιάζει την οριακή πυκνότητα $f_I(x)$ από την (2.15).

Σχήμα 2.3: Η συμπαγής καμπύλη είναι η παρεμβολή ως συνάρτηση του εκθετικού συντελεστή απωλειών διαδρομής a . Οι διακεκομμένες καμπύλες είναι τα όρια της (2.16), και η διακεκομμένη καμπύλη είναι η προσέγγιση της (2.18), η οποία είναι πολύ ακριβής για $a > 3$.

Σχήμα 2.4: Τριγωνικό δικτυωτό πλέγμα με τρεις εξάγωνους δακτυλίους κόμβων. Υποθέτουμε μοναδιαίες πλησιέστερες αποστάσεις, όπου οι δύο κύκλοι δείχνουν ότι οι κόμβοι στο δεύτερο δακτύλιο είναι σε απόσταση τουλάχιστον $\sqrt{3}$ και το πολύ 2. Γενικότερα, η απόσταση μεταξύ των κόμβων στον k -οστό δακτύλιο είναι φραγμένη από κάτω με $\sqrt{3}k/2$ και από πάνω με k . Ο δακτύλιος k περιέχει $6k$ κόμβους.

Σχήμα 2.5: Διάταξη κόμβων δικτύων γραμμών για τους οποίους οι πιθανότητες επιτυχίας στην διπλής όψης περίπτωση είναι τα τετράγωνα των πιθανοτήτων επιτυχίας στη μονής όψης περίπτωση. Ο δέκτης τοποθετείται στο σημείο εκκίνησης, και ο επιθυμητός πομπός βρίσκεται σε απόσταση μιας ακεραίας μονάδας μέτρησης. Οι σκιασμένοι κόμβοι είναι αυτοί που μεταδίδουν μέσα από άρτιες χρονοθυρίδες ενός δυφασικού καναλιού TDMA.

Σχήμα 3.1: Μετασχηματισμός Laplace $L_{In}(s)$ για τη μονοδιάστατη (αριστερά) και διδιάστατη (δεξιά) περίπτωση με $n=1, 2, 5, 100$. (Η καμπύλη για $n=1$ είναι η πρώτη από πάνω καμπύλη.)

Σχήμα 3.2: Η περίπτωση όπου ο έλεγχος δύναμης χρησιμοποιείται για να αντισταθμίσει μεγάλης κλίμακας απώλειες και εξασθενίσεις διαδρομής. Η παρεμβολή μετριέται στη θέση του αστερίσκου. Ο πομπός T μεταδίδει με ισχύ $P_t = R_1^a / h_1$ για να αντισταθμίσει τις απώλειες και την εξασθένιση του σήματος που λαμβάνεται στο δέκτη R. Το κανάλι από T μέχρι και τη θέση του αστερίσκου υπόκειται σε εξασθένιση με συντελεστή h_2 , και έτσι η λαμβανόμενη ισχύς είναι $R_1^a h_2 / h_1$.

Σχήμα 3.3: Η δ τάξης ροπή της λαμβανόμενης ισχύος P για τέσσερις περιπτώσεις του ελέγχου από τις εξισώσεις (3.32), (3.33), (3.37), (3.40), αντίστοιχα. Οι καμπύλες είναι ομαλοποιημένες ώστε $\lambda_{cd} = 1$.

Σχήμα 3.4: Οι πιθανότητες επιτυχίας $p_s(\theta) = L_I(\theta)$ από την (3.46) για ALOHA (διακεκομμένη καμπύλη) και CSMA με ακτίνες ζώνης προφύλαξης $\rho = 1/2, 1, 2$ για ένα δισδιάστατο δίκτυο με $\alpha = 4$ ($\delta = 1/2$) και $\lambda = 1/20$. Η καμπύλη με την μεγαλύτερη πιθανότητα επιτυχίας είναι αυτή όπου $\rho = 2$.

Σχήμα 3.5: Αριστερό Σχήμα: Πιθανότητες επιτυχίας $p_s(\theta)$ από την (3.19) χωρίς SIC (διακεκομμένη καμπύλη) και με SIC των κοντινότερων 1, 2, και 3 παρεμβολέων με ακύρωση μέσα ένα δισδιάστατο δίκτυο με $\alpha = 4$ ($\delta = 1/2$) και $\lambda = 1/10$. Η καμπύλη με την υψηλότερη πιθανότητα επιτυχίας είναι αυτή όπου οι 3 κοντινότεροι παρεμβολείς ακυρώνονται. Δεξιό Σχήμα: Για λόγους σύγκρισης, οι πιθανότητες επιτυχίας για CSMA με αντίληψη των ακτίνων ρ που επιλέγονται, έτσι ώστε ο μέσος όρος των παρεμβολέων εντός της ακτίνας να είναι 1, 2, και 3. Συνεπώς, κατά μέσον όρο, το CSMA απαλείφει 1, 2, ή και 3 παρεμβολείς.

Σχήμα 3.6: Για οποιαδήποτε δύο u και v σημεία, επιλέγουμε $a < \|u - v\|/2$. Κατόπιν οι θέσεις των κόμβων στο $b(u, a)$ και στο $b(v, a)$ είναι ανεξάρτητες. Δεδομένου ότι η παρεμβολή εξουσιάζεται από τον κοντινότερο παρεμβολέα όταν οι απώλειες διαδρομής είναι παθογενείς, οι I_u^a και I_v^a είναι ανεξάρτητες, δίνοντας έτσι μηδενική συσχέτιση.

Σχήμα 3.7: Κανονικοποιημένη χωρική συσχέτιση $\zeta(u, v) / \rho$ έναντι του όρου $\|u - v\|$, όταν το πρότυπο απωλειών διαδρομής δίνεται από την $\ell_\varepsilon(x)$, $\lambda=1$ και $\alpha = 4$. Παρατηρούμε ότι η $\zeta_s(u, v) \rightarrow 0$, $u \neq v$, όταν $\varepsilon \rightarrow 0$ (από [14] © 2009 IEEE).

Σχήμα 3.8: Οι πιθανότητες $P(A_k|A_l)$ και $P(A_l)$ εναντίον της παραμέτρου ρ του ALOHA και όπου $\lambda = 1$, $\ell(x) = \|x\|^{-4}$, $z=0,5$, και $\theta = 1$ (από [14] © 2009 IEEE).

Σχήμα 3.9: Οι πιθανότητες $P(A_k|A_l)$ και $P(A_l)$ εναντίον της απόστασης z με $\lambda = 1$, $\ell(x) = \|x\|^{-4}$, $p=0,5$, και $\theta = 1$.

Σχήμα 3.10: Οι πιθανότητες $P(A_k|A_l) / P(A_l)$ και $P(A_k^c|A_l^c) / P(A_l^c)$ έναντι της παραμέτρου του ALOHA ρ . Με $\lambda = 1$, $\ell(x) = \|x\|^{-4}$, $z=0,5$, και $\theta = 1$.

Σχήμα 4.1: (Αριστερό Σχήμα) Διαδικασία συστάδων Thomas με παραμέτρους $\lambda_p = 1$, $\bar{c} = 5$ και $\sigma = 0,2$. Οι σταυροί δείχνουν τα γονικά σημεία (parent points).

(Δεξιό Σχήμα) Η αντίστοιχη διαδικασία PPP με την ίδια ένταση $\lambda = 5$ (από [13] © 2009 IEEE).

Σχήμα 4.2: Απεικόνιση του μοντέλου διαδικασίας συστάδας Matern. Τα μικρά μαύρα σημεία αντιπροσωπεύουν τους πομπούς, οι οποίοι διαμορφώνουν μια διαδικασία Φ συστάδων Matern. Υποτίθεται ότι υπάρχει ένας κόμβος που ανήκει στη Φ και βρίσκεται στο σημείο εκκίνησης, και αναπαριστά τον ενεργό πομπό. Ο αντίστοιχος δέκτης (που έχει σχήμα τετράγωνου) είναι σε απόσταση R και δεν ανήκει στη Φ . Η ύπαρξης ενός πομπού στο σημείο εκκίνησης δημιουργεί μία συστάδα γύρω από αυτό (ο έντονος κύκλος στο σχήμα).

Σχήμα 4.3: Σύγκριση της συνάρτησης κατανομής (CCDF) για μια διαδικασία συστάδων Thomas για διαφορετικά πρότυπα απωλειών διαδρομής και διαφορετικές στατιστικές εξασθένισης. Οι κοινές παράμετροι είναι $\lambda_p = 2$, $\bar{c} = 3$, $\sigma = 0,25$, $\alpha = 4$, και $\|z\| = 0,3$. Οι καμπύλες λήφθηκαν μέσω προσομοίωσης Monte-Carlo (από [13] © 2009 IEEE).

Σχήμα 4.4: Γράφημα της $G(R)$ έναντι της R , με $\alpha = 4$, $\sigma = 0,25$. Παρατηρούμε ότι οι καμπύλες κέρδους #2 και # 3, οι οποίες αντιστοιχούν στην ιδιόμορφη περίπτωση, εκκινούν από τη μονάδα, κλίνουν προς τα κάτω και μετά προς τα επάνω όπου στη δεύτερη περίπτωση οι τιμές του κέρδους συστάδας είναι μεγαλύτερες της μονάδας. Το σημείο διασταύρωσης είναι περίπου ίσο με $1/(2 \sqrt{\lambda_p})$, το οποίο είναι ο μέσος όρος της απόστασης πλησιέστερου γείτονα της γονικής διαδικασίας. Οι καμπύλες #1 και #4 αντιστοιχούν σε φραγμένο πρότυπο απωλειών διαδρομής όπου το σημείο διασταύρωσης R^* μπορεί να είναι αόριστο (από [13] © 2009 IEEE).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ

1.1 Εισαγωγή

Λόγω στενότητας, δηλαδή συμφόρησης του ασύρματου φάσματος, δεν είναι δυνατό σε μεγάλα ασύρματα δίκτυα να έχουμε ξεχωριστές ταυτόχρονες μεταδόσεις μέσα από την ίδια συχνότητα. Μερικές μεταδόσεις θα εμφανιστούν απαραίτητως συγχρόνως στην ίδια ζώνη συχνότητας, που διαχωρίζονται όμως στο χώρο, και τα σήματα από πολλές ανεπιθύμητες παρεμβολές ή πομπούς παρεμβολής προστίθενται με το επιθυμητό σήμα του πομπού σε έναν δέκτη. Αυτή η παρεμβολή μπορεί να είναι μετριασμένη αρκετά αποτελεσματικά στα συστήματα με κεντρικό έλεγχο, όπου ένας σταθμός βάσεων ή ένα σημείο πρόσβασης μπορεί να συντονίσει τη διαυλοποίηση και τα επίπεδα ισχύος των μεμονωμένων τερματικών, ή όπου οι τεχνικές ανίχνευσης πολλαπλών χρηστών ή η ακύρωση παρεμβολής μπορούν να εφαρμοστούν.

Εντούτοις, πολλές πρόσφατες κατηγορίες ασύρματων συστημάτων, όπως τα ad hoc, τα δίκτυα αισθητήρων, τα δίκτυα πλέγματος, τα γνωσιακά (cognitive) δίκτυα και τα κυψελοειδή δίκτυα με τις επεκτάσεις κάλυψης multihop (κατανομή ενός μηνύματος διαμέσου κόμβων έως ότου φτάσει στον τελικό προορισμό), δεν επιτρέπουν το ίδιο επίπεδο κεντρικού ελέγχου αλλά απαιτούν κατανεμημένη κατανομή πόρων. Παραδείγματος χάριν, τα πρωτόκολλα πρόσβασης καναλιών είναι βασισμένα στην αίσθηση μεταφορέα (carrier sensing) και ο έλεγχος ισχύος εκτελείται με βάση τη σύγκριση απαίτησης ανά ζευγάρια τερματικών και όχι με βάση τη σύγκριση απαίτησης τερματικών επί ολόκληρου του δικτύου (network wide basis). Σε αυτά τα δίκτυα, η παρεμβολή δεν είναι εύκολα ελέγξιμη και οι κανόνες ανάλυσής της είναι πολλές φορές ιδιαίτερα πολύπλοκοι. Συνεπώς, η παρεμβολή είναι ο κύριος περιοριστικός παράγοντας επίδοσης για τα περισσότερα σύγχρονα ασύρματα δίκτυα, και ο στατιστικός χαρακτηρισμός της ισχύος της γίνεται επιτακτικός.

Σε αυτή τη διπλωματική εργασία παράγουμε τα αποτελέσματα για τις στατιστικές παρεμβολής μέσα σε μεγάλα ασύρματα δίκτυα που υπόκεινται σε μία ή περισσότερες πηγές τυχαιότητας, συμπεριλαμβανομένης της κατανομής κόμβων, το πρωτόκολλο πρόσβασης καναλιών καθώς επίσης και το ίδιο το κανάλι ή τις καταστάσεις διάλειψης (fading states). Υπάρχουν δύο κύριοι παράγοντες που διαμορφώνουν την παρεμβολή. Κατ' αρχάς, επειδή τα σήματα παρεμβολής είναι μόνο διαχωρισμένα στο χώρο, είναι η χωρική κατανομή των ταυτόχρονα μεταδιδόντων κόμβων και κατά δεύτερον, δεδομένου ότι το ποσοστό παρεμβολής εξαρτάται από την εξασθένηση σήματος σε σχέση με την απόσταση, είναι οι απώλειες διαδρομής (path loss law). Ο πρώτος παράγοντας αποτελείται από δύο μέρη, την κατανομή κόμβων αφ' ενός και του πρωτοκόλλου πρόσβασης διαύλου (MAC) αφ' ετέρου. Είναι ο συνδυασμός τους που καθορίζει την κατανομή της μετάδοσης των κόμβων. Παραδείγματος χάριν, ακόμα κι αν οι κόμβοι είναι τυχαία κατανεμημένοι, ένα καλό πρωτόκολλο MAC θα εξασφαλίσει έναν διαχωρισμό στο χώρο μεταξύ των ταυτόχρονων πομπών ή καλύτερα μεταξύ των δεκτών και των παρεμβολών (interferers). Ως εκ τούτου η κατανομή των πομπών μπορεί να είναι αρκετά προβλέψιμη. Δεδομένου ότι η απόδοση ενός δικτύου είναι καθορισμένη από το

λόγο σήματος προς θόρυβο και παρεμβολή (SINR) ή, στην περίπτωση γνήσιας παρεμβολής, από το λόγο σήματος προς παρεμβολή (SIR), οι κατανομές SIR μπορούν να εξαχθούν, συνήθως υπό τη μορφή πιθανότητας διακοπής λειτουργίας $\Pi(\text{SINR} < \theta)$, η οποία αντιστοιχεί στη γνωστή αθροιστική συνάρτηση κατανομής.

Αντίθετα, ο ακριβής χαρακτηρισμός της παρεμβολής ή των SIRs για γενικές κατανομές κόμβων και πρωτόκολλα MAC είναι ένα πολύ δύσκολο πρόβλημα. Δεδομένου ότι η εστίασή μας σε αυτήν την διπλωματική εργασία είναι στα αναλυτικά αποτελέσματα και στις ελλοχεύουσες μαθηματικές τεχνικές, τα πρότυπα δικτύων είναι εν μέρει επιλεγμένα για την αναλυτική τους ευκολία, και όχι απαραίτητα επειδή είναι τα πιο ρεαλιστικά. Σημειώνεται ότι οι προσφερόμενες αναλυτικές μέθοδοι γίνονται εύκολα κατανοητές όταν εφαρμόζονται στα απλά πρότυπα, και όταν εφαρμόζονται σε πιο σύνθετα δίκτυα, όπως τα δίκτυα δικτυωτού πλέγματος και τα δίκτυα Poisson, τότε δίνουν άνω ή και κάτω όρια όπως στη θεωρία κωδίκων. Επίσης, οι γενικές αρχές σχεδιασμού μπορούν να προκύψουν ευκολότερα από τα αναλυτικά αποτελέσματα. Πρέπει να τονιστεί ότι επικεντρωνόμαστε στην ανάλυση των στατιστικών της ισχύος της (συνολικής) παρεμβολής όταν οι τυχαίες πηγές περιλαμβάνουν την κατανομή κόμβων, την εξασθένιση των καναλιών και το πρωτόκολλο πρόσβασης καναλιών. Αντίθετα, δεν θα εξετάσουμε τις στατιστικές πλάτους (εύρους) της παρεμβολής, η οποία εξαρτάται από τον τρόπο σηματοδότησης που χρησιμοποιείται και ο οποίος εάν δίνεται με υπό συνθήκη την ισχύ, τότε προσεγγίζεται αρκετά καλά από μια Gaussian κατανομή ή μερικές φορές όχι και τόσο καλά [22]. Εάν χρησιμοποιήσουμε την κανονική (Gaussian) προσέγγιση, τότε το εύρος παρεμβολής είναι βεβαίως υπό συνθήκη κανονικό και εάν αντιμετωπίζεται ως θόρυβος στο δέκτη, η διασπορά ή έστω η ισχύς είναι η σχετική στατιστική για την επιτεύξιμη απόδοση των κόμβων. Ενώ ο θόρυβος είναι μη βέλτιστος γενικά, εάν γίνει αποδεκτό ότι η παρεμβολή μπορεί να εννοηθεί ως θόρυβος, τότε γίνεται βέλτιστος στην περίπτωση της κανονικής αδύναμης παρεμβολής ή της περίπτωσης *θορυβώδους παρεμβολής* [42]. Σε αυτή την περίπτωση, οι περίπλοκοι πολλών-χρηστών ανιχνευτές δε λειτουργούν καλύτερα από τους απλούς (single-user) ανιχνευτές, και άρα η μέση τιμή του τύπου $\log_2(1 + \text{SINR})$ είναι η πραγματική τιμή της χωρητικότητας διαύλου κανονικοποιημένη ως προς το εύρος ζώνης.

Η παρούσα διπλωματική έχει την εξής δομή. Το Κεφάλαιο 2 μελετά την παρεμβολή για τα δομημένα δίκτυα, και ειδικότερα τα δικτυωτά πλέγματα. Το Κεφάλαιο 3 εξετάζει τα δίκτυα Poisson, όπου οι κόμβοι κατανέμονται ως σημειακή διαδικασία Poisson (PPP). Το πρότυπο PPP είναι κατά πολύ πιο δημοφιλές λόγω της αναλυτικής του δομής. Δίνει τη δυνατότητα για εμπειριστατωμένες αναλύσεις διαφόρων περιπτώσεων, συμπεριλαμβανομένης της επίρειας του ελέγχου ισχύος και του απλωμένου φάσματος, της ακύρωσης παρεμβολής και την εύρεση των συντελεστών συσχετισμού παρεμβολής. Το επόμενο κεφάλαιο παρέχει μια γενίκευση του μοντέλου Poisson. Συγκεκριμένα, στο Κεφάλαιο 4 οι ιδιότητες παρεμβολής μελετώνται επάνω σε ένα πυκνό Poisson δίκτυο, και το τελευταίο κεφάλαιο, Κεφάλαιο 5, παραθέτει και αναλύει τα κυριότερα και σημαντικότερα συμπεράσματα της παρούσας διπλωματικής.

Τα αποτελέσματα και οι αναλυτικές τεχνικές που παρατίθενται σε αυτήν την διπλωματική εργασία ενδεχομένως μπορεί να χρησιμεύσουν ως οδηγός για το σχεδιασμό των μεγάλων ασύρματων συστημάτων με τυχαίες θέσεις χρηστών. Δίνουν απαντήσεις σε ερωτήσεις όπως πώς οι στατιστικές παρεμβολής και οι πιθανότητες διακοπής λειτουργίας επηρεάζονται από την πυκνότητα χρηστών και την κατανομή τους, τις απώλειες

διαδρομής, την εξασθένιση και τον έλεγχο ισχύος. Επιπλέον, λαμβάνοντας υπόψη τους περιορισμούς όπως η διακοπή λειτουργίας ή οι απαιτήσεις ρυθμού μετάδοσης, επιτρέπουν το συντονισμό των παραμέτρων δικτύων για βέλτιστη απόδοση.

1.2 Περιγραφή της παρεμβολής

Η κύρια ποσότητα ενδιαφέροντος είναι η (συσσωρευμένη) παρεμβολή. Μετρημένη σε ένα σημείο $y \in \mathbb{R}^d$ δίνεται από

$$I(y) = \sum_{x \in T} P_x h_x \ell(\|x - y\|), \quad (1.1)$$

όπου $T \subset \mathbb{R}^d$ δείχνει το σύνολο των μεταδιδόντων κόμβων, P_x την ισχύ μετάδοσης του κόμβου x , h_x το (ή την ισχύ) συντελεστή εξασθένισης και ℓ την απώλεια διαδρομής που υποτίθεται ότι εξαρτάται μόνον από την απόσταση $\|y - x\|$ από τον κόμβο x στο σημείο y . Σε ένα μεγάλο ασύρματο δίκτυο, οι άγνωστοι είναι τα μεγέθη T , h_x και ίσως η P_x . Οι γεωγραφικές θέσεις των παρεμβαλλόμενων κόμβων, μαζί με τις απώλειες διαδρομής, καθορίζουν την παρεμβολή πρώτης τάξης. Οι επιπτώσεις της εξασθένισης είναι μικρότερες αλλά βεβαίως καθόλου αμελητέες, όπως θα δούμε παρακάτω. Συνεπώς, στην ουσία, είναι η *γεωμετρία δικτύων* ή, ακριβέστερα, η *γεωμετρία παρεμβολής*, που καθορίζει την κατανομή της παρεμβολής. Η γεωμετρία αποτελείται από την ελλοχεύουσα κατανομή κόμβων που μαζί με την πρόσβαση καναλιών, καθορίζει τις θέσεις των παρεμβαλλόμενων κόμβων και τις απώλειες διαδρομής, οι οποίες καθορίζουν με τη σειρά τους την τιμή της παρεμβαλλόμενης ισχύος έχοντας λάβει υπόψη μας την απόσταση.

Οι κόμβοι μπορούν να τοποθετηθούν ντετερμινιστικά, παραδείγματος χάριν σε ένα δικτυωτό πλέγμα ή με τυχαίο τρόπο, οπότε σ' αυτή την περίπτωση η αβεβαιότητα των κόμβων αντιπροσωπεύεται συνήθως με μια σημειακή στοχαστική διαδικασία Φ στο \mathbb{P}^2 ή στο \mathbb{P}^3 ή σε ένα υποσύνολό τους. Υποθέτοντας ότι η σημειακή διαδικασία είναι απλή, δηλαδή, ότι δεν υπάρχουν δύο κόμβοι στην ίδια θέση, μπορούμε να γράψουμε τη σημειακή διαδικασία σαν τυχαίο σύνολο, $\Phi = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, όπου ο (τυχαία μεταβλητή) συνολικός αριθμός των κόμβων N μπορεί να είναι είτε πεπερασμένος είτε άπειρος. Σε κάθε χρονική στιγμή, το πρωτόκολλο MAC επιλέγει ένα υποσύνολο κόμβων ως πομπούς. Αυτή η λειτουργία μετατρέπει το T στην (1.1) και στη συνέχεια την παρεμβολή να εξαρτώνται από το χρόνο. Σε μερικές περιπτώσεις, η παρεμβολή είναι στάσιμη, στο χρόνο και στο χώρο, έτσι ούτε ένας χρονικός δείκτης ούτε μια χωρική θέση δεν πρέπει να διευκρινιστεί, και άρα μπορούμε απλά να αναφερόμαστε στην κατανομή της παρεμβολής I .

Θα υποθέσουμε, εκτός και αν ρητά αναφέρεται διαφορετικά, ότι έχουμε μοναδιαία τιμή μεταδιδόμενης ισχύος σε όλους τους κόμβους και ότι η εξασθένιση είναι ανεξάρτητη και ιδιοκατανομημένη (i.i.d.) με $E(h) = 1$.

1.3 Λόγος σήματος προς θόρυβο και παρεμβολή — Πιθανότητα διακοπής μετάδοσης

1.3.1 Ορισμοί

Η απόδοση ενός ασύρματου δικτύου εξαρτάται αυστηρά από το λόγο σήματος προς θόρυβο και την παρεμβολή (SINR) όπως μετρώνται στους δέκτες.

Ορισμός 1.1 (Λόγος σήματος προς θόρυβο και παρεμβολής (SINR)).

Το SINR για έναν δέκτη που τοποθετείται στο σημείο εκκίνησης ο δισδιάστατου ή τρισδιάστατου Ευκλείδειου χώρου είναι

$$\text{SINR} = \frac{S}{W + I}, \quad (1.2)$$

όπου S είναι η επιθυμητή ισχύς των σημάτων, W είναι η ισχύς θορύβου, και I η ισχύς της παρεμβολής που δίνεται από την (1.1).

Για ένα σταθερό σχέδιο διαμόρφωσης και κωδικοποίησης και με την παρεμβολή αντιμετωπιζόμενη ως θόρυβο, για παράδειγμα, με τη χρήση ενός απλού γραμμικού δέκτη, καλό πρότυπο είναι οι μεταδόσεις να πετυχαίνουν εάν το SINR υπερβαίνει ένα ορισμένο κατώτατο όριο (κατώφλι) θ . Έτσι ορίζουμε την πιθανότητα επιτυχίας ως εξής:

Ορισμός 1.2 (Πιθανότητα επιτυχημένης μετάδοσης).

$$p_s(\theta) = \mathbb{P}(\text{SINR} > \theta). \quad (1.3)$$

Το συμπλήρωμά της $1-p_s$ είναι η πιθανότητα διακοπής λειτουργίας, η οποία είναι ίδια με την πιθανότητα συσσωρευτικής κατανομής (CDF) του SINR. Μπορούμε λοιπόν να εκφράσουμε το επί τοις εκατόν ποσοστό επιτυχίας (με την παρεμβολή να αντιμετωπίζεται ως θόρυβος) μιας σύνδεσης ως εξής:

$$\mathbb{E} \log_2(1 + \text{SINR}) = - \int \log_2(1 + x) dp_s(x),$$

υποθέτοντας ότι το εύρος παρεμβολής είναι κανονικό. Στην περίπτωση ασθενούς παρεμβολής, αυτή η έκφραση δίνει τον τύπο της χωρητικότητας κανονικοποιημένο ως προς το εύρος ζώνης [42].

1.3.2 Πιθανότητα διακοπής μετάδοσης για την περίπτωση εξασθένισης κατά Rayleigh

Στην περίπτωση κατά Rayleigh εξασθένισης, η επιθυμητή ισχύς σημάτων S είναι εκθετικά κατανομημένη. Υποθέτουμε ότι $ES = 1$, και συνεπώς έχουμε τον τύπο

$$p_s(\theta) = \mathbf{P}(S > \theta(W + I)) = \underbrace{\exp(-\theta W)}_{p_s^W} \cdot \underbrace{\exp(-\theta I)}_{p_s^I},$$

ο οποίος δείχνει ότι η πιθανότητα επιτυχίας είναι το γινόμενο δύο παραγόντων, του θορύβου $p_s^W = \exp(-\theta W)$ που δεν εξαρτάται από την παρεμβολή και της παρεμβολής $p_s^I = \exp(-\theta I)$ που δεν εξαρτάται από το θόρυβο. Αυτό επιτρέπει μια σημαντική απλοποίηση της ανάλυσης διακοπής λειτουργίας επειδή οι κοινές επιπτώσεις του θορύβου και της παρεμβολής δίνονται από το γινόμενο των πιθανοτήτων επιτυχίας στις αθόρυβες και άνευ παρεμβολής (interference-free) περιπτώσεις. Επιπλέον, επειδή η συνάρτηση $\exp(-\theta I)$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace της παρεμβολής στο σημείο θ , με άλλα λόγια,

$$p_s^I(\theta) = \mathcal{L}_I(s)|_{s=\theta}, \quad (1.4)$$

η πιθανότητα επιτυχημένης μετάδοσης κάτω από συνθήκες παρεμβολής και μόνον παρεμβολής μπορεί να υπολογιστεί μέσω του μετασχηματισμού Laplace του I , όπως άλλωστε αναλύθηκε στις βιβλιογραφικές αναφορές [3, 31, 54].

Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι αυτός ο τρόπος είναι ευκολότερος σε πολλές περιπτώσεις από αυτόν που υπολογίζει τη στατιστική κατανομή. Με άλλα λόγια, η SIR κατανομή όταν το S έχει εξασθένιση Rayleigh είναι γνωστή για περισσότερους τύπους δικτύων και προτιμάται, λόγω μεγαλύτερου βαθμού δυσκολίας της δεύτερης περίπτωσης, από την περίπτωση υπολογισμού της ακριβής κατανομής της ίδιας της παρεμβολής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Παρεμβολή στα Δομημένα Δίκτυα

2.1 Δομημένα δίκτυα

Υπολογίζουμε την παρεμβολή που μετριέται στο σημείο εκκίνησης παρουσία n το πλήθος παρεμβολών με αποστάσεις $r_i > 0$ (από το σημείο εκκίνησης) και που είναι ενεργές με πιθανότητα p και είναι ανεξάρτητη η μία από την άλλη (ALOHA). Οι απώλειες διαδρομής δίνονται από τον τυποποιημένο νόμο εκθετικής δύναμης (με κανονικοποιημένες αποστάσεις όλες ίσες με r) $\ell(r) = r^{-\alpha}$, και τα κανάλια υπόκεινται σε Rayleigh (ως προς εύρος) εξασθένιση και έτσι έχουμε εκθετική εξασθένιση ισχύος. Ως εκ τούτου, η ισχύς P_{ri} που λαμβάνεται από παρεμβολή i , δεδομένου ότι μεταδίδει, κατανέμεται εκθετικά ως $r_i^{-\alpha}$. Με άλλα λόγια, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (PDF) της P_{ri} είναι

$$f_{P_{ri}}(x) = r_i^\alpha \exp(-r_i^\alpha x), \quad x \geq 0. \quad (2.1)$$

Ενώ η συνολική παρεμβολή δίνεται από:

$$I_n = \sum_{i=1}^n B_i P_{ri}, \quad (2.2)$$

όπου οι τυχαίες μεταβλητές B_i είναι i.i.d. Bernoulli με παράμετρο p .

Ο μετασχηματισμός Laplace μιας εκθετικής τυχαίας μεταβλητής με μέση τιμή $1/y$ είναι $L(s) = y / (y + s)$, $s \geq 0$, και άρα έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{I_n}(s) &= \prod_{i=1}^n \left(\frac{p r_i^\alpha}{r_i^\alpha + s} + 1 - p \right) \\ &= \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{p}{1 + r_i^\alpha / s} \right), \quad s \geq 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Εάν ο αριθμός κόμβων n είναι άπειρος, τότε η I_n μπορεί να έχει (ή και να μην έχει) μια τυπική κατανομή, κάτι που πρέπει να εξεταστεί. Λόγω συνέχειας και μονοτονικότητας, η (2.3) συγκλίνει για όλες τις ακολουθίες r_i , εάν $s > 0$, αλλά η αντίστοιχη κατανομή μπορεί να είναι παθολογική, δηλαδή ενδέχεται να ισχύει η συνθήκη $\Pi(I_\infty = \infty) = 1$.

Χάρη στην ομοιόμορφη σύγκλιση της (2.3), το όριο και το γινόμενο ανταλλάσσονται και συνεπάγεται ότι η (2.3) συγκλίνει σε κάποιο θετικό όριο για το οποιοδήποτε $s > 0$ εάν και μόνο εάν

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{p}{1 + r_i^\alpha/s} < \infty \quad (\forall s > 0) \iff \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p}{r_i^\alpha} < \infty.$$

Αυτός είναι ο περιορισμός για την I_∞ να έχει μια τυπική κατανομή.
Αντίθετα, εάν

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{p}{r_i^\alpha} = \infty,$$

τότε η παρεμβολή απειρίζεται κατά μέτρο (a.s.)

Παραδείγματος χάριν, στην περίπτωση ενός μονοδιάστατου (ή μονόπλευρου) πλέγματος με $r_i = i$, $i \in \mathbb{N}$ και $p > 0$, η παρεμβολή είναι πεπερασμένη a.s. για $\alpha > 1$ και άπειρη για $\alpha \leq 1$ επειδή η συνάρτηση ζήτα του Riemann απειρίζεται, δηλαδή

$$\zeta(\alpha) \triangleq \sum_{i=1}^{\infty} i^{-\alpha} = \infty$$

για $\alpha = 1$. Στη δισδιάστατη περίπτωση, πρέπει να ικανοποιείται η $\alpha > 2$ για να έχουμε πεπερασμένη παρεμβολή επειδή τώρα ισχύει

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} (i^2 + k^2)^{-1} = \infty.$$

2.2 Μονοδιάστατα δικτυωτά πλέγματα

2.2.1 Μετασχηματισμός Laplace

Όταν $\alpha = 2$ και $\alpha = 4$, το άπειρο μονόπλευρο και μονοδιάστατο πλέγμα $r_i = i$, $i \in \mathbb{N}$, μας επιτρέπει να έχουμε μια κλειστού τύπου έκφραση για το μετασχηματισμό $L_I(s)$. Συγκεκριμένα, για $\alpha = 2$, παίρνουμε για το μετασχηματισμό Laplace το παρακάτω αποτέλεσμα:

$$\mathcal{L}_I(s) = \frac{\prod_{i=1}^{\infty} (1 + (1-p)s/i^2)}{\prod_{i=1}^{\infty} (1 + s/i^2)}, \quad s \geq 0.$$

Η εφαρμογή του τύπου Euler

$$\sin(\pi z) \equiv \pi z \prod_{i=1}^{\infty} (1 - z^2/i^2), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (2.4)$$

όπου $z = j\sqrt{(1-p)s}$ στον αριθμητή και $z = j\sqrt{s}$ στον παρονομαστή, μας δίνει τη δυνατότητα να απλοποιήσουμε ορισμένες εκφράσεις. Παίρνουμε, για παράδειγμα, το γινόμενο των παρονομαστών

$$\prod_{i=1}^{\infty} (1 + s/i^2) = \frac{\sin(\pi j \sqrt{s})}{\pi j \sqrt{s}} = \frac{\sinh(\pi \sqrt{s})}{\pi \sqrt{s}}, \quad s \geq 0,$$

και συνεπώς έχουμε

$$\mathcal{L}_I(s) = \frac{1}{\sqrt{1-p}} \cdot \frac{\sinh(\pi \sqrt{s(1-p)})}{\sinh(\pi \sqrt{s})}, \quad s \geq 0. \quad (2.5)$$

Από τον κανόνα Bernoulli–l’Hôpital για $p = 1$, όπου όλοι οι παρεμβολείς είναι πάντα ενεργοί, παίρνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$\mathcal{L}_I(s) = \frac{\pi \sqrt{s}}{\sinh(\pi \sqrt{s})}, \quad s \geq 0. \quad (2.6)$$

Ενώ η $p = 1$ περίπτωση μπορεί να φανεί τεχνητή επειδή κανένας κόμβος (εκτός από τον κόμβο που βρίσκεται στο σημείο εκκίνησης) μέσα στο δίκτυο δεν ‘αφουγκράζεται’, εν τούτοις αυτό το αποτέλεσμα θα αποδειχθεί χρήσιμο για την ανάλυση των δικτύων με πολύπλεξη TDMA.

Όταν $\alpha = 4$, ξαναγράφουμε αρχικά την (2.3) ως

$$\mathcal{L}_I(s) = \frac{\prod_{i=1}^{\infty} (1 + (1-p)s/i^4)}{\prod_{i=1}^{\infty} (1 + s/i^4)}. \quad (2.7)$$

Επίσης, παρατηρούμε ότι η παραγοντοποίηση του αριθμητή και του παρονομαστή σύμφωνα με τον τύπο $(1 - z^4/i^4) = (1 - z^2/i^2)(1 + z^2/i^2)$ επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο Euler που δίνεται από την (2.4) με $z = \sqrt{\pm j} ((1-p)s)^{1/4}$ (στον αριθμητή) και $z = \sqrt{\pm j} (s)^{1/4}$ (στον παρονομαστή). Οι δύο εκφράσεις, που προκύπτουν, είναι μιγαδικές συζυγείς και ισχύει

$$|\sin(\sqrt{j}x)|^2 = \cosh^2(x/\sqrt{2}) - \cos^2(x/\sqrt{2}).$$

Ως εκ τούτου παίρνουμε

$$\mathcal{L}_I(s) = \frac{\cosh^2(\sigma(1-p)^{1/4}) - \cos^2(\sigma(1-p)^{1/4})}{\sqrt{1-p}(\cosh^2 \sigma - \cos^2 \sigma)}, \quad (2.8)$$

όπου $\sigma \triangleq \pi s^{1/4} / \sqrt{2}$.

Όταν $p=1$, η παραπάνω έκφραση απλοποιείται στην παρακάτω:

$$\mathcal{L}_I(s) = \frac{2\sigma^2}{\cosh^2 \sigma - \cos^2 \sigma} = \frac{\pi^2 \sqrt{s}}{\cosh^2\left(\frac{\pi s^{1/4}}{\sqrt{2}}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi s^{1/4}}{\sqrt{2}}\right)}. \quad (2.9)$$

2.2.2 Πυκνότητες πιθανότητας

Επιπλέον, πρέπει να βρούμε μια έκφραση για την πυκνότητα πιθανότητας (PDF) της I . Δεδομένου ότι ένας άμεσος υπολογισμός δεν είναι καθόλου εύκολος, στοχεύουμε στην εύρεση μιας έκφρασης που να δίνεται μέσω δυναμοσειράς.

Άρα, για έναν πεπερασμένο αριθμό κόμβων n , με μοναδιαία ισχύ, και $p = 1$ (όλοι οι κόμβοι μεταδίδουν), και εκθετικό συντελεστή απωλειών διαδρομής α , η παρεμβολή I_n είναι μία n -stage hypoexponential τυχαία μεταβλητή με μετασχηματισμό Laplace

$$\mathcal{L}_{I_n}(s) = \prod_{i=1}^n \frac{i^\alpha}{i^\alpha + s}, \quad (2.10)$$

Με αντίστοιχη δυναμοσειρά

$$\mathcal{L}_{I_n}(s) = \sum_{i=1}^n \frac{a_{n,i} i^\alpha}{i^\alpha + s}, \quad \text{where } a_{n,i} \triangleq \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{k^\alpha}{k^\alpha - i^\alpha}.$$

Από τον αντίστροφο μετασχηματισμό κάθε όρου λαμβάνουμε την PDF

$$f_{I_n}(x) = \sum_{i=1}^n a_{n,i} i^\alpha \exp(-i^\alpha x), \quad x \geq 0. \quad (2.11)$$

Από την (2.10) που έχει τη μορφή $\prod_{i=1}^n i^\alpha$ στον αριθμητή (και κανέναν όρο της μορφής s), οι συντελεστές που παραμένουν $a_{n,i}$ έχουν τις ιδιότητες $\sum_{i=1}^n a_{n,i} = 1, n \in \mathbb{N}$, και $\sum_{i=1}^n a_{n,i} i^\alpha = 0$ για $n > 1$. Άρα $f_{I_n}(0) = 0$ για $n > 1$. Για $n = 1$, η παρεμβολή I_1 έχει μια εκθετική κατανομή, όπου συνεπάγεται ότι $f_{I_1}(0) = 1$.

Για τις δύο ειδικές περιπτώσεις, $\alpha = 2$ και $\alpha = 4$, μπορούμε να βρούμε την οριακή κατανομή $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{I_n}(x)$. Συγκεκριμένα, μελετάμε την καθεμία περίπτωση ξεχωριστά.

Ειδική περίπτωση $\alpha = 2$. Χρησιμοποιώντας τον τύπο αθροίσματος του Euler για άλλη μια φορά, έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_{\infty,i}} &= \lim_{x \rightarrow i} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{\infty} (1 - x^2/k^2) \\ &= \lim_{x \rightarrow i} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x (1 - (x/i)^2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow i} \frac{\pi \cos(\pi x)}{\pi (1 - (x/i)^2) - \pi x (2x/i^2)} \\ &= \frac{(-1)^{i+1}}{2}. \end{aligned}$$

Και άρα η οριακή πυκνότητα πιθανότητας της παρεμβολής είναι

$$f_I(x) = \begin{cases} 2 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} i^2 \exp(-i^2 x) & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{if } x = 0. \end{cases} \quad (2.12)$$

Το Σχήμα 2.1 παρουσιάζει τις πυκνότητες $f_n(x)$ για $n = 2, 5, 12$ και ∞ . Ο μέσος όρος της παρεμβολής στην άπειρη περίπτωση είναι $\mathbf{E}(I) = \sum_{i=1}^{\infty} i^{-2} = \zeta(2) = \pi^2/6$.

Η αντίστοιχη συνάρτηση κατανομής (CDF) για πεπερασμένο και άπειρο n είναι, αντίστοιχα,

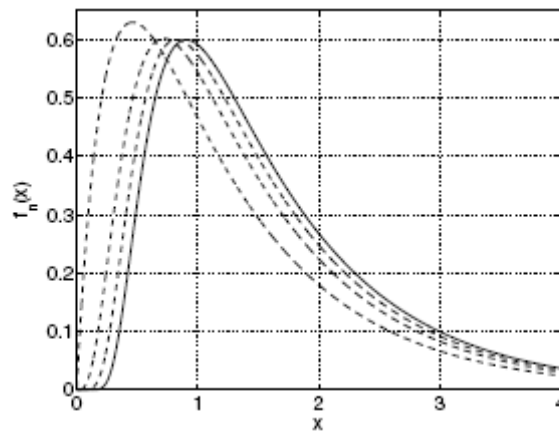
$$F_{I_n}(x) = \sum_{i=1}^n a_{n,i} (1 - \exp(-i^2 x)), \quad x \geq 0, \quad (2.13)$$

and, for $n \rightarrow \infty$, since $\sum_{i=1}^n a_{n,i} = 1$ for all $n \in \mathbb{N}$,

$$F_I(x) = \begin{cases} 1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \exp(-i^2 x) & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{if } x \leq 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

Ειδι
κή
περί
πτω
ση α
 $= 4$.
Εδώ
έχου

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_{\infty,i}} &= \lim_{x \rightarrow i} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{\infty} (1 - x^4/k^4) \\ &= \lim_{x \rightarrow i} \left[\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (1 - i^2/k^2) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (1 + i^2/k^2) \right] \end{aligned}$$



με όπωσ και στην προηγούμενη περίπτωση ($\alpha = 2$)

Σχήμα 2.1 Οι διακεκομμένες καμπύλες παρουσιάζουν την πυκνότητα πιθανότητας $f_n(x)$ από την (2.11) για $\alpha=2$ και $n = 2$ (πρώτη καμπύλη από την αριστερή πλευρά), $n = 5$, και

$n = 12$, και η συμπαγής καμπύλη παρουσιάζει την οριακή πυκνότητα $f_I(x)$ από την (2.12).

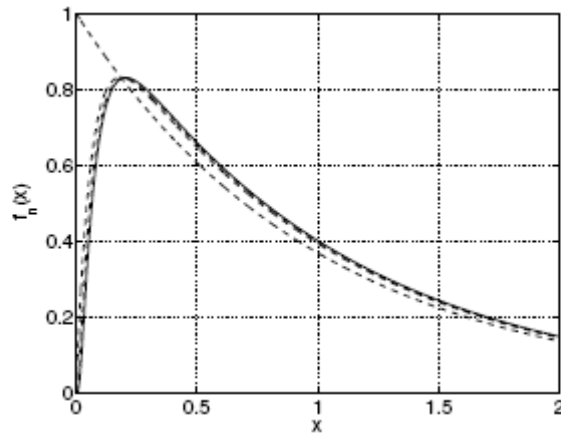
$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow i} \frac{\sin(\pi x) \sinh(\pi x)}{(\pi x)^2 (1 - (x/i)^4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow i} \frac{\pi \cos(\pi x) \sinh(\pi x) - \pi \sin(\pi x) \cosh(\pi x)}{2\pi^2 (1 - (x/i)^4) - \pi^2 x (4x^4/i^4)} \\ &= \frac{(-1)^{i+1} \sinh(i\pi)}{4\pi i}. \end{aligned}$$

Λόγω του όρου $\sinh(\cdot)$, οι συντελεστές $a_{\infty,i}$ φθίνουν πολύ γρήγορα, και άρα χρειάζεται να εξετάσουμε μόνο τους κοντινότερους τρεις ή ακόμα και δύο παρεμβολείς (interferers). Ο κοντινότερος παρεμβολέας (interferer) αντιστοιχεί στην ουρά της πυκνότητας, αλλά οι πιθανότητες μικρής παρεμβολής είναι δραστικά διαφορετικές. Το τελευταίο αποτέλεσμα είναι ουσιαστικά ένα είδος διαφορισμού (diversity).

Συνεπώς, η πυκνότητα πιθανότητας για την οριακή παρεμβολή έχει τη μορφή

$$f_I(x) = \begin{cases} 4\pi \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1} i}{\sinh(i\pi)} i^{-4} \exp(-i^4 x) & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{if } x = 0. \end{cases} \quad (2.15)$$

Το Σχήμα 2.2 παρουσιάζει τις πυκνότητες $f_{I_n}(x)$ για $n = 1, 2, 3$, και ∞ . Η καμπύλη για $n = 3$ είναι ουσιαστικά όμοια με την οριακή περίπτωση. Επισημαίνεται ότι η μέση τιμή της παρεμβολής στην οριακή περίπτωση είναι



$$E(I) = \sum_{i=1}^{\infty} i^{-4} = \zeta(4) = \pi^4/90.$$

Σχήμα 2.2 Οι διακεκομμένες καμπύλες παρουσιάζουν την πυκνότητα πιθανότητας $f_{ln}(x)$ από την (2.11) για $\alpha = 4$ και $n = 1, 2, 3$, και η συμπαγής καμπύλη παρουσιάζει την οριακή πυκνότητα $f_l(x)$ από την (2.15).

2.3 Δισδιάστατα δικτυωτά πλέγματα

2.3.1 Τετραγωνικό δικτυωτό πλέγμα

Εξετάζουμε ένα δίκτυο με τους κόμβους του να τοποθετούνται επάνω σε δικτυωτό πλέγμα ακέραιων αριθμών χωρίς το μηδέν, δηλαδή $\mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$. Θέλουμε να υπολογίσουμε την παρεμβολή που μετριέται στο σημείο μηδέν (χωρίς εξασθένιση) ή τη μέση τιμή της παρεμβολής (με εξασθένιση). Παρατηρούμε ότι το άθροισμα δικτυωτού πλέγματος

$$I = \sum_{\substack{x \in \mathbb{Z}^2 \\ x \neq 0}} \ell(\|x\|)$$

δεν έχει έκφραση κλειστής μορφής. Εντούτοις, με την ομαδοποίηση των κόμβων μέσα σε δακτυλίους με αυξανόμενες αποστάσεις από το μηδέν, μπορούμε να έχουμε άνω και κάτω όρια. Παραδείγματος χάριν, παίρνουμε τους τέσσερις κοντινότερους κόμβους (με απόσταση=1), τους τέσσερις επόμενους που είναι αμέσως πλησιέστεροι (με απόσταση= $\sqrt{2}$), και έπειτα δακτυλίους των $8k$ κόμβων για $k = 2, 3, \dots, \infty$. Κάθε κόμβος που βρίσκεται μέσα στο δακτύλιο k έχει ελάχιστη απόσταση k και μέγιστη απόσταση $\sqrt{2}k$, αποτέλεσμα το οποίο παράγει τα όρια

$$4\ell(1) + 4\ell(\sqrt{2}) + \sum_{k=2}^{\infty} 8k\ell(\sqrt{2}k) < I < 4\ell(1) + 4\ell(\sqrt{2}) + \sum_{k=2}^{\infty} 8k\ell(k).$$

Επίσης, όταν $\ell(r) = r^{-\alpha}$ έχουμε τα παρακάτω κάτω και άνω όρια:

$$4(1 + 2^{-\alpha/2}) + 8 \cdot 2^{-\alpha/2}(\zeta(\alpha - 1) - 1) < I < 4(1 + 2^{-\alpha/2}) + 8(\zeta(\alpha - 1) - 1). \quad (2.16)$$

Για $\alpha = 4$, έχουμε $5,4 < I < 6,6$. Η σωστή τιμή είναι $I = 6,037$. Καλύτερη τιμή για το κατώτερο όριο λαμβάνεται όταν ο μέσος όρος απόστασης ανάμεσα στους κόμβους μέσα στο δακτύλιο k είναι φραγμένος από πάνω με το $k(1 + \sqrt{2})/2$ επειδή

$$\frac{k(1 + \sqrt{2})}{2} \geq \frac{1}{2} \left(\sqrt{k^2 + i^2} + \sqrt{k^2 + (k - i)^2} \right), \quad \forall 0 \leq i \leq k.$$

Συνεπώς, έχουμε το κατώτερο όριο

$$I \geq 4(1 + 2^{-\alpha/2}) + 8 \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{2}}{2} \right)^{-\alpha} (\zeta(\alpha - 1) - 1). \quad (2.17)$$

Για $\alpha = 4$, αυτό είναι περίπου 5,76. Υποθέτουμε ότι η μέση απόσταση ανάμεσα στους κόμβους μέσα στο δακτύλιο k είναι περίπου $k\sqrt{5} / 4$ και κατόπιν παίρνουμε από την (2.17) την πολύ καλή προσέγγιση

$$I \approx 4(1 + 2^{-\alpha/2}) + 8 \cdot (5/4)^{-\alpha/2}(\zeta(\alpha - 1) - 1). \quad (2.18)$$

Για $\alpha = 4$, έχουμε $I \approx 5 + 8(4/5)^2(\zeta(3) - 1) = 6,034$, που είναι πολύ κοντά στη σωστή τιμή. Το Σχήμα 2.3 παρουσιάζει την ακριβή τιμή του I συναρτήσει του α , μαζί με τη γραφική παράσταση των ορίων της (2.16) καθώς επίσης και την προσέγγιση της (2.18).

Για να επιτύχουμε αποτελέσματα κλειστής μορφής (χωρίς τη συνάρτηση ζήτα) σημειώνουμε ότι

$$\sum_{k=3}^{\infty} k^{-\alpha} = \int_2^{\infty} \lceil x \rceil^{-\alpha} dx < \int_2^{\infty} x^{-\alpha} dx,$$

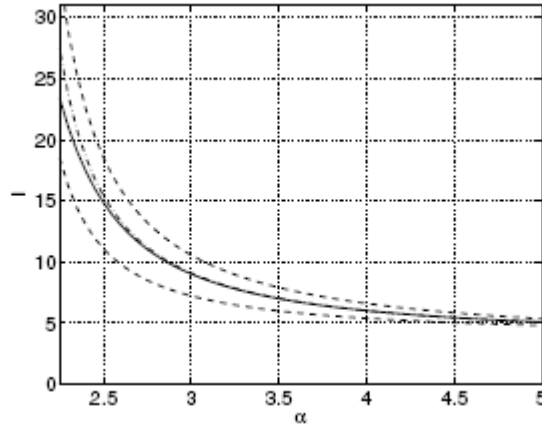
όπου

$$\sum_{k=3}^{\infty} k^{-\alpha} = \int_3^{\infty} \lfloor x \rfloor^{-\alpha} dx > \int_3^{\infty} x^{-\alpha} dx.$$

Τα σύμβολα $\lceil x \rceil$ και $\lfloor x \rfloor$ δείχνουν το μικρότερο ακέραιο αριθμό μεγαλύτερο από ή ίσο με το x και το μεγαλύτερο ακέραιο αριθμό μικρότερο από ή ίσο με το x , αντίστοιχα.

Συνεπώς,

$$\zeta(\alpha) < 1 + 2^{-\alpha} + \int_2^{\infty} x^{-\alpha} dx = 1 + 2^{-\alpha} \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1}, \quad \alpha > 1,$$



Σχήμα 2.3 Η συμπαγής καμπύλη είναι η παρεμβολή ως συνάρτηση του εκθετικού συντελεστή απωλειών διαδρομής α . Οι διακεκομμένες καμπύλες είναι τα όρια της (2.16), και η διακεκομμένη καμπύλη είναι η προσέγγιση της (2.18), η οποία είναι πολύ ακριβής για $\alpha > 3$.

ο όποιος όταν αντικατασταθεί στην (2.16), μας δίνει το ανώτερο όριο:

$$I < 4 \left(1 + 2^{-\alpha/2} + 4 \cdot 2^{-\alpha} \frac{\alpha}{\alpha - 2} \right).$$

Για $\alpha = 4$, η τιμή του παραπάνω ανώτερου ορίου είναι ακριβώς 7.

Εάν το κατώτερο όριο του ολοκληρώματος είναι $5/2$ αντί 2 ή 3, έχουμε ένα αρκετά βελτιωμένο άνω όριο της συνάρτησης ζήτα:

$$\zeta(\alpha) \lesssim 1 + 2^{-\alpha} + \left(\frac{2}{5} \right)^{\alpha-1} \frac{1}{\alpha - 1}.$$

Για να δούμε ότι αυτό το αποτέλεσμα δίνει πράγματι ένα ανώτερο όριο, ορίζουμε τις τ.μ. U_k , $k = 3, \dots, \infty$, να είναι ομοιόμορφα κατανομημένες στο $[k-1/2, k+1/2]$. Από την κυρτότητα του $x^{-\alpha}$ και την ταυτοανισότητα Jensen παίρνουμε

$$I = 1 + 2^{-\alpha} + \sum_{k=3}^{\infty} \mathbb{E}(U_k)^{-\alpha} < 1 + 2^{-\alpha} + \sum_{k=3}^{\infty} \mathbb{E}(U_k^{-\alpha}).$$

Το άθροισμα στο ανώτερο φράγμα είναι $\int_{5/2}^{\infty} x^{-\alpha} dx$.

Τα ανώτερα όρια αυτής της σχετικά απλής έκφρασης για τη συνάρτηση $\zeta(\alpha)$ είναι πολύ στενά και είναι κατά 0,3% μικρότερα της αληθινής τιμής για $\alpha > 1$. Αν αντικαταστήσουμε το ανώτερο όριο μέσα στην (2.16), μας δίνει την τιμή 6,64 για $\alpha = 4$, που είναι πολύ κοντά στην πραγματική τιμή του ανώτερου ορίου.

Στην περίπτωση της κατανομής ισχύος των απωλειών διαδρομής, μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε τα παραπάνω αποτελέσματα (βλέπε επίσης τα αποτελέσματα της αναφοράς [55] τα οποία περιέχουν τη συνάρτηση ζήτα και άλλες ειδικές συναρτήσεις) για να περιγράψουμε την παρεμβολή. Για το τετραγωνικό ακέραιου αριθμού δικτυωτό πλέγμα, έχουμε

$$I = 4 \zeta(\alpha/2) \beta(\alpha/2),$$

όπου η

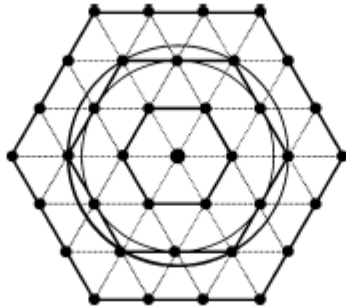
$$\beta(x) \triangleq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)^x}$$

είναι η συνάρτηση Dirichlet beta και η $\beta(2)$ είναι η σταθερά Catalan $K = 0,916$. Συνεπώς, για $\alpha = 4$, παίρνουμε $I = 2\pi^2 K/3 \approx 6,03$. Ενώ για άλλα άρτιας διάστασης τετραγωνικά δικτυωτά πλέγματα παρόμοιες εκφράσεις είναι γνωστές, υπάρχουν μόνον προσεγγιστικές λύσεις για την τρισδιάστατη περίπτωση.

2.3.2 Τριγωνικά δικτυωτά πλέγματα

Η λειτουργία κόμβων μέσα σε ένα τριγωνικό δικτυωτό πλέγμα μπορεί να έχει νόημα μόνο για ένα δίκτυο αισθητήρων. Το πιο σημαντικό εν τούτοις είναι το ότι ένα τριγωνικό δικτυωτό πλέγμα μπορεί να είναι καλό πρότυπο για ένα δίκτυο τύπου CSMA. Υποθέτουμε ένα υψηλής πυκνότητας δίκτυο, με κόμβους $\lambda \gg 1$ ανά μονάδα εμβαδού, και ένα πρωτόκολλο CSMA με μοναδιαία ακτίνα μετάδοσης. Κάτω από ιδανικές συνθήκες λειτουργίας, οι μεταδίδοντες κόμβοι δεν μπορούν να είναι πυκνότεροι από ένα τριγωνικό πλέγμα. Ως εκ τούτου η παρεμβολή σε ένα τριγωνικό δικτυωτό πλέγμα αποτελεί ένα ανώτερο όριο για την παρεμβολή που υπάρχει σε ένα δίκτυο CSMA. Πάλι μπορούμε να χωρίσουμε τους παρεμβολείς (interferers) σε δακτυλίους με αυξανουσες ακτίνες, όπου σε αυτήν την περίπτωση οι δακτύλιοι είναι εξάγωνα (hexagons). Τα έξι κοντινότερα εξάγωνα (δακτύλιος 1) βρίσκονται σε απόσταση 1, τα επόμενα δώδεκα (δακτύλιος 2) σε απόσταση $\sqrt{3}$ ή 2. Γενικά, στο δακτύλιο k , οι αποστάσεις είναι τουλάχιστον $\sqrt{3}k/2$ και όχι μεγαλύτερη από k (Βλέπε Σχήμα 2.4), και κατά συνέπεια η συσσωρευμένη παρεμβολή από m δακτυλίους είναι

$$6 + \sum_{k=2}^m 6k \cdot k^{-\alpha} < I_m < 6 + \sum_{k=2}^m 6k(\sqrt{3}k/2)^{-\alpha}, \quad m > 1,$$



Σχήμα 2.4 Τριγωνικό δικτυωτό πλέγμα με τρεις εξάγωνους δακτυλίους κόμβων. Υποθέτουμε μοναδιαίες πλησιέστερες αποστάσεις, όπου οι δύο κύκλοι δείχνουν ότι οι κόμβοι στο δεύτερο δακτύλιο είναι σε απόσταση τουλάχιστον $\sqrt{3}$ και το πολύ 2. Γενικότερα, η απόσταση μεταξύ των κόμβων στον k -οστό δακτύλιο είναι φραγμένη από κάτω με $\sqrt{3}k/2$ και από πάνω με k . Ο δακτύλιος k περιέχει $6k$ κόμβους.

και για $m \rightarrow \infty$

$$6\zeta(\alpha - 1) < I < 6 \left(1 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^\alpha (\zeta(\alpha - 1) - 1) \right). \quad (2.19)$$

2.4 Διακοπή λειτουργίας

Όπως ήδη προαναφέρθηκε στην παράγραφο 1.2.2, η διακοπή λειτουργίας για εξασθένιση Rayleigh προκύπτει άμεσα από το μετασχηματισμό Laplace. Συνεπώς, σε όλες τις περιπτώσεις όπου χρησιμοποιείται μετασχηματισμός Laplace, λαμβάνουμε την (χωρίς θόρυβο) πιθανότητα επιτυχίας απλά με την αντικατάσταση του s από το κατώτατο όριο θ του $SINR$. Ο παράγοντας θορύβου είναι $p_s^W = \exp(-\theta W/(Pl(r)))$, όπου P είναι η ισχύς μετάδοσης του πομπού και r είναι η απόσταση της σύνδεσης. Έτσι ο παράγοντας παρεμβολής p_s^I καθίσταται κρισιμότερος, και για απλούστευση από εδώ και στο εξής απαλείφουμε τον εκθετικό όρο I στο p_s^I .

Σαν λογικό έλεγχο, αρχικά θεωρούμε τη γενική αιτιοκρατική περίπτωση της (2.3) και παίρνουμε το όριο $\theta \rightarrow \infty$. Παίρνουμε λοιπόν $\lim_{\theta \rightarrow \infty} p_s(\theta) = (1-p)^n$, όπως είναι αναμενόμενο, δεδομένου ότι μια μετάδοση μπορεί να πετύχει μόνον εάν δεν υπάρχει κανένας ενεργός παρεμβολέας (interferer).

2.4.1 ALOHA στα μονοδιάστατα δίκτυα γραμμών

Οι πιθανότητες επιτυχίας για ALOHA για τα μονόπλευρα δίκτυα γραμμών δίνονται από τους αντίστοιχους μετασχηματισμούς Laplace. Από την (2.5) έχουμε ότι, για $\alpha = 2$,

$$p_s(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1-p}} \cdot \frac{\sinh(\pi\sqrt{\theta(1-p)})}{\sinh(\pi\sqrt{\theta})}, \quad (2.20)$$

και για $\alpha=4$ έχουμε από την (2.8), τον παρακάτω τύπο:

$$p_s(\theta) = \frac{\cosh^2(\sigma(1-p)^{1/4}) - \cos^2(\sigma(1-p)^{1/4})}{\sqrt{1-p}(\cosh^2\sigma - \cos^2\sigma)}, \quad (2.21)$$

όπου

$$\sigma \triangleq \pi\theta^{1/4}/\sqrt{2}.$$

2.4.2 TDMA στα μονοδιάστατα δίκτυα γραμμών

Εδώ υποθέτουμε ότι οι παρεμβολείς σχεδιάζονται με βάση ένα σύστημα m-phase TDMA. Σε ένα μονόπλευρο δίκτυο γραμμών, αυτό σημαίνει ότι κόμβοι $1, 1 + m, 1 + 2m, \dots$ μεταδίδουν μέσα από την χρονοθυρίδα 1, οι κόμβοι $2, 2 + m, 2 + 2m, \dots$ από την χρονοθυρίδα 2, και ούτω καθ' εξής, μέχρι που στην m χρονοθυρίδα μεταδίδουν οι κόμβοι mN τον αριθμό. Κατόπιν, το πρώτο σύνολο κόμβων αναμεταδίδει. Εάν ιδωθεί η όλη διαδικασία από τη σκοπιά της παρεμβολής, το δίκτυο εξαπλώνεται κατά έναν παράγοντα m , και η παρεμβολή για κάθε κόμβο είναι τώρα ίση με $\sum_{i=1}^{\infty} \ell(mi)$ αντί για $\sum_{i=1}^{\infty} \ell(i)$.

Συνεπάγεται ότι για το μοντέλο απώλειας διάδοσης με κατανομή "Power Law" όλες οι εκθετικές δυνάμεις μειώνονται κατά m^{α} . Αλλά αυτό όμως ισοδυναμεί με τη μείωση του κατώτατου ορίου θ του SIR κατά τον ίδιο παράγοντα. Άρα, μπορούμε απλά να πάρουμε τους μετασχηματισμούς Laplace για $p=1$, από τις (2.6) και (2.9), και να αντικαταστήσουμε το s με το $\theta m^{-\alpha}$ αντί με το θ για να εξάγουμε τις πιθανότητες επιτυχίας του συστήματος TDMA.

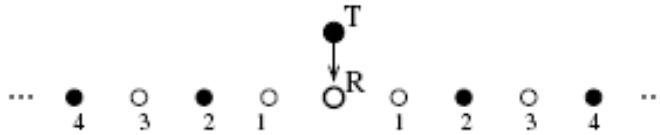
Όταν $\alpha = 2$, λαμβάνουμε από την (2.6)

$$p_s(\theta) = \frac{\sigma}{\sinh \sigma}, \quad \text{where } \sigma \triangleq \frac{\pi\sqrt{\theta}}{m}, \quad (2.22)$$

και όταν $\alpha = 4$, τότε από την (2.9) έχουμε

$$p_s(\theta) = \frac{2\sigma^2}{\cosh^2 \sigma - \cos^2 \sigma}, \quad \text{where } \sigma \triangleq \frac{\pi\theta^{1/4}}{\sqrt{2}m}. \quad (2.23)$$

Επειδή η παράμετρος θ υπεισέρχεται σε αυτές τις εκφράσεις μόνο μέσω του όρου $\theta^{1/\alpha}$ και το σύστημα m-phase TDMA μειώνει το κατώτατο όριο κατά m^{α} , οι εκθετικοί όροι για m αναιρούνται και η παράμετρος σ είναι τώρα αντιστρόφως ανάλογη με το m .



Σχήμα 2.5 Διάταξη κόμβων δικτύων γραμμών για τους οποίους οι πιθανότητες επιτυχίας στην διπλής όψης περίπτωση είναι τα τετράγωνα των πιθανοτήτων επιτυχίας στη μονής όψης περίπτωση. Ο δέκτης τοποθετείται στο σημείο εκκίνησης, και ο επιθυμητός πομπός βρίσκεται σε απόσταση μιας ακεραίας μονάδας μέτρησης. Οι σκιασμένοι κόμβοι είναι αυτοί που μεταδίδουν μέσα από άρτιες χρονοθυρίδες ενός δυφασικού καναλιού TDMA.

2.4.3 Αμφίπλευρα δίκτυα γραμμών

Οι μετασχηματισμοί Laplace και οι πιθανότητες επιτυχίας που έχουμε παραγάγει, ως τώρα, είναι για τα μονοδιάστατα δίκτυα γραμμών. Εάν οι αποστάσεις προς τους παρεμβολείς (interferers) είναι συμμετρικές, τότε οι πιθανότητες επιτυχίας μπορούν απλά να υψωθούν στο τετράγωνο για να δώσουν αντίστοιχα αποτελέσματα για τα αμφίπλευρα (two-sided) δίκτυα γραμμών. Αυτό άλλωστε φαίνεται ξεκάθαρα, για παράδειγμα, από τη διάταξη στο Σχήμα 2.5.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Παρεμβολή στα δίκτυα Poisson

Σε αυτό το κεφάλαιο εστιάζουμε στα δίκτυα των οποίων οι κόμβοι κατανέμονται ως μια ομοιογενής σημειακή διαδικασία Poisson (PPP). Μεταξύ όλων των στοχαστικών προτύπων κατανομής κόμβων, η PPP και η συσχετισμένη με αυτήν δυωνυμική διαδικασία, όπου σύμφωνα με την Poisson υπόθεση ένας σταθερός αριθμός κόμβων είναι ομοιόμορφα τυχαία τοποθετημένοι μέσα σε μια καθορισμένη περιοχή, είναι οι πλέον δημοφιλέστερες. Χρησιμοποιούνται στις περισσότερες (πάνω από το 95% ίσως και το 99% από αυτές) αναλυτικές εργασίες για τον χαρακτηρισμό των ασύρματων δικτύων. Η υπόθεση της γνήσια τυχαίας χωρικής κατανομής ή της ανεξαρτησίας καθιστά την PPP την ευκολότερη από αναλυτικής άποψης. Σε πρακτικές εφαρμογές η διαδικασία PPP εφαρμόζεται όταν μεγάλοι αριθμοί κόμβων ρίπτονται από αεροσκάφη (εφαρμογή στα δίκτυα αισθητήρων) ή όταν κινούνται οι κόμβοι ανεξάρτητα και ομοιόμορφα σε μια καθορισμένη περιοχή.

Ενώ ο χαρακτηρισμός παρεμβολής στα μεγάλα ασύρματα συστήματα είναι σχετικά νέο θέμα, ένας παρόμοιος τύπος θορύβου, ο αποκαλούμενος *θόρυβος βολής (shot noise)*, έχει αποτελέσει το αντικείμενο έρευνας για περισσότερο από έναν αιώνα. Εξετάζουμε πρώτα τις ομοιότητες μεταξύ του θορύβου βολής και της παρεμβολής σε ασύρματα και κινητά δίκτυα, ώστε να γίνει καλύτερα κατανοητό για ποιο λόγο εφαρμόζεται η κατανομή Poisson στην προκειμένη περίπτωση.

3.1 Θόρυβος βολής

Εάν οι κόμβοι στο δίκτυο κατανέμονται σύμφωνα με μία σημειακή στοχαστική διαδικασία, η διαδικασία παρεμβολής της (1.1) μπορεί να αντιμετωπισθεί σαν τυχαίο πεδίο ή πιο συγκεκριμένα, ως *διαδικασία θορύβου βολής*. Σε μία διάσταση, μια βασική διαδικασία θορύβου βολής περιγράφεται όπως

$$I(t) = \sum_{i=1}^{\infty} g(t - x_i) = \sum_{x \in \Phi} g(t - x), \quad (3.1)$$

όπου $\Phi = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ είναι μια στάσιμη διαδικασία Poisson στο χώρο P και η $g(x)$ είναι η κρουστική απόκριση. Παραδοσιακά, ο θόρυβος βολής είναι ορισμένος στο χρόνο, δηλαδή τα σημεία της PPP είναι χρονικές στιγμές. Για να μοντελοποιήσουμε την παρεμβολή σε (μονοδιάστατο) ασύρματο δίκτυο, αντικαθιστάμε τον άξονα στο χρόνο με τον άξονα στο χώρο και την κρουστική απόκριση $g(x)$ με τις απώλειες διαδρομής $l(\|x\|)$. Αυτή η χωρική κρουστική απόκριση είναι αμφίπλευρη και άρτια, επειδή τα σήματα των ασύρματων δικτύων υποτίθεται ότι διαδίδονται εξίσου και στις δύο κατευθύνσεις. Συνεπώς, η (3.1) εκφράζει την παρεμβολή σε ένα μονοδιάστατο δίκτυο του οποίου οι ενεργοί κόμβοι κατανέμονται ως μια διαδικασία Poisson, με μοναδιαία τιμή ισχύος και μηδενική εξασθένιση.

Μια γενικευμένη διαδικασία θορύβου βολής επιτρέπει την ενσωμάτωση μίας στοχαστικής κρουστικής απόκρισης και πολλών διαστάσεων στοχαστικές διαδικασίες. Με άλλα λόγια, έχουμε

$$I(y) = \sum_{x \in \Phi} K_x g(y - x), \quad (3.2)$$

όπου οι συντελεστές K_x είναι i.i.d. τυχαίες μεταβλητές που χρησιμοποιούνται να μοντελοποιήσουν την εξασθένιση. Αν θέσουμε $Kg(x) = h\ell(\|x\|)$ τότε η (1.1) είναι μία ειδική περίπτωση της (3.2).

Σημειώνεται εδώ ότι οι διαδικασίες θορύβου βολής έχουν μελετηθεί από τον Campbell το 1909 [6,7], που περιέγραψε το μέσο όρο και τη διασπορά τους, κατόπιν από τον Schottky το 1918 [41], που τις περιέγραψε με πιο πλήρη στατιστικό τρόπο, καθώς επίσης και από τον Rice [39]. Πιο πρόσφατα, οι Gilbert και Pollak [15] διερεύνησαν αναλυτικά την κατανομή του. Αφού οι απώλειες διαδρομής $\ell(\cdot)$ έχουν κατανομή “Power Law”, συνεπάγεται ότι η κατανομή “Power Law” του θορύβου βολής είναι η πιο σχετική στα πλαίσια της στατιστικής μοντελοποίησης των ασύρματων δικτύων. Αυτή η εκδοχή διερευνήθηκε από τους Lowen και Teich το 1990 [32]. Ειδικότερα, έδειξαν ότι η συγκεκριμένη εκδοχή δεν συγκλίνει σε μια κανονική κατανομή καθώς η ισχύς της σημειακής διαδικασίας αυξάνεται, σε αντίθεση με την εκθετικά φθίνουσα κρουστική απόκριση. Οι Heinrich και Schmidt μελέτησαν λεπτομερώς τη μεθοδολογία σύγκλισης της διαδικασίας του θορύβου βολής προς την κανονική κατανομή στο [25].

3.2 Κατανομή παρεμβολής

Σε αυτή την ενότητα περιγράφουμε τη συνολική ισχύ της παρεμβολής που δίνεται από

$$I = I(o) \triangleq \sum_{x \in \Phi} h_x \ell(\|x\|), \quad (3.3)$$

όπου Φ είναι μια σημειακή διαδικασία των παρεμβολών στο χώρο \mathbb{P}^d . Στην περίπτωση μιας ομοιόμορφης (ή ομοιογενούς) PPP, δεν παίζει ρόλο που μετريέται η παρεμβολή λόγω του θεωρήματος Slivnyak και άρα θα μπορούσε ακόμη και να έχει μετρηθεί σε ένα σημείο της ίδιας της διαδικασίας εφ' όσον δεν λαμβάνεται υπόψη η συνεισφορά από εκείνο το σημείο μέτρησης στο I . Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις, όμως, παίζει ρόλο επειδή η παρεμβολή που παρατηρείται από ένα οποιοδήποτε σημείο της διαδικασίας, διαφέρει από την παρεμβολή που παρατηρείται από ένα αυθαίρετο σημείο του επιπέδου.

Στην περίπτωση της πρόσβασης καναλιών, το πρωτόκολλο ALOHA είναι μια λογική αντιστοιχία για τη διαδικασία PPP, επειδή το ALOHA έχει τις ίδιες στατιστικές ιδιότητες με τη PPP. Εάν, δηλαδή, όλοι οι κόμβοι διαμορφώσουν μια PPP έντασης λ και μεταδώσουν ανεξάρτητα με πιθανότητα p , το σύνολο των ενεργών πομπών διαμορφώνει μια άλλη PPP έντασης $p\lambda$. Αυτό ακολουθεί την ιδιότητα της (ανεξάρτητης) αραιώσης της PPP. Αυτό υπονοεί ότι εάν η $I(\lambda)$ είναι η παρεμβολή σε ένα PPP και λ η ένταση όπου όλοι οι κόμβοι είναι ενεργοί, τότε η $I(p\lambda)$ είναι η παρεμβολή στο ίδιο δίκτυο όταν χρησιμοποιείται το ALOHA με πιθανότητα p . Περαιτέρω, λόγω της ιδιότητας υπέρθεσης της PPP, η παρεμβολή είναι ανάλογη του λ , ή του $p \times \lambda$.

3.2.1 Μέση τιμή παρεμβολής

Από το θεώρημα Campbell (γνωστό από τη θεωρία τηλεπικοινωνιακών συστημάτων), έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(I) &= \sum_{x \in \Phi} h_x \ell(\|x\|) = \lambda \mathbb{E}(h) \int_{\mathbb{R}^d} \ell(\|x\|) dx \\ &= \lambda c_d \int_0^\infty \ell(r) r^{d-1} dr,\end{aligned}$$

όπου $c_d = |b(o,1)|$ είναι ο όγκος της d - διάστατης μοναδιαίας σφαίρας. Η εξασθένιση της κατανομής δεν λαμβάνεται υπόψη, εφόσον $\mathbb{E}(h) = 1$. Για $\ell(r) = r^{-\alpha}$,

$$\mathbb{E}(I) = \lambda c_d \int_0^\infty r^{d-\alpha-1} = \frac{\lambda c_d}{d-\alpha} r^{d-\alpha} \Big|_0^\infty. \quad (3.4)$$

Το ολοκλήρωμα αποκλίνει για $\alpha < d$ λόγω του άνω ορίου ολοκλήρωσης, δηλαδή της συσσωρευμένης παρεμβολής από το μεγάλο αριθμό κόμβων απόστασης. Για $\alpha > d$, αυτό αποκλίνει λόγω του κάτω ορίου, το οποίο είναι συνέπεια των απωλειών διαδρομής και της ιδιότητας της PPP ότι οι κόμβοι μπορούν να είναι αυθαίρετα πολύ κοντά ο ένας στον άλλον. Για $\alpha = d$, και τα δύο όρια προκαλούν προβλήματα.

Για τα πεπερασμένα δίκτυα, η $\alpha < d$ εγγυάται πεπερασμένη μέση τιμή, αλλά στην περίπτωση μη πεπερασμένων δικτύων απειρίζεται ο μέσος όρος της (3.4). Αφ' ετέρου, για $\alpha > d$, η παρεμβολή είναι πεπερασμένη ακόμη και για τα άπειρα δίκτυα όπου ο μετασχηματισμός Laplace είναι εύκολο να υπολογισθεί.

Στην πράξη όμως, οι απώλειες διαδρομής είναι φραγμένες, και οι οποίες μοντελοποιούνται συνήθως από $\ell(r) = \min(1, r^{-\alpha})$. Σε αυτήν την περίπτωση, ο μέσος όρος είναι πεπερασμένος για $\alpha > d$. Για πεπερασμένα δισδιάστατα δίκτυα ακτίνας $\rho > 1$,

$$\mathbb{E}(I_\rho) = \lambda \left(\pi + \frac{2\pi}{\alpha-2} (1 - \rho^{2-\alpha}) \right).$$

Αυτός ο απλός υπολογισμός δίνει κάποια ένδειξη για το πόσο μεγάλη πρέπει να επιλεγεί σε μια προσομοίωση η περιοχή κάλυψης δικτύων, ιδιαίτερα όταν διερευνάται η συμπεριφορά μη πεπερασμένων δικτύων. Εάν η μέση παρεμβολή στην περιοχή προσομοίωσης (εξωτερική ακτίνα 1) θα πρέπει να ταιριάζει με το θεωρητικό μέσο όρο σε ένα άπειρο δίκτυο μέχρι έναν παράγοντα $1-\epsilon$, θα πρέπει να έχουμε

$$1 - \rho^{2-\alpha} > 1 - \epsilon \implies \rho > \epsilon^{-1/(\alpha-2)}. \quad (3.5)$$

Παραδείγματος χάριν, εάν $\varepsilon = 10^{-3}$ και $\alpha = 2,5$, η ακτίνα πρέπει να είναι τουλάχιστον 10^6 . Για τις τιμές της α μικρότερες από 2,1, το δίκτυο μπορεί με μεγάλη δυσκολία να προσομοιωθεί με ακριβή τρόπο. Αντίθετα, για $\alpha = 4$, μια ακτίνα 32 μονάδων είναι ικανοποιητική για να έχουμε ακρίβεια με απόκλιση μόνο 0,1%. Περισσότερες λεπτομέρειες για την πολυπλοκότητα της προσομοίωσης σημειακών διαδικασιών PPP μπορούμε να βρούμε στο [50]. Η συγκεκριμένη εργασία περιγράφει επίσης πώς θα πρέπει να προσθέσουμε έναν διορθωτικό όρο στην παρεμβολή εάν η περιοχή προσομοίωσης δεν μπορεί να επιλεγεί αρκετά μεγάλη ώστε να δώσει την επιθυμητή ακρίβεια.

3.2.2 Κατανομή παρεμβολής χωρίς εξασθένιση

Σε αυτήν την υποενότητα εστιάζουμε στην περίπτωση των δισδιάστατων δικτύων και υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει καμία εξασθένιση, δηλαδή ότι $h_x \equiv 1$ στην (3.3). Στόχος μας είναι να βρούμε τη χαρακτηριστική συνάρτηση της παρεμβολής και από εκεί, εάν είναι δυνατόν, την κατανομή της. Ακολουθούμε μια βασική, αλλά πολύ χρήσιμη, τεχνική που έχει ήδη δοκιμαστεί επιτυχώς στην εργασία [43]. Αυτή αποτελείται από δύο βήματα:

1. Θεωρούμε πρώτα ένα πεπερασμένο δίκτυο, για παράδειγμα ένα δίσκο ακτίνας « a » με κέντρο την αρχή των αξόνων με την προϋπόθεση να έχει ένα σταθερό αριθμό από κόμβους σε αυτήν την πεπερασμένη περιοχή. Οι θέσεις των κόμβων είναι i.i.d.

2. Έπειτα επαναπροσδιορίζουμε τον αριθμό (με κατανομή Poisson) των κόμβων και αφήνουμε την ακτίνα δίσκων να τείνει προς το άπειρο.

Βήμα 1. Εξετάζουμε την παρεμβολή από τους κόμβους που βρίσκονται μέσα στην απόσταση a από το σημείο εκκίνησης:

$$I_a = \sum_{x \in \Phi \cap b(o, a)} \ell(\|x\|). \quad (3.6)$$

Όσον αφορά το στατιστικό νόμο για τις απώλειες διαδρομής $\ell(x)$, υποθέτουμε ότι είναι αυστηρά μονοτονικά φθίνουσα (αντιστρέψιμη) και το $\lim_{x \rightarrow \infty} \ell(x) = 0$. Στο όριο $a \rightarrow \infty$, $I_a = I$. Ορίζουμε κατόπιν την F_{I_a} που είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση (μετασχηματισμός Fourier) του I_a . Με άλλα λόγια,

$$\mathcal{F}_{I_a}(\omega) \triangleq \mathbf{E}(e^{j\omega I_a}). \quad (3.7)$$

Η παραπάνω εξίσωση, όταν πάρουμε τη μέση τιμή της ως προς τον αριθμό των κόμβων μέσα σε ένα κύκλο με ακτίνα a , γίνεται

$$\mathcal{F}_{I_a}(\omega) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(e^{j\omega I_a} \mid \Phi(b(o, a)) = k)). \quad (3.8)$$

Δεδομένου ότι υπάρχουν σημεία k στον κύκλο $b(o, a)$, αυτά τα σημεία είναι i.i.d. ομοιόμορφα κατανομημένα μέσα σε κύκλο με ακτινική πυκνότητα:

$$f_R(r) = \begin{cases} \frac{2r}{a^2} & \text{if } 0 \leq r \leq a \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (3.9)$$

και η χαρακτηριστική συνάρτηση δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$\mathbb{E}(e^{j\omega I_a} | \Phi(b(o, a)) = k) = \left(\int_0^a \frac{2r}{a^2} \exp(j\omega \ell(r)) dr \right)^k. \quad (3.10)$$

Βήμα 2. Η πιθανότητα εύρεσης των κόμβων k μέσα στον κύκλο $b(o, a)$ δίνεται από την κατανομή Poisson, και άρα παίρνουμε:

$$\mathcal{F}_{I_a}(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\exp(-\lambda\pi a^2) (\lambda\pi a^2)^k}{k!} \mathbb{E}(e^{j\omega I_a} | \Phi(b(o, a)) = k). \quad (3.11)$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση την (3.10), αθροίζοντας ως προς k , και κατόπιν γράφοντας το άθροισμα ως ένα ανάπτυγμα Taylor, παίρνουμε τελικά

$$\mathcal{F}_{I_a}(\omega) = \exp \left(\lambda\pi a^2 \left(-1 + \int_0^a \frac{2r}{a^2} \exp(j\omega \ell(r)) dr \right) \right). \quad (3.12)$$

Ολοκληρώνοντας σύμφωνα με τους κανόνες του λογισμού και κάνοντας την αντικατάσταση σύμφωνα με το σχήμα $r \rightarrow \ell^{-1}(x)$, όπου ℓ^{-1} είναι η αντίστροφος του ℓ , και αφήνοντας την $a \rightarrow \infty$ παίρνουμε το δεξιό μέρος της παρακάτω εξίσωσης:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} a^2 \left(-1 + \int_0^a \frac{2r}{a^2} \exp(j\omega \ell(r)) dr \right) = \int_0^{\infty} (\ell^{-1}(x))^2 j\omega e^{j\omega x} dx,$$

έτσι ώστε

$$\mathcal{F}_I(\omega) = \exp \left(j\lambda\pi\omega \int_0^{\infty} (\ell^{-1}(x))^2 e^{j\omega x} dx \right). \quad (3.13)$$

Για να πάρουμε πιο συγκεκριμένα αποτελέσματα, πρέπει να διευκρινίσουμε το στατιστικό νόμο για τις απώλειες διαδρομής. Για τον τυποποιημένο στατιστικό νόμο ισχύος $\ell(r) = r^\alpha$, λαμβάνουμε

$$\mathcal{F}_I(\omega) = \exp \left(j\lambda\pi\omega \int_0^{\infty} x^{-2/\alpha} e^{j\omega x} dx \right). \quad (3.14)$$

Για $a \leq 2$, το ολοκλήρωμα που αποκλίνει, δείχνοντας ότι η παρεμβολή είναι άπειρη κατά μέτρο. Για $a > 2$,

$$\mathcal{F}_I(\omega) = \exp \left(-\lambda\pi\Gamma(1 - 2/\alpha)\omega^{2/\alpha} e^{-j\pi/\alpha} \right), \quad \omega \geq 0. \quad (3.15)$$

Οι τιμές για αρνητικό ω καθορίζονται από τη συμμετρία $F_I(-\omega) = F_I(\omega)$.
Για $\alpha = 4$,

$$\mathcal{F}_I(\omega) = \exp\left(-\lambda\pi^{3/2}\exp(-j\pi/4)\sqrt{\omega}\right). \quad (3.16)$$

Αυτή η περίπτωση είναι ιδιαίτερου ενδιαφέροντος, δεδομένου ότι είναι μοναδική όπου μία κλειστής μορφής έκφραση υπάρχει για την πυκνότητα:

$$f_I(x) = \frac{\pi\lambda}{2x^{3/2}}\exp\left(-\frac{\pi^3\lambda^2}{4x}\right). \quad (3.17)$$

Η παραπάνω κατανομή ονομάζεται κατανομή Levy, η οποία μπορεί επίσης να ιδωθεί ως μια αντίστροφη κατανομή gamma, ή ως αντίστροφη Gaussian κατανομή με άπειρο μέσο όρο. Για άλλες τιμές του α , οι πυκνότητες μπορούν να εκφραστούν σαν μια άπειρη σειρά [43, εξίσωση (22)].

Η χαρακτηριστική συνάρτηση (3.15) δείχνει ότι η κατανομή παρεμβολής είναι μια σταθερή κατανομή με χαρακτηριστικό εκθέτη $2/\alpha < 1$, μηδενική μέση τιμή, παράμετρο κύρτωσης $\beta = 1$, και διασπορά $\lambda\pi\Gamma(1-2/\alpha)\cos(\pi/\alpha)$. Ο αντίστοιχος μετασχηματισμός Laplace είναι

$$\mathcal{L}_I(s) = \exp(-\lambda\pi\Gamma(1-2/\alpha)s^{2/\alpha}). \quad (3.18)$$

Οι σταθερές κατανομές με χαρακτηριστικούς εκθέτες μικρότερο από ένα δεν έχουν πεπερασμένες ροπές. Ειδικότερα, η μέση παρεμβολή αποκλίνει, το οποίο οφείλεται στην ιδιομορφία των απωλειών διαδρομής στο σημείο εκκίνησης. Αυτό προκύπτει επίσης από το γεγονός ότι

$$\mathbf{E}(I) = -\frac{d}{ds}\log(\mathcal{L}_I(s))\Big|_{s=0} = \lim_{s \rightarrow \infty} cs^{2/\alpha-1} = \infty.$$

Στην πραγματικότητα, ακόμα και όταν μόνο ο κοντινότερος παρεμβολέας, σε απόσταση R_1 , εξετάζεται, είναι πιθανό η $\mathbf{E}(I)$ να μην έχει πεπερασμένη τιμή. Για παράδειγμα, όταν $\alpha \geq 2$,

$$\mathbf{E}(I_1) = \mathbf{E}(R_1^{-\alpha}) = \int_0^\infty 2\pi\lambda x^{1-\alpha}\exp(-\lambda x^2)dx = \infty.$$

Η μέθοδος που προϋποθέτει έναν σταθερό αριθμό κόμβων, τη χρήση της i.i.d. ιδιότητας των θέσεων κόμβων και του επαναπροσδιορισμού όσον αφορά την κατανομή Poisson ισχύει σε πολλά άλλα προβλήματα.

3.2.3 Κατανομή παρεμβολής με την εξασθένιση

Εδώ βρίσκουμε αναλυτική περιγραφή για την παρεμβολή όπως δίνεται από την (3.3) για την εξασθένιση Rayleigh. Ακολουθούμε δύο χωριστές προσεγγίσεις.

Επαναπροσδιορισμός στο καθοριστικό δίκτυο. Μια πρώτη προσέγγιση, η οποία έχει χρησιμοποιηθεί στην [33], είναι να χρησιμοποιηθεί ο μετασχηματισμός Laplace για τα δίκτυα της (2.3) και να γίνει επαναπροσδιορισμός για τις αποστάσεις κόμβων από την αρχή των αξόνων. Στη μονοδιάστατη περίπτωση, οι n μικρότερες αποστάσεις από την αρχή των αξόνων $0 \leq R_1 \leq R_2 \leq \dots \leq R_n$ δίνονται από την πολυδιάστατη κατανομή

$$f_{(R_1, \dots, R_n)}(r_1, \dots, r_n) = (2\lambda)^n \exp(-2\lambda r_n) \mathbf{1}_K(r_1, \dots, r_n),$$

όπου $K = \{(r_1, \dots, r_n) / 0 \leq r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_n\}$ είναι το διατεταγμένο υπέρ-οκταγώνο (hyperoctant) στον χώρο \mathbb{P}^n και $\mathbf{1}_K$ είναι η συνολοδείκτρια συνάρτηση (βλέπε επίσης [20, Πρόταση 2]). Ο παράγοντας δύο προκύπτει από το γεγονός ότι το δίκτυο επεκτείνεται πέρα από ολόκληρη την πραγματική γραμμή \mathbb{P} , έτσι ώστε η σημειακή διαδικασία των αποστάσεων από την αρχή των αξόνων $\{|x_i|\}$ να έχει πυκνότητα ίση με δύο.

Για $\alpha = 2$, η (2.3) γίνεται τώρα ο υπό συνθήκη μετασχηματισμός Laplace

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{I_n}^c(s) &= \mathbb{E}(\exp(-sI_n) \mid R_1 = r_1, \dots, R_n = r_n) \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{r_i^2}{r_i^2 + s}, \quad s \geq 0. \end{aligned}$$

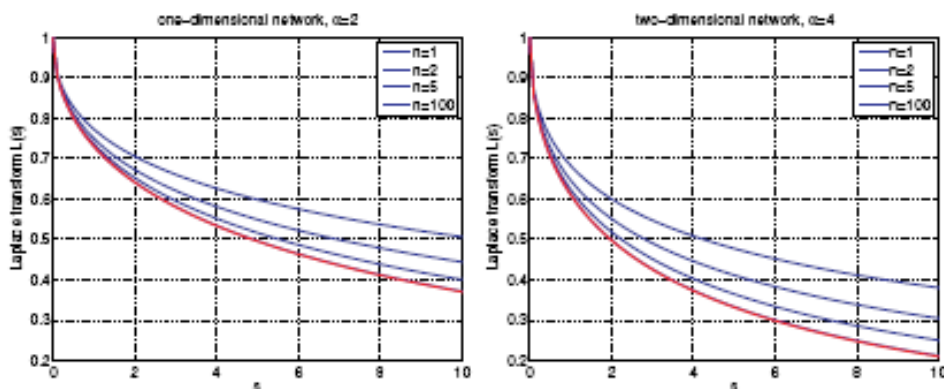
Σημειώνεται ότι ο άνω δείκτης c υποδεικνύει την κατάσταση «υπό συνθήκη». Ολοκληρώνοντας ως προς την πολυμεταβλητή πυκνότητα πιθανότητας, παίρνουμε την αδέσμευτη περίπτωση:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{I_n}(s) &= \int_K \lambda^n \exp(-2\lambda r_n) \prod_{i=1}^n \frac{r_i^2}{r_i^2 + s} dr_1 \dots dr_n \\ &= \frac{(2\lambda)^{n+1}}{n!} \int_0^\infty \exp(-2\lambda r) (r - \sqrt{s} \arctan(r/\sqrt{s}))^n dr, \quad (3.19) \end{aligned}$$

όπου η δεύτερη γραμμή λαμβάνεται χρησιμοποιώντας επαγωγή και μερική ολοκλήρωση [33]. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{L}_{I_n}(0) = 1$, και άρα μπορεί ναδειχθεί ότι το όριο $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}_{I_n}(s)$ υπάρχει για κάθε s . Έτσι, λόγω συνέχειας, η κατανομή της παρεμβολής I_∞ δεν παρουσιάζει ιδιομορφία. Ομοίως, μπορεί να αποδειχθεί ότι στη δισδιάστατη περίπτωση με $\alpha = 2$, η κατανομή παρεμβολής παρουσιάζει ιδιομορφία, δηλαδή $P(I_\infty = \infty) = 1$.

Για $\alpha = 4$ στη δισδιάστατη περίπτωση, οι τετραγωνισμένες αποστάσεις από την αρχή των αξόνων διαμορφώνουν πάλι μια ομοιογενή PPP, αυτή τη φορά έντασης $\lambda x \pi$.

Έτσι αλλάζοντας το 2λ σε $\pi\lambda$ στην (3.19), λαμβάνουμε το μετασχηματισμό Laplace από την παρεμβολή που προκαλείται από τους πρώτους n παρεμβολείς μέσα σε διδιάστατο δίκτυο για $\alpha = 4$. Το Σχήμα 3.1 παρουσιάζει τους μετασχηματισμούς Laplace για μονοδιάστατες και διδιάστατες περιπτώσεις. Μπορεί να φανεί ότι οι μετασχηματισμοί συγκλίνουν γρήγορα.



Σχήμα 3.1 Μετασχηματισμός Laplace $L_n(s)$ για τη μονοδιάστατη (αριστερά) και διδιάστατη (δεξιά) περίπτωση με $n = 1, 2, 5, 100$. (Η καμπύλη για $n = 1$ είναι η πρώτη από πάνω καμπύλη.)

Ενώ τα παραπάνω αποτελέσματα είναι χρήσιμα, δεν είναι δυστυχώς κλειστής μορφής. Ειδικότερα, δεν διαφαίνεται από τα αποτελέσματα ότι είναι πιθανό να βρεθεί μια αναλυτική έκφραση για τον οριακό μετασχηματισμό Laplace δηλαδή όταν $n \rightarrow \infty$ στην (3.19). Κατά συνέπεια θα ακολουθήσουμε μια διαφορετική προσέγγιση για να υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Laplace της παρεμβολής μέσα σε ένα άπειρο δίκτυο.

Χρησιμοποιώντας τη ροπογεννήτρια. Όπως αναφέρθηκε στην παράγραφο 3.1, ερευνητές έχουν βρει μια αναλογία με τις διαδικασίες θορύβου βολής για να αναλύσουν τις στατιστικές ιδιότητες της $I(x)$ [26, 32, 39].

Εδώ χρησιμοποιούμε αυτήν την αναλογία για να παράγουμε το μετασχηματισμό Laplace για την παρεμβολή. Πρώτα μετασχηματίζουμε τη d - διάστατη διαδικασία PPP επάνω στο \mathbb{R}^+ ορίζοντας $\Phi = \{r_i = \|x_i\|\}$ να είναι οι αποστάσεις των σημείων της d - διδιάστατης ομοιόμορφης PPP με ένταση λ . Σύμφωνα με το θεώρημα μετασχηματισμού (βλέπε επίσης την [30]), η Φ είναι ανομοιογενής PPP με ένταση $\lambda'(r) = \lambda c_d dr^{d-1}$, όπου $c_d = |b(0,1)|$ είναι ο όγκος της d - διάστατης σφαίρας με ακτίνα 1. Εκλαμβάνοντας την παρεμβολή ως διαδικασία θορύβου βολής (3.1), ορίζουμε αντίστοιχα το νόμο απωλειών διαδρομής $\ell(r) = hr^{-\alpha}$ για i.i.d. h μέσω της κρουστικής απόκρισης της διαδικασίας θορύβου βολής. Τώρα υπολογίζουμε το μετασχηματισμό Laplace

$$\mathcal{L}_I(s) \triangleq \mathbf{E}[e^{-sI}] = \mathbf{E} \left[\exp \left(-s \sum_{r \in \Phi} h_r r^{-\alpha} \right) \right]$$

της παρεμβολής. Η αναμενόμενη τιμή πρόκειται να ληφθεί για τη σημειακή διαδικασία, αλλά και για την εξασθένιση. Λόγω της ανεξαρτησίας της εξασθένισης, έχουμε

$$\mathcal{L}_I(s) = \mathbf{E}_{\Phi} \left[\prod_{r \in \Phi} \mathbf{E}_h [\exp(-sh_r r^{-\alpha})] \right].$$

Η παραπάνω έκφραση μας δίνει τη ροπογεννήτρια συνάρτηση με $u(r) = \mathbf{E} \exp(-sh_r r^{-\alpha})$, και συνεπώς έχουμε

$$\mathcal{L}_I(s) = \exp \left\{ - \underbrace{\mathbf{E}_h \left(\int_0^{\infty} (1 - \exp(-shr^{-\alpha})) \lambda'(r) dr \right)}_A \right\},$$

όπου αντιστρέψαμε την ολοκλήρωση και τη στατιστική μέση τιμή. Πρώτα υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα:

$$\begin{aligned} A &= \lambda c_d \int_0^{\infty} (1 - \exp(-shr^{-\alpha})) dr^{d-1} dr \\ &= \lambda c_d \int_0^{\infty} (1 - \exp(-shr^{-1/\delta})) dr \quad (\text{subst. } r \leftarrow r^d) \\ &= \lambda c_d \int_0^{\infty} (1 - \exp(-sh/x)) \delta x^{\delta-1} dx \quad (\text{subst. } x \leftarrow r^{1/\delta}), \end{aligned}$$

όπου $\Delta = d/\alpha$. Για να υπολογίσουμε αυτό το ολοκλήρωμα, σημειώνουμε ότι η στατιστική μέση τιμή

$$\mathbf{E}[(X/sh)^{-1}]^{\delta}$$

αντιστοιχεί στην εύρεση μέσης τιμής εκθετικής τυχαίας μεταβλητής X με μέση τιμή 1. Από το $\mathbf{E}(X^p) = \Gamma(1+p)$, όπου εξ ορισμού της συνάρτησης Γάμμα,

$$\Gamma(p) \triangleq \int_0^{\infty} t^{p-1} e^{-t} dt,$$

ακολουθεί το επιθυμητό αποτέλεσμα

$$\mathbf{E}[(X/sh)^{-1}]^{\delta} = (sh)^{\delta} \Gamma(1-\delta).$$

Άρα, με $A = \lambda c_d (hs)^{\delta} \Gamma(1-\delta)$, λαμβάνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$\mathcal{L}_I(s) = \exp \left(- \lambda c_d \mathbf{E}[h^{\delta}] \Gamma(1-\delta) s^{\delta} \right). \quad (3.20)$$

Η μόνη διαφορά με την (3.18) είναι ο πρόσθετος όρος $E(h^\delta)$, ο οποίος σχετίζεται με την εξασθένιση. Όταν οι ισχύεις P_i δεν είναι μοναδιαίες, τότε η s αντικαθίσταται από την $P_i s$, δηλαδή οι ισχύεις μετάδοσης εμφανίζονται στον τύπο μετασχηματισμού Laplace μέσω ενός πρόσθετου παράγοντα P_i^δ που βρίσκεται στο όρισμα του εκθετικού όρου. Σημειώνουμε ότι η (3.20) ισχύει μόνο για $\delta < 1$. Συνεπώς,

• Για $\alpha \leq \delta$, έχουμε $I = \infty$. Αυτό είναι μια συνέπεια συσσωρευμένης παρεμβολής από τους πολλούς μακρινούς πομπούς των οποίων οι ισχύεις σημάτων δεν φθίνουν αρκετά γρήγορα ώστε να κρατήσουν την ισχύ της παρεμβολής πεπερασμένη. Για ένα πεπερασμένο δίκτυο, η παρεμβολή θα πρέπει να είναι πεπερασμένη.

• Για $\alpha > \delta$ έχουμε $I < \infty$, αλλά $E(I) = \infty$ λόγω της ιδιομορφίας του νόμου απωλειών διαδρομής. Ακόμα κι αν εξετάζουμε μόνο τον κοντινότερο παρεμβολέα, ο όρος $E(I)$ είναι άπειρος. Εάν ο νόμος απώλειας που χρησιμοποιείται έχει φραγμένες συνολοσυναρτήσεις, τότε όλες οι ροπές είναι πεπερασμένες.

Στην περίπτωση της εξασθένισης Rayleigh, $E(h^\delta) = \Gamma(1 + \delta)$, και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες από τη συνάρτηση Γάμμα, επιτυγχάνουμε το παρακάτω κλειστής μορφής αποτέλεσμα

$$\mathcal{L}_I(s) = \exp\left(-\lambda c_d s^\delta \frac{\pi^\delta}{\sin(\pi\delta)}\right). \quad (3.21)$$

Όπως και στην περίπτωση που δεν παρατηρείται εξασθένιση, η παρεμβολή έχει μια σταθερή κατανομή με χαρακτηριστικό εκθέτη δ , μέση τιμή 0, και παράμετρο κύρτωσης $\beta = 1$. Η διασπορά δε είναι ίση με $\lambda c_d E(h)^\delta \Gamma(1-\delta) \cos(\delta\pi/2)$.

Όπως άλλωστε είναι εμφανές και από την (3.17), για $\delta = 1/2$, οι κατανομές PDF και CDF ορίζονται. Όταν $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$, η Levy PDF είναι στη δισδιάστατη περίπτωση ($\alpha = 4$) ίση με

$$f_I(x) = \frac{\lambda}{4} \left(\frac{\pi}{x}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\pi^4 \lambda^2}{16x}\right), \quad (3.22)$$

και η CDF, αντίστοιχα, είναι

$$F_I(x) = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\pi^2 \lambda}{4\sqrt{x}}\right), \quad (3.23)$$

όπου η συνάρτηση $\operatorname{erf}(x) = 2 \int_0^x \exp(-t^2) dt / \sqrt{\pi}$ είναι γνωστή ως συνάρτηση σφάλματος.

Για άλλες τιμές της δ , η πυκνότητα πιθανότητας της παρεμβολής μπορεί να εκφραστεί όπως στην [32]:

$$f_I(x) = \frac{1}{\pi x} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1} \Gamma(1 + i\delta) \sin(\pi i \delta)}{i!} \cdot \left(\frac{\lambda c_d \Gamma(1 - \delta) \mathbf{E}(h^\delta)}{x^\delta}\right)^i. \quad (3.24)$$

Από αυτήν την σειρά είναι προφανές ότι όταν $x \rightarrow \infty$, ο όρος $i = 1$ γίνεται κυρίαρχος, και συνεπώς

$$\begin{aligned} f_I(x) &\sim \frac{1}{\pi x^{\delta+1}} \lambda c_d \underbrace{\Gamma(1+\delta)\Gamma(1-\delta)\sin(\pi\delta)}_{\pi\delta} \mathbf{E}(h^\delta) \\ &\sim \lambda c_d \delta \mathbf{E}(h^\delta) x^{-(1+\delta)}, \quad x \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Στην περίπτωση όπου δεν παρατηρείται εξασθένιση, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την κατανομή των αποστάσεων για τους n -οστούς κοντινότερους γείτονες ώστε να γενικεύσουμε αυτό το αποτέλεσμα ως προς τη συμπεριφορά της ουράς της πιθανότητας του n -οστού παρεμβολέα. Η CCDF της απόστασης μέχρι τον n -οστό κοντινότερο γείτονα R_n είναι [19]:

$$\mathbb{P}(R_n > r) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda c_d r^{-\delta})^k}{k!} \exp(-\lambda c_d r^{-\delta}) = \frac{\Gamma(n, \lambda c_d r^{-\delta})}{\Gamma(n)},$$

όπου $\Gamma(\cdot, \cdot)$ είναι η ανώτερη ελλιπής συνάρτηση Γάμμα. Άρα, όταν $I_n = R_n^{-\alpha}$,

$$\mathbb{P}(I_n < x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda c_d x^{-\delta})^k}{k!} \exp(-\lambda c_d x^{-\delta}) = \frac{\Gamma(n, \lambda c_d x^{-\delta})}{\Gamma(n)}. \quad (3.26)$$

Για να εκφράσουμε την ουρά της πιθανότητας αναλυτικά, χρειαζόμαστε τη συνάρτηση CCDF, η οποία υπολογίζεται από την (3.26) θέτοντας τα όρια του αθροίσματος από n μέχρι και ∞ . Όταν $x \rightarrow \infty$, ο κυρίαρχος όρος είναι αυτός που υπολογίζεται για $k = n$, και επειδή $\exp(-x^{-\delta}) \sim 1 - x^{-\delta}$, παίρνουμε τελικά

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(I_n > x) &\sim (1 - \lambda c_d x^{-\delta}) \frac{(\lambda c_d x^{-\delta})^n}{n!} \\ &\sim \frac{1}{n!} (\lambda c_d)^n x^{-n\delta}, \quad x \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Αν θέσουμε $n = 1$ στην (3.27) και κατόπιν υπολογίσουμε την πρώτη παράγωγο, εύκολα επιβεβαιώνεται ότι το τελικό αποτέλεσμα είναι ίδιο με την (3.25).

Αυτά τα αποτελέσματα για την ουρά των πιθανοτήτων υπονοούν ότι η μέση τιμή $\mathbf{E}(I_n^p)$ ορίζεται για $p < n\delta$. Παραδείγματος χάριν, όταν η παρεμβολή ακυρώνεται με τις γνωστές τεχνικές τότε με την εφαρμογή τους η παρεμβολή από τους k -οστούς κοντινότερους παρεμβολείς (interferers) μπορεί να ακυρωθεί, χρειαζόμαστε την k μεγαλύτερη της α για τα δισδιάστατα δίκτυα ώστε να πάρουμε πεπερασμένη δεύτερης τάξης ροπή.

Όταν υπάρχει εξασθένιση, μπορούμε να συμπεράνουμε από την (3.24) ότι θα πρέπει να προσθέσουμε τον όρο $(\mathbf{E}(h^\delta))^n$.

Το γεγονός ότι η κατανομή εξασθένισης υπάρχει ως όρος στον τύπο (3.20) που δίνει το μετασχηματισμό Laplace μέσω της δ -οστής ροπής μπορεί να φαίνεται αρχικά ανορθόδοξο. Αυτό είναι, εντούτοις, μια περίπτωση ενός αποτελέσματος των Gilbert και Pollak [15] (βλέπε επίσης την [32]), οι οποίοι έχουν δείξει ότι, στη μονοδιάστατη περίπτωση, ένα σύνολο από στοχαστικές συναρτήσεις απόκρισης, στην περίπτωσή μας οι $hx^{-\alpha}$, έχει μία ισοδύναμη ντετερμινιστική κρουστική απόκριση $\ell_{eq}(x) = cx^{-\alpha}$ που ικανοποιεί την

$$\mathbb{E}_h|\{x: hx^{-\alpha} > y\}| = |\{x: cx^{-\alpha} > y\}| \quad \forall y.$$

Για να βρούμε το c , σημειώνουμε ότι η αριστερή πλευρά της παραπάνω εξίσωσης είναι η $E(h^{1/\alpha})x^{-1/\alpha}$ και η δεξιά της η $c^{1/\alpha}x^{-1/\alpha}$. Συνεπώς, $c = (E(h^{1/\alpha}))^\alpha$. Αντικαθιστώντας την $\ell(r) = r^{-\alpha}$ με την ισοδύναμή της $\ell_{eq}(r) = (E(h^{1/\alpha}))^\alpha r^{-\alpha}$ δίνει τη σωστή κατανομή πρώτου βαθμού για την παρεμβολή με διαδικασία εξασθένισης h στη μονοδιάστατη περίπτωση. Στις d διαστάσεις, η αριστερή πλευρά γίνεται $c_d E(h^\delta) x^{-\delta}$ και η δεξιά πλευρά γίνεται $c_d c^\delta x^{-\delta}$, και συνεπώς η ισοδύναμη ντετερμινιστική απώλεια διαδρομής είναι

$$\ell_{eq}(r) = (E(h^\delta))^{1/\delta} r^{-\alpha}.$$

Για παράδειγμα, αντικαθιστώντας την ντετερμινιστική απώλεια διαδρομής στην (3.14) παίρνουμε τη σωστή έκφραση για το μετασχηματισμό Laplace για την περίπτωση (3.20), επειδή ο όρος $x^{-\delta}$ στην (3.14) αντικαθίσταται με τον $(x/c)^{-\delta}$, αντικατάσταση που μας δίνει τον επιθυμητό όρο $E(h^\delta)$. Η ισοδυναμία ισχύει όχι μόνο για τη μέση τιμή, και δεδομένου ότι αυτές οι κατανομές δεν έχουν πεπερασμένες ροπές, αλλά και για το μετασχηματισμό Laplace όπου για τις περιπτώσεις με την πιθανοτική εξασθένιση και με την ισοδύναμη ντετερμινιστική απώλεια διαδρομής είναι ίδιοι. Παρατηρούμε ότι, από το ανάπτυγμα σειράς της πυκνότητας πιθανότητας (3.24), η πυκνότητα στην αναλυτική της μορφή δεν μπορεί να παραχθεί χρησιμοποιώντας τον ισοδύναμο νόμο απωλειών διαδρομής.

Στην εργασία [26], από το πλάτος κατανομής της παρεμβολής που μελετήθηκε, φάνηκε ότι εάν κάθε παρεμβάλλον σήμα είναι σφαιρικά συμμετρικό, το πλάτος παρεμβολής έχει μία συμμετρική ευσταθή Levy κατανομή (κύρτωση = 0) με χαρακτηριστικό εκθέτη $4/\alpha$. Αυτό είναι σύμφωνο με το αποτέλεσμα μας για την ισχύ παρεμβολής, δεδομένου ότι το πλάτος φθίνει με την απόσταση με εκθετική δύναμη ίση $\alpha/2$. Επίσης, εξετάστηκαν οι ιδιότητες σύγκλισης στη σταθερή κατανομή καθώς ο αριθμός των κόμβων αυξάνεται και οι ιδιότητες της λογαριθμικής κανονικής κατανομής για την σκίαση.

3.3 Η SIR κατανομή και η Διακοπή λειτουργίας

Όπως αναφέρεται στην εισαγωγή, ο μετασχηματισμός Laplace είναι η κατανομή του λόγου SIR εφόσον η ισχύς που εκπέμπεται από τους επιθυμητούς πομπούς κατανέμεται εκθετικά (κατά Rayleigh εξασθένιση). Με άλλα λόγια, ενώ αναλυτικές εκφράσεις για την ίδια την παρεμβολή δεν υπάρχουν, υπάρχουν όμως σε ορισμένες περιπτώσεις για το λόγο SIR.

Για απόσταση μεταξύ πομπού και δέκτη ίση με r , η λαμβανόμενη ισχύς των σημάτων S είναι εκθετική με μέση τιμή $r^{-\alpha}$. Η πιθανότητα επιτυχίας $p_s(\theta) = \Pi(S > I\theta) = E \exp(-I\theta r^\alpha)$ είναι ίση με τον μετασχηματισμό Laplace της παρεμβολής για $s = \theta r^\alpha$. Συνεπώς, σε d -διάστατα δίκτυα, παρεμβάλλονται μόνον παρεμβολές από άλλους χρήστες, των οποίων οι κόμβοι κατανέμονται ως μία ομοιόμορφη PPP έντασης λ και με πρωτόκολλο ALOHA πολλαπλής πρόσβασης με πιθανότητα p , η πιθανότητα διακοπής λειτουργίας για Rayleigh εξασθένιση με επιθυμητή ισχύ σημάτων S προκύπτει από την (3.20) αντικαθιστώντας τη s με θr^α :

$$p_s(\theta) = \exp(-p\lambda c_d r^d \mathbb{E}(h^\delta) \Gamma(1-\delta) \theta^\delta). \quad (3.28)$$

Εδώ έχουμε χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι το ALOHA κάνει εκλέπτυνση της PPP, γεγονός που οδηγεί σε μία PPP μικρότερης έντασης. Ενώ η ισχύς S πρέπει να είναι Rayleigh, τα κανάλια των παρεμβολών μπορούν να ανήκουν σε έναν διαφορετικό τύπο εξασθένισης (ή καθόλου εξασθένισης). Σημειώνεται ότι για όλες τις προαναφερθείσες περιπτώσεις χρειαζόμαστε την $E(h^\delta)$.

Για τους παρεμβολείς Rayleigh, από την (3.21) έχουμε ότι

$$p_s(\theta) = \exp\left(-p\lambda c_d r^d \frac{\pi\delta}{\sin(\pi\delta)} \theta^\delta\right). \quad (3.29)$$

Αυτό το αποτέλεσμα έχει παραχθεί στις εργασίες [3, 54].

Επειδή οι αποστάσεις των πλησιέστερων γειτόνων μεταβάλλονται ως $\lambda^{-1/d}$, η επικοινωνία μεταξύ πλησιέστερων γειτόνων είναι πάντα εφικτή με σταθερή ορθή πιθανότητα, ανεξάρτητα από την πυκνότητα των δικτύων.

Εάν η λαμβανόμενη ισχύς των σημάτων από τον επιθυμητό πομπό δεν έχει υποστεί κατά Rayleigh εξασθένιση, τότε σε αυτήν την περίπτωση δεν υπάρχει καμία γνωστή κλειστής μορφής έκφραση για την διακοπή λειτουργίας. Όταν οι τυχαίες μεταβλητές εξασθένισης περιγράφονται μέσω ολοκληρώματος πυκνότητας το οποίο τετραγωνίζεται, η πιθανότητα επιτυχίας δίνεται από την έκφραση στην [4, Πρόταση 2.2]. Τα όρια για την πιθανότητα διακοπής λειτουργίας δίνονται στην [49, 51] στα πλαίσια της αποκαλούμενης *χωρητικότητας μετάδοσης*, που ορίζεται ως η μέγιστη πυκνότητα πομπών δεδομένης μιας διακοπής λειτουργίας για τις μεταδόσεις σε έναν δέκτη που βρίσκεται σε σταθερή απόσταση (θέση).

3.4 Ακραία συμπεριφορά

Αναλύοντας τις πιθανότητες διακοπής λειτουργίας της μετάδοσης πλησιέστερων γειτόνων ή τα οφέλη της ακύρωσης παρεμβολής, πρέπει απαραίτητα να υπολογισθεί η συσχέτιση της ισχύος του ισχυρότερου παρεμβολέα με την ισχύ της συνολικής παρεμβολής. Αυτό γίνεται διότι ο ισχυρότερος παρεμβολέας μπορεί να είναι ο επιθυμητός πομπός ή αυτός που πρέπει να ακυρωθεί. Σε αυτήν την ενότητα υπολογίζουμε τις στατιστικές ακραίας τιμής για τη μέγιστη παρεμβολή στα δισδιάστατα δίκτυα. Όπως στην παράγραφο 3.2.2, τοποθετούμε k κόμβους ομοιόμορφα i.i.d. μέσα σε ένα δίσκο ακτίνας a . Σύμφωνα με το νόμο ισχύος των απωλειών διαδρομής, χωρίς εξασθένιση, η ισχύς από κάθε κόμβο υπολογισμένη στο σημείο εκκίνησης, $R^{-\alpha}$, κατανέμεται όπως

$$\mathbf{P}(R^{-\alpha} < x) = 1 - \frac{1}{a^2}x^{-2/\alpha}, \quad x \geq a^{-\alpha}.$$

Έστω $\delta = 2/\alpha$. Ορίζουμε M_k να είναι η μέγιστη τιμή των k τον αριθμό ισχύων παρεμβολής με συσσωρευμένη συνάρτηση κατανομής, $F_{M_k}(x)$,

$$F_{M_k}(x) = \left(1 - \frac{1}{a^2}x^{-\delta}\right)^k, \quad x \geq a^{-\alpha}.$$

Δεδομένου ότι η συνάρτηση CCDF φθίνει όπως η $x^{-\delta}$, η ασυμπτωτική οριακή κατανομή F_{M_∞} είναι μια Fréchet κατανομή, η οποία έχει τη μορφή $\exp(-x^{-\delta})$ (βλέπε, επίσης την [18, Θεώρημα 6.2]). Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν ακολουθίες παραμέτρων μετατόπισης a_k και παράμετροι διαστολής b_k , έτσι ώστε

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F_{M_k}(a_k + b_k x) = \exp(-x^{-\delta}).$$

Η τυποποιημένη Fréchet κατανομή από τη δεξιά πλευρά της παραπάνω εξίσωσης είναι ίση με $\lim_{k \rightarrow \infty} (1 - x^{-\delta}/k)^k$. Συνεπάγεται ότι οι a_k και b_k δίνονται από την ταυτότητα

$$F_{M_k}(a_k + b_k x) \equiv \left(1 - \frac{x^{-\delta}}{k}\right)^k,$$

από την οποία βρίσκουμε $a_k \equiv 0$ και $b_k = (k/a^2)^{1/\delta}$. Ως εκ τούτου

$$F_{M_k}(x) \sim \exp(-(k/a^2)x^{-\delta}) \quad \text{as } k \rightarrow \infty. \quad (3.30)$$

Εάν k και a^2 τείνουν στο άπειρο έτσι ώστε η πυκνότητα $\lambda = k/(\pi a^2)$ να παραμένει σταθερή, τότε έχουμε

$$F_{M_\infty}(x) = \exp(-\lambda \pi x^{-\delta}). \quad (3.31)$$

Σε αυτήν την οριακή περίπτωση, οι κόμβοι διαμορφώνουν μία διαδικασία PPP στο \mathbb{P}^2 , και έτσι μπορούμε να έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα με το να υπολογίσουμε απλά την παρεμβολή $R_1^{-\alpha}$ από το κοντινότερο παρεμβολέα, που σε απόσταση R_1 . Πράγματι, $\mathbf{P}(R_1 < r) = 1 - \exp(-\lambda \pi r^2)$ και από αυτό το αποτέλεσμα η (3.31) προκύπτει άμεσα.

Γράφοντας την CDF της (3.30) μέσω των μεταβλητών $xk^{-1/\delta}$ έτσι ώστε η δεξιά πλευρά της εξίσωσης να γίνει ανεξάρτητη από την k , παρατηρούμε ότι $M_k = \Theta(k^{1/\delta})$. Επειδή $\delta < 1$, $k^{1/\delta} \gg k$ για μεγάλες τιμές της k , το άθροισμα δεν είναι ανάλογο προς την k , αποτέλεσμα που είναι σύμφωνο με το γεγονός ότι ο μέσος όρος αποκλίνει. Έχουμε δει στην παράγραφο 3.2 ότι η κατανομή του αθροίσματος για όλους τους παρεμβολείς είναι σταθερή Levy και έχει ουρά ίδια με την κατανομή “Power Law” που είναι Fréchet κατανομή, και συνεπώς το μέγιστο και το άθροισμα είναι της ίδιας τάξης. Αυτό υπονοεί, ότι εάν η ισχύς από τον κοντινότερο πομπό είναι το επιθυμητό σήμα, ο λόγος SIR συγκλίνει σε μια διαφορετική από το μηδέν σταθερά καθώς $k \rightarrow \infty$. Αυτό το γεγονός έχει χρησιμοποιηθεί, για παράδειγμα, στην [16] για να βρεθεί η κατανομή κλιμακούμενης χωρητικότητας για αδόμητα δίκτυα με κινητούς κόμβους. Αυτό επιτυγχάνεται, λόγω της ομοιογένειας του νόμου των απωλειών διαδρομής.

Η κατάσταση είναι η ίδια παρουσία της εξασθένησης, εφ' όσον η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής που μοντελοποιεί την εξασθένηση είναι πεπερασμένη, γεγονός που εκφράζει την πιο συχνή περίπτωση σε πρακτικές εφαρμογές. Και η έντονη (ή «βαριά») ουρά της κατανομής παρεμβολής μπορεί να οφείλεται στην ιδιομορφία του νόμου των απωλειών διαδρομής.

3.5 Έλεγχος ισχύος

Εισάγουμε την έννοια της *αντιληφθείσας* ισχύος εκπομπής P , η οποία είναι η ισχύς εκπομπής όταν πολλαπλασιάζεται με τον συντελεστή εξασθένησης. Προηγουμένως, δεν είχαμε εξετάσει τον έλεγχο ισχύος αλλά την εξασθένηση, και έτσι είχαμε $P = h$. Όταν δεν έχουμε εξασθένηση αλλά ούτε έλεγχο ισχύος, $P=1$. Με τον έλεγχο ισχύος και χωρίς εξασθένηση, η P είναι η ισχύς εκπομπής P_i ενώ με τον έλεγχο ισχύος και την εξασθένηση, $P = h P_i$. Υποθέτουμε ότι ο σχεδιασμός ελέγχου ισχύος έχουν γίνει έτσι ώστε οι αντιληπτές ισχύεις εκπομπής P_i να είναι i.i.d. για τους πομπούς. Κάτω από αυτήν την προϋπόθεση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα της (3.20) γιατί δεν έχει σημασία για την παρεμβολή εάν η τυχαιότητα οφείλεται στην εξασθένηση ή στον έλεγχο ισχύος, ή ακόμα στον συνδυασμό των δύο. Η κύρια αλλαγή είναι να αντικαταστήσουμε $E(h^\delta)$ με $E(P^\delta)$ και ως εκ τούτου στόχος μας σε αυτή την υποενότητα είναι ο προσδιορισμός της δ -οστής ροπής.

Εστιάζουμε στον κατά ζεύγη (pairwise) έλεγχο ισχύος μεταξύ ενός πομπού και του αντίστοιχου δέκτη του. Ειδικότερα, εξετάζουμε την περίπτωση όπου κάθε κόμβος μεταδίδει στον κοντινότερο γείτονά του, που υποτίθεται ότι βρίσκεται σε απόσταση R_1 . Επειδή δεν είναι εφικτό να υποθέσουμε ότι όλοι οι κόμβοι μέσα στο δίκτυο μεταδίδουν, εισάγουμε μια ALOHA παράμετρο ρ για να έχουμε μια διαδικασία PPP έντασης $\lambda \times \rho$ που μοντελοποιεί τη μετάδοση των πομπών. Με μικρή αλλαγή της (3.20) έχουμε ότι

$$\mathcal{L}_I(s) = \exp(-\rho \lambda c_d \mathbf{E}(P^\delta) \Gamma(1 - \delta) s^\delta).$$

3.5.1 Αντιστροφή καναλιών χωρίς εξασθένιση

Σε αυτήν την περίπτωση, οι κόμβοι αντισταθμίζουν της μεγάλης κλίμακας απώλειες διαδρομής χρησιμοποιώντας την τεχνική της αντιστροφής διαύλου. Η ισχύς εκπομπής $P_t = P = R_1^a$ δίνεται από την Weibull κατανομή

$$\mathbb{P}(P \leq x) = 1 - \exp(-\lambda c_d x^\delta)$$

με

$$\mathbb{E}(P^m) = \frac{\Gamma(1 + m/\delta)}{(\lambda c_d)^{m/\delta}}.$$

Μια άποψη είναι ότι αντί της λ , πρέπει η $\lambda \times (1 - \rho)$ να χρησιμοποιηθεί ως η σχετική πυκνότητα για την απόσταση πλησιέστερων γειτόνων επειδή είναι η πυκνότητα από τους ανενεργούς κόμβους. Αυτό θα απαιτούσε μια απλή αλλαγή στον τύπο της πυκνότητας δικτύου. Εντούτοις, επειδή το πρωτόκολλο ALOHA είναι ασυντόνιστη τεχνική MAC, δεν είναι εφικτό για έναν πομπό να ξέρει πότε θα είναι διαθέσιμος ο αντίστοιχος δέκτης ώστε να αρχίσει να λαμβάνει τα πακέτα του. Επειδή $\mathbb{E}(P^\delta) = 1 / (\lambda c_d)$, παίρνουμε από την (3.20)

$$\mathcal{L}_I(s) = \exp(-p\Gamma(1 - \delta)s^\delta), \quad (3.32)$$

ο όποιος τύπος είναι ανεξάρτητος από την πυκνότητα δικτύου. Έτσι, ανεξάρτητα από το πόσο πυκνό κάνουμε το δίκτυο, εάν οι πομποί «μιλούν» με τους κοντινότερους γείτονές τους και αντισταθμίζουν τις απώλειες διαδρομής έτσι ώστε το σήμα τους να φθάνει με μοναδιαία ισχύ, η κατανομή παρεμβολής δεν αλλάζει. Αυτό είναι αναμενόμενο από το γεγονός ότι, εάν οι κόμβοι ταξινομούνται σύμφωνα με τις αποστάσεις τους R_i από ένα δεδομένο σημείο, η $\{R_i^d\}$ διαμορφώνει μια ομοιογενή PPP έντασης λc_d [20, Πρόρισμα 2]. Συνεπώς, η μέση απόσταση μέχρι τον πρώτο κόμβο R_1 είναι $1 / (\lambda c_d)^{1/d}$. Η ισχύς της εκπομπής είναι ανάλογη προς το R_1^a , και άρα $P^\delta = R_1^d$, η οποία είναι ανάλογη προς $1 / (\lambda c_d)$.

Σε σύγκριση με την περίπτωση όπου δεν ορίζεται έλεγχος ισχύος, και όπου υποθέτουμε μοναδιαία εκπεμπόμενη ισχύ, η μέση τιμή της ισχύος είναι τώρα

$$\mathbb{E}(P) = \Gamma(1 + 1/\delta) / (\lambda c_d) 1^\delta.$$

Εάν αντισταθμίσουμε για την αλλαγή στη μέση τιμή της εκπεμπόμενης ισχύος, τότε η συνάρτηση κατανομής γίνεται

$$\mathbb{P}(P \leq x) = 1 - \exp(-(\Gamma(1 + 1/\delta)x)^\delta),$$

Και ο μετασχηματισμός Laplace λαμβάνει τη μορφή

$$\mathcal{L}_I(s) = \exp(-p\lambda c_d \Gamma(1 + 1/\delta)^{-\delta} \Gamma(1 - \delta) s^\delta). \quad (3.33)$$

Συγκρίνοντας τον παραπάνω τύπο παρεμβολής με την παρεμβολή με Rayleigh εξασθένιση (χωρίς έλεγχο ισχύος), παρατηρούμε ότι οι συντελεστές $\Gamma(1 + \delta) > \Gamma(1 + 1/\delta)^{-\delta}$ για $\delta < 1$ και ότι ο λόγος τους αποκλίνει καθώς $\delta \rightarrow \infty$ διότι $\lim_{\delta \rightarrow \infty} \Gamma(1 + 1/\delta)^{-\delta} = 0$.

Αυτό δείχνει ότι ο έλεγχος ισχύος προκαλεί λιγότερη παρεμβολή από την κατά Rayleigh εξασθένιση, και ότι η διαφορά αυξάνεται ευθέως ανάλογα με τον εκθέτη απωλειών διαδρομής α (για έναν σταθερό αριθμό διαστάσεων d).

Ενώ οι στάθμες ισχύος είναι i.i.d. στο χώρο, δεν μπορούμε να υποθέσουμε ότι είναι και i.i.d. στο χρόνο, επειδή η απόσταση ενός κόμβου προς τον κοντινότερο γείτονα είναι απίθανο να αλλάξει μέσα σε ένα χρονικό διάστημα που χρειάζεται για να αλλάξει από χρονοθυρίδα στην αμέσως επόμενη. Η χρονική συσχέτιση εξαρτάται από το επίπεδο κινητικότητας και τη διάρκεια μιας συνόδου επικοινωνίας μεταξύ δύο κόμβων.

3.5.2 Έλεγχος δύναμης και εξασθένιση

Αντιστάθμιση για τη μεγάλης κλίμακας απωλειών διαδρομής. Εάν το κανάλι έχει εξασθένιση Rayleigh, αλλά οι πομποί αντισταθμίζουν μόνο τις μεγάλης κλίμακας απώλειες διαδρομής προς τον κοντινότερο δέκτη, η ισχύς καθενός παρεμβολέα δίνεται ως το γινόμενο Weibull κατανομημένης τυχαίας μεταβλητής R_1^α με μία εκθετικά κατανομημένης τυχαίας μεταβλητής h , $P = R_1^\alpha h$. Γενικότερα, το γινόμενο μεταξύ δύο ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών X και Y με κατανομές $F_X(x)$ και $F_Y(x)$, αντίστοιχα, κατανέμεται όπως

$$F_{XY}(z) = \mathbb{E}_Y(F_X(z/Y)) = \mathbb{E}_X(F_Y(z/X)).$$

Σε αυτήν την περίπτωση, η κατανομή γινομένου είναι

$$F_P(x) = \int_0^\infty (1 - \exp(x/r)) \lambda c_d \delta r^{\delta-1} \exp(-\lambda c_d r^\delta) dr. \quad (3.34)$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα μπορεί να εκφραστεί χρησιμοποιώντας δυναμοσειρά [35] ως εξής:

$$\begin{aligned} F_P(x) = & (\lambda c_d)^{1/\delta} x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1 - \frac{1}{\delta}(k+1))}{(k+1)!} (-\lambda c_d)^{1/\delta} x^k \\ & + \lambda c_d x^\delta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1 - \delta(k+1))}{(k+1)!} (-\lambda c_d x^\delta)^k, \end{aligned} \quad (3.35)$$

η οποία ισχύει μόνο εάν $1/\delta \notin \mathbb{N}$ επειδή η Γάμμα συνάρτηση αποκλίνει για όλους τους αρνητικούς ακέραιους αριθμούς.

Η ροπή $\mathbb{E}(P^\delta)$ βρίσκεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$\mathbb{E}(P^\delta) = \mathbb{E}((R_1^\alpha)^\delta h^\delta) = \mathbb{E}(R_1^\alpha) \mathbb{E}(h^\delta) = \frac{1}{\lambda c_d} \Gamma(1 + \delta). \quad (3.36)$$

Μέσω του παραπάνω αποτελέσματος παίρνουμε

$$\mathcal{L}_I(s) = \exp(-p \Gamma(1 + \delta) \Gamma(1 - \delta) s^\delta), \quad (3.37)$$

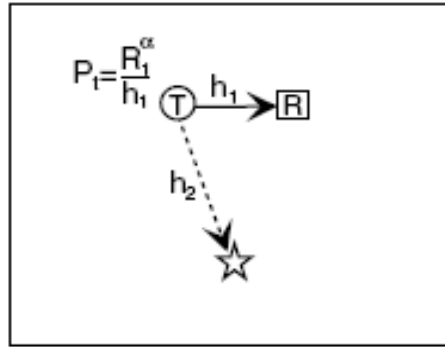
και στην την περίπτωση όπου οι ισχύεις μετάδοσης είναι κανονικοποιημένες στη μονάδα, παίρνει τη μορφή:

$$\mathcal{L}_I(s) = \exp\left(-p\lambda c_d \frac{\Gamma(1+\delta)}{\Gamma(1+1/\delta)^\delta} \Gamma(1-\delta) s^\delta\right). \quad (3.38)$$

Αντιστάθμιση για τις απώλειες και την εξασθένηση διαδρομής. Εάν οι πομποί έχουν πλήρεις πληροφορίες για την κατάσταση των καναλιών, συμπεριλαμβανομένης της πραγματικής εξασθένησης, μπορούν να αντισταθμίσουν τις πλήρεις απώλειες διαδρομής. Η i.i.d. διαδικασία που περιγράφει την ισχύ της παρεμβολής είναι $R_1^\alpha h_2/h_1$, όπου ο h_1 είναι ο συντελεστής εξασθένησης του καναλιού μέχρι τον πομπό και ο h_2 είναι ο συντελεστής του καναλιού μέχρι στο σημείο όπου η παρεμβολή μετριέται (βλέπε επίσης το Σχήμα 3.2).

Έστω $H \cong h_2/h_1$. Στην περίπτωση Rayleigh εξασθένησης,

$$F_H(x) = \frac{x}{x+1}.$$



Σχήμα 3.2 Η περίπτωση όπου ο έλεγχος δύναμης χρησιμοποιείται για να αντισταθμίσει μεγάλης κλίμακας απώλειες και εξασθενίσεις διαδρομής. Η παρεμβολή μετριέται στη θέση του αστερίσκου. Ο πομπός T μεταδίδει με ισχύ $P_t = R_1^\alpha / h_1$ για να αντισταθμίσει τις απώλειες και την εξασθένηση του σήματος που λαμβάνεται στο δέκτη R. Το κανάλι από T μέχρι και τη θέση του αστερίσκου υπόκειται σε εξασθένηση με συντελεστή h_2 , και έτσι η λαμβανόμενη ισχύς είναι $R_1^\alpha h_2/h_1$.

Με $P = R_1^\alpha h_2/h_1$, η παραπάνω εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$F_P(x) = \int_0^\infty \frac{1 - \exp(-\lambda c_d (x/y)^\delta)}{(y+1)^2} dy. \quad (3.39)$$

Η δ τάξης ροπή του H είναι

$$\mathbb{E}(H^\delta) = \mathbb{E}(h_2^\delta) \mathbb{E}(h_1^{-\delta}) = \Gamma(1 + \delta)\Gamma(1 - \delta),$$

από όπου παίρνουμε τα αποτελέσματα:

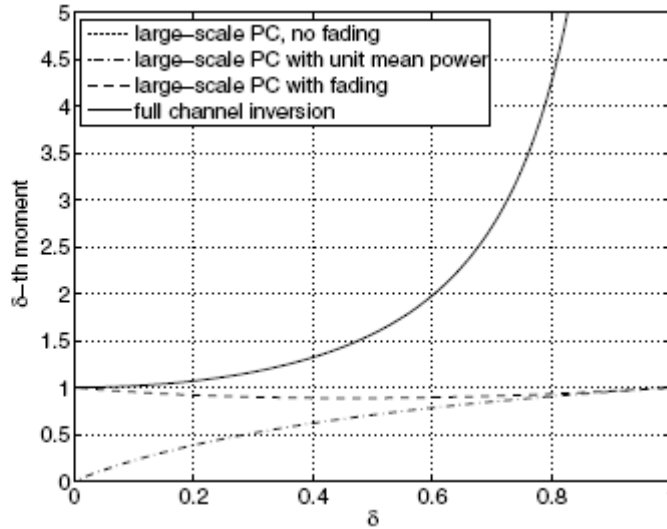
$$\mathbb{E}(P^\delta) = \frac{\Gamma(1 + \delta)\Gamma(1 - \delta)}{\lambda c_d},$$

και

$$\mathcal{L}_I(s) = \exp(-p\Gamma(1 + \delta)\Gamma(1 - \delta)^2 s^\delta) \quad (3.40)$$

Στο σχήμα 3.3, οι τιμές των διαφόρων ροπών $\mathbb{E}(P^\delta)$ παρουσιάζονται για τις διαφορετικές περιπτώσεις εξασθένισης και ελέγχου ισχύος μεταδιδόμενου σήματος. Είναι φανερό ότι η πλήρης αντιστροφή καναλιών ασκεί την πιο δραστική επίδραση στην παρεμβολή. Σημειώνουμε ότι σε αυτήν την περίπτωση, η κανονικοποίηση του μέσου όρου της ισχύος δεν είναι δυνατή διότι ισχύει η $\mathbb{E}(1/h_1) = \infty$.

Σημειώνεται ότι μια λεπτομερής συζήτηση του αντίκτυπου της δύναμης ελέγχου που αντισταθμίζει τις απώλειες διαδρομής και την εξασθένιση μπορεί να βρεθεί στην αναφορά [49].



Σχήμα 3.3 Η δ τάξης ροπή της λαμβανόμενης ισχύος P για τέσσερις περιπτώσεις του ελέγχου από τις εξισώσεις (3.32), (3.33), (3.37), (3.40), αντίστοιχα. Οι καμπύλες είναι ομαλοποιημένες ώστε $\lambda c_d = 1$.

3.5.3 Επιπτώσεις στην πιθανότητα διακοπής λειτουργίας

Μέχρι τώρα, έχουμε μελετήσει μόνο την επίδραση του ελέγχου ισχύος στην παρεμβολή, και το συμπέρασμα είναι ότι ο έλεγχος ισχύος στα δίκτυα με εξασθένιση αυξάνει συνήθως την παρεμβολή. Αντίθετα, έλεγχος ισχύος επιφέρει μια βελτίωση του καναλιού για το σωστό δέκτη. Αυτά τα δύο αποτελέσματα όμως είναι εκ διαμέτρου αντίθετα. Αυτή η ασυμφωνία των ιδιοτήτων των κινητών διαύλων μελετήθηκε στην [28] για το σενάριο όπου κάθε πομπός μεταδίδει σε ένα μόνο δέκτη για μια σταθερή απόσταση, και ο έλεγχος ισχύος χρησιμοποιείται για να αντισταθμίσει την εξασθένιση. Διαπιστώθηκε ότι ο κλασματικός έλεγχος ισχύος είναι βέλτιστος, όταν η ισχύς μετάδοσης επιλέγεται ανάλογη ως προς $h^{-1/2}$, αντί να επιλεγεί η πλήρης αντιστροφή καναλιού, δηλαδή να ισχύει η h^{-1} . Ο κλασματικός έλεγχος ισχύος προσφέρει μια καλύτερη ανταλλαγή μεταξύ της βελτίωσης της σύνδεσης εναντίον της πρόκλησης περισσότερης παρεμβολής στους άλλους χρήστες. Έχει επίσης το πλεονέκτημα ότι η μέση τιμή ισχύος $E(h^{-1/2})$ είναι πεπερασμένη και ίση με $\sqrt{\pi}$. Στην [51] εξετάστηκε η περίπτωση όπου ο δέκτης προορισμού βρίσκεται μέσα σε έναν δακτύλιο.

Σε αυτήν την ενότητα εξετάζουμε την επίδραση της μεγάλης κλίμακας ελέγχου ισχύος επάνω στην πιθανότητα διακοπής λειτουργίας στην περίπτωση επικοινωνίας κοντινότερων γειτόνων. Χωρίς έλεγχο ισχύος και με δεδομένη την R που είναι η απόσταση στον κοντινότερο γείτονα, ο πομπός μεταδίδει επιτυχώς με πιθανότητα που δίνεται από:

$$\begin{aligned} \bar{p}_s(\theta) &= \mathbb{E}_R(\exp(-p\lambda c_d R^d \Gamma(1+\delta)\Gamma(1-\delta)\theta^\delta)) \\ &= \frac{1}{1+p\Gamma(1+\delta)\Gamma(1-\delta)\theta^\delta}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Η παραπάνω εξίσωση επιβεβαιώνει το γεγονός ότι ανεξάρτητα από την πυκνότητα του δικτύου, ο κάθε κόμβος μπορεί να μεταδώσει στον κοντινότερό του γείτονα με σταθερή πιθανότητα επιτυχίας. Για μεγάλη κλίμακα ελέγχου ισχύος (που αναστρέφει τη μεγάλη κλίμακα των απωλειών διαδρομής), κάθε ένας πομπός έχει την ίδια πιθανότητα επιτυχίας που δίνεται από

$$p_s^{pc}(\theta) = \exp(-p\Gamma(1+\delta)\Gamma(1-\delta)\theta^\delta), \quad (3.42)$$

η οποία είναι ελαφρώς μικρότερη από την προηγούμενη. Ουσιαστικά, ο έλεγχος ισχύος αντισταθμίζει την απόσταση στον κοντινότερο γείτονα, η οποία είναι η ίδια με αντικατάσταση του R^d από την αναμενόμενη μέση τιμή του. Από την ταυτοανισότητα Jensen παίρνουμε

$$p_s^{pc}(\theta) = \exp(-c\mathbb{E}(R^d)) < \bar{p}_s = \mathbb{E}(\exp(-cR^d)), \quad c > 0.$$

Στο καθεστώς μικρής διακοπής λειτουργίας, και για τις μικρές τιμές της p ή της θ , η διαφορά είναι μικρή. Φθάνει περίπου στο 3–5% της πιθανότητας επιτυχίας που είναι περίπου 70%, με τη διαφορά να αυξάνεται περαιτέρω για υψηλότερα ποσοστά διακοπής λειτουργίας. Συνεπώς, ενώ ο έλεγχος ισχύος είναι ελαφρώς επιβλαβής από αυτήν την

άποψη, έχει το μεγάλο πλεονέκτημα να παρέχει σταθερή πιθανότητα επιτυχίας. Χωρίς έλεγχο ισχύος, υπάρχει μία σημαντική διαφορά στην πιθανότητα επιτυχίας $p_s(\theta, R)$.

Αυτή η διαφορά είναι (προφανώς) μηδέν για $p_s \uparrow 1$ και $p_s \downarrow 0$, και φθάνει στη μέγιστη τιμή της 0,09 όταν $p \Gamma(1 + \delta) \Gamma(1 - \delta) \theta^\delta$ είναι ίση με την ιδανική τιμή $(1 + \sqrt{5})/2$. Τότε οι πιθανότητες είναι $\bar{p}_s \approx 38\%$ και $p_s^{pc} \approx 20\%$, αντίστοιχα. Η σταθερή απόκλιση 0,3 υποδεικνύει ότι τα ποσοστά επιτυχίας για πολλούς πομπούς θα είναι μικρότερα από την p_s^{pc} εάν δεν έχουμε έλεγχο ισχύος.

3.6 Επικοινωνίες διασκορπισμένου φάσματος

Με τη χρήση επικοινωνιών απλωμένου φάσματος, η ενεργός παρεμβολή μπορεί να μειώνεται κατά έναν παράγοντα M που καλείται συνήθως *κέρδος επεξεργασίας* ή *παράγοντας διασκορπισμού*. Δύο κοινοί τύποι απλωμένου φάσματος είναι η άμεση ακολουθία απλωμένου φάσματος (DS-SS) και η συχνότητα μεταπήδησης απλωμένου φάσματος (FH-SS). Είναι ενδιαφέρον να σημειωθεί εδώ, όπως αναφέρεται στην [1], τα αποτελέσματα των δυο αυτών τεχνικών επάνω στην παρεμβολή και τη διακοπή λειτουργίας είναι αρκετά διαφορετικά, αν και οι δύο απαιτούν ένα M φορές πολλαπλάσια αύξηση του εύρους ζώνης.

Αφ' ενός με το σύστημα DS-SS, όλοι οι κόμβοι που μεταδίδουν, προκαλούν παρεμβολή, αλλά η παρεμβολή κλιμακώνεται κατά έναν παράγοντα M . Η διακοπή λειτουργίας σε Rayleigh εξασθένιση είναι επηρεασμένη από μια μείωση του SIR κατώτατου ορίου θ κατά έναν ανάλογο παράγοντα M διότι

$$p_s^{\text{DS}}(\theta, M) = \mathbb{E}(e^{-\theta I/M}) = p_s(\theta/M).$$

Συνεπώς, μέσω της (3.29), παρατηρούμε ότι

$$\text{DH-SS: } \frac{\log p_s(\theta/M)}{\log p_s(\theta)} = M^{-\delta}.$$

Αφ' ετέρου με το σύστημα FH-SS, η πυκνότητα των παρεμβολέων μειώνεται κατά έναν παράγοντα M , ο οποίος υπονοεί ότι

$$\text{FH-SS: } \frac{\log p_s^{\text{FH}}(\theta)}{\log p_s(\theta)} = M^{-1}.$$

Επειδή $\delta < 1$, το κέρδος του FH-SS είναι μεγαλύτερο, και η διαφορά είναι πιο δραστική για μικρή τιμή της δ , δηλαδή, εάν η δύναμη του εκθέτη απωλειών διαδρομής είναι μεγάλη σχετικά με τον αριθμό των διαστάσεων του δικτύου. Σημειώνεται ότι περισσότερες λεπτομέρειες είναι διαθέσιμες στο άρθρο [1].

3.7 CSMA και ακύρωση παρεμβολής

3.7.1 CSMA

Τα πρωτόκολλα πρόσβασης καναλιών που είναι βασισμένα στο carrier sensing στοχεύουν να θέσουν ένα άνω όριο στην παρεμβολή που προσάγεται σε έναν δέκτη με το να σταματήσουν τους κοντινούς κόμβους να διαδίδουν. Η επίδραση του CSMA πρωτοκόλλου πρόσβασης στο επίπεδο MAC επάνω στην παρεμβολή διερευνάται με τον υπολογισμό της υπολειπόμενης παρεμβολής που προέρχεται από τους πομπούς που λειτουργούν εκτός ακτίνας εμβέλειας του πρωτοκόλλου Carrier Sensing του δέκτη. Υποθέτοντας μια μετάδοση μέσω Carrier Sensing με ακτίνα εμβέλειας ρ , λαμβάνουμε το μετασχηματισμό Laplace από την υπολειπόμενη παρεμβολή μέσω του τροποποιημένου νόμου απωλειών διαδρομής

$$\tilde{\ell}(r) = r^{-\alpha} \mathbf{1}_{r > \rho},$$

και έχει κάνει τις ίδιες πράξεις όπως στον υπολογισμό ολόκληρης παρεμβολής. Στην περίπτωση της μη εξασθένισης, έχουμε

$$\mathcal{L}_I(s) = \exp \left\{ -\lambda c_d (s^\delta \gamma(1 - \delta, s\rho^{-\alpha}) - \rho^d (1 - \exp(-s\rho^{-\alpha}))) \right\}, \quad (3.43)$$

όπου $\gamma(\alpha, z) = \int_0^z \exp(-t)t^{\alpha-1} dt$ είναι η ελλιπής συνάρτηση Γάμμα. Επειδή $\gamma(\alpha, z) < \Gamma(\alpha)$ για πεπερασμένες τιμές της z , ο παρών μετασχηματισμός είναι μεγαλύτερος από τ μετασχηματισμό Laplace της πλήρους παρεμβολής, όπως άλλωστε αναμένεται. Για $\rho > 0$, η μέση τιμή και η διασπορά είναι πεπερασμένες και δίνονται από

$$\mathbf{E}(I) = -\frac{d}{ds} \log(\mathcal{L}_I(s)) \Big|_{s=0} = \frac{\lambda c_d d}{\alpha - d} \rho^{d-\alpha}. \quad (3.44)$$

$$\text{var}(I) = \frac{d^2}{ds^2} \log(\mathcal{L}_I(s)) \Big|_{s=0} = \frac{\lambda c_d d}{2\alpha - d} \rho^{d-2\alpha}. \quad (3.45)$$

Αυτά τα αποτελέσματα προκύπτουν από το γεγονός ότι

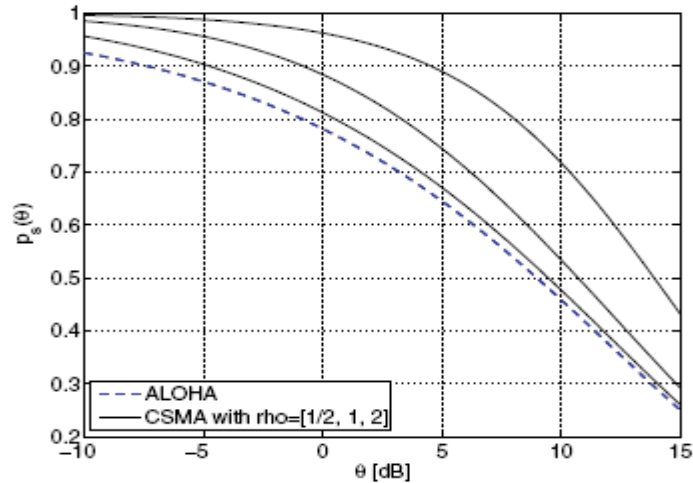
$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\gamma(1 - \delta, s\rho^{-\alpha})}{s^{1-\delta}} = \frac{\rho^{d-\alpha}}{1 - \delta}.$$

Παρόμοια, στην περίπτωση εξασθένισης Rayleigh και όταν $\delta=1$, έχουμε

$$\mathcal{L}_I(s) = \exp \left\{ -\lambda c_d \sqrt{s} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{s\rho^{-\alpha}}} \right) + \frac{\sqrt{s\rho^{-\alpha}}}{s\rho^{-\alpha} + 1} \right) + \frac{\lambda c_d \rho^d s}{s + \rho^\alpha} \right\}, \quad (3.46)$$

αποτέλεσμα που επιβεβαιώνει ότι η παρεμβολή δεν έχει έντονη ουρά για $\rho > 0$.

Ερμηνεύοντας τη $L_I(\theta)$ ως την πιθανότητα επιτυχίας για Rayleigh εξασθένιση, οι επιπτώσεις CSMA στη διακοπή λειτουργίας μπορούν να υπολογισθούν ποσοτικά. Το Σχήμα 3.4 παρουσιάζει την πιθανότητα επιτυχίας για $\rho = 1/2, 1, 2$ και ALOHA, όπου το τελευταίο αποτελεί μέτρο σύγκρισης. Για να κυριολεκτήσουμε, ο παραπάνω τύπος είναι προσεγγιστικός, διότι το σύνολο των πομπών δε διαμορφώνει μια διαδικασία PPP.



Σχήμα 3.4 Οι πιθανότητες επιτυχίας $p_s(\theta) = L_I(\theta)$ από την (3.46) για ALOHA (διακεκομμένη καμπύλη) και CSMA με ακτίνες ζώνης προφύλαξης $\rho = 1/2, 1, 2$ για ένα δισδιάστατο δίκτυο με $\alpha = 4$ ($\delta = 1/2$) και $\lambda = 1/20$. Η καμπύλη με την μεγαλύτερη πιθανότητα επιτυχίας είναι αυτή όπου $\rho = 2$.

Αντίθετα, διαμορφώνει μια διαφορετική σημειακή διαδικασία [45], όπου μια ελάχιστη απόσταση υπάρχει μεταξύ των πομπών. Για σχετικά μικρές ζώνες προφύλαξης, η χρησιμοποίηση της PPP ως πρότυπο παράγει μάλλον ακριβή αποτελέσματα, επειδή η "παραμόρφωση" της σημειακής διαδικασίας έξω από τη ζώνη προφύλαξης είναι ελάχιστη. Η μέση τιμή $E(I)$ είναι ίδια όπως και στην περίπτωση μη εξασθένισης, ενώ η διασπορά είναι δύο φορές μεγαλύτερη. Έτσι η Rayleigh εξασθένιση διπλασιάζει τη διασπορά παρεμβολής.

Το πρωτόκολλο CSMA του επιπέδου MAC δημιουργεί ουσιαστικά μια ζώνη προφύλαξης γύρω από το δέκτη. Αυτό όχι μόνο βοηθά το συγκεκριμένο δέκτη, αλλά μειώνει επίσης τον αριθμό ταυτόχρονων μεταδόσεων που είναι δυνατές στο δίκτυο, δηλαδή τη χωρική επαναχρησιμοποίηση. Αυτή η ανταλλαγή διερευνάται λεπτομερώς στο [24]. Σημειώνουμε ότι μια ζώνη φύλαξης ακτίνας ρ μειώνει την πυκνότητα των πομπών κατά έναν παράγοντα ίσο με $\exp(\lambda c_d \rho^d)$. Ένας τρόπος να υπολογιστεί ποσοτικά η χωρική πυκνότητα των επιτυχών μεταδόσεων είναι να πολλαπλασιασθεί η πυκνότητα των πομπών με την πιθανότητα επιτυχίας. Για τις παραμέτρους στο Σχήμα 3.4, οι παράγοντες εκλέπτυνσης είναι 96%, 85%, και 53% για $\rho = 1/2, 1, 2$, αντίστοιχα. Για $\rho = 1$, το γινόμενο της πιθανότητας επιτυχίας με την πυκνότητα των πομπών είναι υψηλότερο απ'

ότι στην περίπτωση ALOHA όταν $\theta > 0$ dB. Γενικότερα, το βέλτιστο πλάτος της ζώνης προφύλαξης εξαρτάται από τις προδιαγραφές για την αξιοπιστία μετάδοσης και την ενεργειακή αποδοτικότητα. Στην εργασία [37], οι συγγραφείς ανέλυσαν την απόδοση CSMA σε πυκνό 802.11 δίκτυο. Χρησιμοποίησαν μια διαδικασία Matern για να μοντελοποιήσουν τις επιπτώσεις του CSMA στην κατανομή κόμβων.

3.7.2 Ακύρωση παρεμβολής

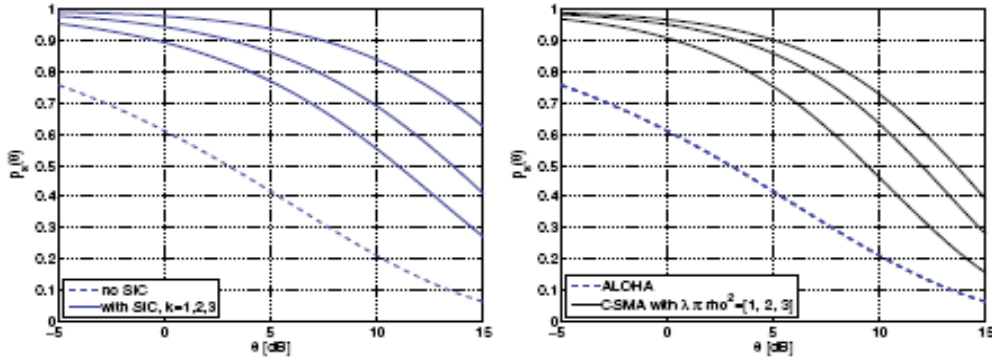
Οι δέκτες πολλαπλών χρηστών μπορούν να επιτύχουν σημαντικά υψηλότερη απόδοση μέσα σε ασύρματα δίκτυα. Η διαδοχική ακύρωση παρεμβολής (SIC) είναι ιδιαίτερα ελκυστική τεχνική όταν οι λαμβανόμενες ισχύεις από τους χρήστες διαφέρουν κατά ένα μεγάλο βαθμό [47, 38]. Σε ένα μεγάλο ασύρματο δίκτυο, μπορεί να έχουμε ουσιαστικά οφέλη εάν η παρεμβολή από έναν ή και παραπάνω από έναν από τους ισχυρότερους παρεμβολείς μπορούν να ακυρωθούν. Μια παρόμοια επίδραση όπως στην περίπτωση του CSMA μπορεί να πραγματοποιηθεί, χωρίς όμως τη μείωση της πυκνότητας πομπών. Προηγουμένως έχουμε μια έκφραση για τη κατανομή της παρεμβολής από κάθε μεμονωμένο παρεμβολέα (βλέπε (3.26)). Εντούτοις, εάν χρησιμοποιήσουμε αυτό το αποτέλεσμα στην παρούσα περίπτωση, η περίπτωση μας γίνεται πιο περίπλοκη διότι οι κατανομές απόστασης δεν είναι ανεξάρτητες. Οι ουρές πιθανοτήτων των μεμονωμένων ισχύων παρεμβολής της (3.27) μας δίνουν μια ένδειξη για το πόσο έντονη παραμένει η ουρά, εάν ορισμένος αριθμός κοντινών παρεμβολών ακυρώνεται, αλλά και πάλι αυτό δεν βοηθά με την ανάλυση των πιθανοτήτων διακοπής λειτουργίας.

Ο μετασχηματισμός Laplace της παρεμβολής από τους κοντινότερους πομπούς n τον αριθμό δίνεται στην (3.19) για Rayleigh εξασθένιση και $\delta = 1/2$. Ορίζουμε $p_s(\theta, I)$, $I \in \mathcal{N}$, να είναι η πιθανότητα επιτυχίας εάν οι i -οστοί κοντινότεροι παρεμβολείς $i \in I$, είναι παρόντες και ενεργοί. Από το $p_s(\theta, [n]) = L_{I_n}(\theta)$ ορίζουμε ως το ποσοστό συνεισφοράς του n -οστού παρεμβολέα στη διακοπή λειτουργίας από την

$$p_s(\theta, \{n\}) \triangleq \frac{p_s(\theta, [n])}{p_s(\theta, [n-1])}$$

και την πιθανότητα επιτυχίας όταν ακυρώνονται οι πλησιέστεροι k παρεμβολείς από την

$$p_s(\theta, \mathcal{N} \setminus [k]) \triangleq \frac{p_s(\theta, \mathcal{N})}{p_s(\theta, [k])}$$



Σχήμα 3.5 Αριστερό Σχήμα: Πιθανότητες επιτυχίας $p_s(\theta)$ από την (3.19) χωρίς SIC (διακεκομμένη καμπύλη) και με SIC των κοντινότερων 1, 2, και 3 παρεμβολέων με ακύρωση μέσα ένα δισδιάστατο δίκτυο με $\alpha = 4$ ($\delta = 1/2$) και $\lambda = 1/10$. Η καμπύλη με την υψηλότερη πιθανότητα επιτυχίας είναι αυτή όπου οι 3 κοντινότεροι παρεμβολείς ακυρώνονται. Δεξιό Σχήμα: Για λόγους σύγκρισης, οι πιθανότητες επιτυχίας για CSMA με αντίληψη των ακτίνων ρ που επιλέγονται, έτσι ώστε ο μέσος όρος των παρεμβολέων εντός της ακτίνας να είναι 1, 2, και 3. Συνεπώς, κατά μέσον όρο, το CSMA απαλείφει 1, 2, ή και 3 παρεμβολείς.

Χρησιμοποιώντας την (3.19), αυτές οι πιθανότητες μπορούν εύκολα να υπολογισθούν αριθμητικά. Το Σχήμα 3.5 (αριστερή εικόνα) παρουσιάζει τις πιθανότητες επιτυχίας για $k = 0$ (κανένα SIC) και $k = 1, 2, 3$. Είναι φανερό ότι η ακύρωση ακριβώς του πρώτου παρεμβολέα έχει δραστηκές επιπτώσεις. Εάν αντί των k κοντινότερων παρεμβολέων, οι k ισχυρότεροι από αυτούς (συμπεριλαμβανομένης της εξασθένισης) ακυρώνονταν, τότε το κέρδος SIC θα ήταν ελαφρώς μεγαλύτερο.

Μια διαφορετική εκδοχή δόθηκε στην [48], όπου η χωρητικότητα μετάδοσης υιοθετήθηκε για να διερευνηθεί η επίδραση του SIC στη διακοπή πιθανότητας λειτουργίας. Αντί του ορισμού των κερδών των κοντινότερων παρεμβολέων k τον αριθμό, οι συγγραφείς όρισαν μια ακτίνα ακύρωσης $\rho_k = \sqrt{k}/(\lambda\pi)$ (δισδιάστατο δίκτυο) και υπέθεσαν ότι όλοι οι παρεμβολείς που βρίσκονται μέσα σε αυτήν την ακτίνα ακυρώνονται. Το συγκεκριμένο πρότυπο περισσότερο μοιάζει με το CSMA πρότυπο με μια ζώνη προφύλαξης ρ . Έδειξαν ότι τα οφέλη είναι σημαντικά ακόμα και για το μικρό k εάν οι τεχνικές απλωμένου φάσματος χρησιμοποιηθούν, εφόσον η ακύρωση είναι σχεδόν τέλεια. Εάν δεν είναι τέλεια, δηλαδή, εάν η υπολειπόμενη παρεμβολή ϵI_k από τους κατεσταλμένους k τον αριθμό παρεμβολείς, τότε τα κέρδη είναι ουσιαστικά μικρότερα ακόμα κι αν $\epsilon \ll 1$.

Στο Σχήμα 3.5 (δεξιά εικόνα), δίνονται οι πιθανότητες επιτυχίας για CSMA με ζώνη φύλαξης ρ_k ακτίνων με $k = 1, 2, 3$ έτσι ώστε κατά μέσον όρο 1, 2, ή 3 παρεμβολείς να εμποδίζονται. Αυτές οι καμπύλες παρουσιάζουν καλή συμφωνία με αυτές για το SIC. Η διαφορά έγκειται στο γεγονός ότι με το SIC μπορούν ακόμα να υπάρξουν παρεμβολείς σχετικά κοντά, ενώ με το CSMA δεν είναι εγγυημένο ότι οποιοσδήποτε παρεμβολέας αμβλύνεται παντελώς.

3.8 Συσχέτιση παρεμβολής

Από την προηγούμενη ενότητα παρατηρούμε ότι η κατανομή παρεμβολής σε ένα Poisson δίκτυο δεν εξαρτάται από τη χωρική θέση λόγω της στασιμότητας της PPP. Ακόμα κι αν η κατανομή παρεμβολής είναι ίδια σε ολόκληρο το επίπεδο (στη διδιάστατη περίπτωση), η παρεμβολή δεν είναι ανεξάρτητη κατά μήκος του επιπέδου. Αυτό συμβαίνει επειδή η παρεμβολή προκαλείται από τον κοινό όρο τυχαιότητας, δηλαδή τη σημειακή διαδικασία Φ . Ο χωρικός και ο χρονικός συσχετισμός της παρεμβολής αγνοείται στη βιβλιογραφία, ή εξαιρείται λόγω της υπόθεσης ότι μία νέα πραγματοποίηση της σημειακής διαδικασίας σημείου γίνεται κάθε φορά που έχουμε μια χρονοθυρίδα [46]. Αυτή δεν είναι σαφώς η περίπτωση που συμβαίνει στα πρακτικά δίκτυα, και έτσι υπάρχει μια ανάγκη να αναλύσουμε τη δομή συσχετισμού της παρεμβολής, εφόσον η πραγματοποίηση της σημειακής διαδικασίας δεν μεταβάλλεται.

Δεδομένου ότι κάθε κόμβος σε ένα ασύρματο δίκτυο χρησιμοποιεί ένα πρωτόκολλο MAC για να αποφασίσει πότε να μεταδώσει ή πότε να λάβει, το σύνολο μεταδόσεων k τον αριθμό, που συμβολίζεται με Φ_k , αλλάζει με το χρόνο k μεν, αλλά είναι πάντα ένα υποσύνολο του Φ δε. Συνεπώς, η παρεμβολή είναι χρονικά συσχετισμένη εξαιτίας του συνόλου Φ . Σε αυτήν την ενότητα εξετάζουμε το ALOHA ως πρωτόκολλο του MAC σύμφωνα με το οποίο κάθε κόμβος διαβιβάζει την πιθανότητα ρ και λαμβάνει με $1 - \rho$ ανεξάρτητα από άλλους κόμβους. Παρατηρούμε ότι το ALOHA ως πρωτόκολλο του MAC δεν εισάγει καμία συσχέτιση επειδή και οι πομποί επιλέγονται ανεξάρτητα και στο χώρο αλλά και στο χρόνο. Εντούτοις η παρουσία του τυχαίου συνόλου Φ προκαλεί την παρεμβολή να έχει χρονική συσχέτιση.

Όταν $\ell(x) = \|x\|^{-\alpha}$ η παρεμβολή έχει μακριά ουρά με παράμετρο $2/\alpha$. Όπως αναφέρεταινωρίτερα η μέση παρεμβολή και οι υψηλότερες ροπές δεν είναι πεπερασμένες δεδομένου ότι ένας παρεμβάλλον πομπός μπορεί να είναι πολύ κοντά στο σημείο εκκίνησης (όπου η παρεμβολή υπολογίζεται). Συνεπώς, ο συντελεστής συσχέτισης δε μπορεί να οριστεί όταν οι ροπές δεν είναι πεπερασμένες. Ως εκ τούτου χρησιμοποιούμε ένα πρότυπο φραγής απωλειών διαδρομής και υπολογίζουμε το συντελεστή χωροχρονικής συσχέτισης με $\ell(x) = \|x\|^{-\alpha}$ ως την οριακή περίπτωση.

Η $\ell(x)$ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

- (1) Να εξαρτάται μόνο από το $\|x\|$.
- (2) Να φθίνει μονοτονικά ως προς $\|x\|$.
- (3) Να είναι ολοκληρώσιμη:

$$\int_0^{\infty} x\ell(x)dx < \infty. \quad (3.47)$$

Παραδείγματος χάριν, ένα έγκυρο πρότυπο απωλειών διαδρομής δίνεται

$$\ell_{\epsilon}(x) = \frac{1}{\epsilon + \|x\|^{\alpha}}, \quad \epsilon \in (0, \infty), \quad \alpha > 2. \quad (3.48)$$

Το τυποποιημένο πρότυπο απωλειών διαδρομής $\ell(x) = \|x\|^{-\alpha}$ λαμβάνεται με τη λήψη του ορίου $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ell_{\varepsilon}(x)$. Δεδομένου ότι στο ALOHA, κάθε κόμβος παίρνει απόφαση να μεταδώσει κάθε φορά ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες, το σύνολο των πομπών καθεμιά χρονική στιγμή είναι μια έκδοση της αρχικής PPP Φ , και η προκύπτουσα διαδικασία εκπομπής τη χρονική στιγμή k , Φ_k , είναι και αυτή PPP. Αυτή η παραδοχή μπορεί να ελεγχθεί μέσω της μηδενικής πιθανότητας:

Για οποιοδήποτε φραγμένο σύνολο $B \subset \mathbb{R}^2$, έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\Phi_k(B) = 0) &= \mathbf{E} \prod_{x \in \Phi \cap B} \mathbf{1}(x \text{ not a transmitter at time } k) \\ &\stackrel{(a)}{=} \prod_{x \in \Phi \cap B} \mathbf{P}(x \text{ not a transmitter at time } k) \\ &= \mathbf{E}[(1 - p)^{\Phi(B)}] \\ &\stackrel{(b)}{=} \exp(-\lambda p|B|). \end{aligned}$$

Η (a) ισχύει διότι κάθε κόμβος αποφασίζει να μην διαβιβάσει ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους. Δεδομένου ότι το Φ είναι μία PPP, η $\Phi(B)$ είναι μια τυχαία μεταβλητή Poisson με μέση τιμή $\lambda|B|$, και η (b) προκύπτει από τον τύπο της ροπογεννήτριας τυχαίας μεταβλητής Poisson. Από τα ανωτέρω παρατηρούμε ότι η μηδενική πιθανότητα της διαδικασίας εκπομπής τη χρονική στιγμή είναι ίση με $\exp(-p\lambda|B|)$, που αντιστοιχεί στην μηδενική πιθανότητα μίας PPP. Επίσης παρατηρούμε ότι η Φ_k έχει πυκνότητα $p\lambda$, αποτέλεσμα που συμφωνεί με τη διαίσθηση. Η παρεμβολή στο χρόνο k και θέση z δίνεται από

$$I_k(z) = \sum_{x \in \Phi} \mathbf{1}(x \in \Phi_k) h_{xz}(k) \ell(x - z). \quad (3.49)$$

Υποθέτουμε ότι η εξασθένιση είναι ανεξάρτητη χρονικά (block εξασθένισης) και επίσης χωρικά.

3.8.1 Χωροχρονική συσχέτιση της παρεμβολής

Υπολογίζουμε το συντελεστή συσχέτισης των τυχαίων μεταβλητών $I_k(u)$ και $I_l(v)$, $k \neq l$, $u \neq v$. Προκειμένου να υπολογιστούν οι από κοινού ροπές των παραπάνω τυχαίων μεταβλητών, θα πρέπει να υπολογισθεί πρώτα ο δισδιάστατος μετασχηματισμός Laplace των τυχαίων μεταβλητών $I_k(u)$ και $I_l(v)$ που θα χρησιμοποιηθούν.

Θεώρημα 3.1. Ο διδιάστατος μετασχηματισμός Laplace των $I_k(u)$ και $I_l(v)$, $k \neq l$ είναι

$$\mathcal{L}(s_1, s_2) = \exp \left(-\lambda \int_{\mathbb{R}^2} [1 - \xi(s_1, u - x)\xi(s_2, v - x)] dx \right),$$

όπου

$$\xi(s, x) = 1 - p + p\mathcal{L}_h(s\ell(x)),$$

και το L_h δείχνει το μετασχηματισμό Laplace της διαδικασίας εξασθένισης.

Απόδειξη. Η παρεμβολή κατά τη χρονική στιγμή k και θέση $u \in \mathbb{P}^2$ δίνεται από

$$I_k(u) = \sum_{x \in \Phi_k} h_{xu}(k)\ell(x - u),$$

και η παρεμβολή στη θέση $v \in \mathbb{P}^2$ κατά τη χρονική στιγμή l είναι

$$I_l(v) = \sum_{y \in \Phi_l} h_{yv}(l)\ell(y - v).$$

Συνεπώς, ο διδιάστατος μετασχηματισμός Laplace είναι

$$\mathcal{L}(s_1, s_2) = \mathbf{E} \exp \left[-s_1 \sum_{x \in \Phi_k} h_{xu}(k)\ell(x - u) - s_2 \sum_{y \in \Phi_l} h_{yv}(l)\ell(y - v) \right].$$

Ξαναγράφουμε το παραπάνω αποτέλεσμα ως ένα γινόμενο

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(s_1, s_2) &= \mathbf{E} \prod_{x \in \Phi} \exp(-s_1 \mathbf{1}(x \in \Phi_k) h_{xu}(k)\ell(x - u)) \\ &\quad \times \exp(-s_2 \mathbf{1}(x \in \Phi_l) h_{xv}(l)\ell(x - v)). \end{aligned}$$

Δεδομένου ότι στο ALOHA κάθε κόμβος αποφασίζει να μεταδώσει ανεξάρτητα από οποιοδήποτε άλλο κόμβο οποιαδήποτε χρονική στιγμή, έχοντας πάρει πρώτα τη μέση τιμή για το ALOHA, έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(s_1, s_2) &= \mathbf{E} \prod_{x \in \Phi} [1 - p + p \exp(-s_1 h_{xu}(k)\ell(x - u))] \\ &\quad \times [1 - p + p \exp(-s_2 h_{xv}(l)\ell(x - v))]. \end{aligned}$$

Επειδή η εξασθένιση υποτίθεται ότι είναι ανεξάρτητη χρονικά καθώς επίσης και χωρικά, υπολογίζουμε πρώτα την αναμενόμενη μέση τιμή σε σχέση με την εξασθένιση και παίρνουμε

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(s_1, s_2) &= \mathbb{E} \prod_{x \in \Phi} [1 - p + p\mathcal{L}_h(s_1 \ell(x - u))] [1 - p + p\mathcal{L}_h(s_2 \ell(x - v))] \\
 &= \mathbb{E} \prod_{x \in \Phi} \xi(s_1, x - u) \xi(s_2, x - v) \\
 &\stackrel{(c)}{=} \exp(-\lambda \int_{\mathbb{R}^2} [1 - \xi(s_1, x - u) \xi(s_2, x - v)] dx).
 \end{aligned}$$

Σημειώνεται ότι η τελευταία εξίσωση προκύπτει από τον ορισμό ροπογεννήτριας (PGFL) της PPP.

Η ανωτέρω απόδειξη μπορεί να γενικευτεί όταν χρειαστεί να υπολογισθεί ο μετασχηματισμός Laplace των τυχαίων μεταβλητών, m τον αριθμό, $\{I_{k_1}(u_1), \dots, I_{k_m}(u_m)\}$, $k_1 \neq k_2, \dots, \neq k_m$ και $u_1 \neq u_2, \dots, \neq u_m$:

$$\mathcal{L}_{I_K}(s_1, \dots, s_m) = \exp \left(-\lambda \int_{\mathbb{R}^2} \left[1 - \prod_{i=1}^m \xi(s_i, x - u_i) \right] dx \right).$$

Στο ανωτέρω θεώρημα, έχουμε εξετάσει την παρεμβολή σε δύο διαφορετικές χρονοθυρίδες (time slots) και δυο επίσης διαφορετικές θέσεις.

Από μια παρόμοια προσέγγιση όπως στο θεώρημα ανωτέρω, ο μετασχηματισμός Laplace των τυχαίων μεταβλητών $I_k(u)$ και $I_k(v)$, δηλαδή της παρεμβολή την ίδια χρονική στιγμή αλλά σε διαφορετικές θέσεις μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι

$$\mathcal{L}_{I(u)I(k)}(s_1, s_2) = \exp \left(-\lambda \int_{\mathbb{R}^2} [1 - \mathcal{L}_h(s_1 \ell(x - u)) \mathcal{L}_h(s_2 \ell(x - v))] dx \right). \quad (3.50)$$

Ο μέσος όρος της παρεμβολής είναι

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}I_k(u) &= -\frac{\partial}{\partial s_1} \mathcal{L}(s_1, 0) \Big|_{s_1=0} \\
 &= -\frac{\partial}{\partial s_1} \exp \left(-\lambda \int_{\mathbb{R}^2} [1 - \xi(s_1, x - u) \xi(0, x - v)] dx \right) \Big|_{s_1=0} \\
 &= \lambda p \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial}{\partial s_1} \mathcal{L}_h(s_1 \ell(x - u)) dx \Big|_{s_1=0} \\
 &= p\lambda \mathbb{E}[h] \int_{\mathbb{R}^2} \ell(x - u) dx \\
 &= p\lambda \int_{\mathbb{R}^2} \ell(x) dx, \quad (3.51)
 \end{aligned}$$

επειδή $\mathbb{E}[h] = 1$. Η δεύτερη ροπή της παρεμβολής είναι

$$\mathbb{E}[I_k(u)^2] = \frac{\partial^2}{\partial s_1^2} \mathcal{L}(s_1, 0) \Big|_{s_1=0},$$

και μετά από απλές αλγεβρικές πράξεις, η δεύτερη στιγμή δίνεται από

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[I_k(u)^2] &= p\mathbb{E}[h^2]\lambda \int_{\mathbb{R}^2} \ell^2(x)dx \\ &+ p^2\mathbb{E}[h]^2\lambda^2 \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \ell(x)\ell(y)dxdy. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Όταν οι απώλειες διαδρομής δίνονται από $\ell_\epsilon(X)$ και η εξασθένιση είναι Rayleigh, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ανωτέρω θεώρημα για να λάβουμε το μετασχηματισμό Laplace της παρεμβολής ως εξής:

$$\mathcal{L}_{I_\bullet}(s) = \exp\left(-\pi\lambda ps(\epsilon + s)^{\delta-1} \frac{\pi\delta}{\sin(\pi\delta)}\right),$$

όπου $\delta = 2/a$.

Η μέση τιμή και η διασπορά δεν εξαρτώνται είτε από τη θέση είτε από τη χρονική στιγμή (δείκτη χρόνου). Όταν η εξασθένιση ακολουθεί μία Nakagami- m κατανομή και το πρότυπο απωλειών διαδρομής δίνεται από $\ell_\epsilon(X)$, η διασπορά της παρεμβολής προκύπτει από την (3.51) και την (3.52) και είναι

$$\text{var}[I_k(u)] = \frac{p\lambda\pi}{\epsilon^{2-\delta}} \frac{\pi\delta}{\sin(\pi\delta)} (1-\delta)(1+m^{-1}).$$

Παρατηρούμε ότι η διασπορά είναι μέγιστη, όταν υπάρχει εξασθένιση Rayleigh και ελάχιστη ακριβώς στο μισό του μεγίστου όταν δεν υπάρχει καμία εξασθένιση (δηλαδή, όταν $m = \infty$). Όπως αναμένεται, ο μέσος όρος και η διαφορά αποκλίνουν όταν $\epsilon = 0$. Η μέση τιμή του γινομένου $I_k(u)$ με $I_l(v)$ κατά τις χρονικές στιγμές k και l , $k \neq l$, η όποια απαιτείται για τον υπολογισμό του συντελεστή συσχέτισης, είναι

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[I_k(u)I_l(v)] &= \frac{\partial^2}{\partial s_2 \partial s_1} \mathcal{L}(s_1, s_2) \Big|_{(s_1, s_2) = (0, 0)} \\ &= p^2\lambda \int_{\mathbb{R}^2} \ell(x-u)\ell(x-v)dx + \lambda^2 p^2 \left(\int_{\mathbb{R}^2} \ell(x)dx \right)^2. \end{aligned}$$

Λήμμα 3.2. Ο χωροχρονικός συντελεστής συσχέτισης των παρεμβολέων $I_k(u)$ και $I_l(v)$, $k \neq l$, για το ALOHA και απωλειών διαδρομής $\ell(x)$ που ικανοποιούν την (3.47) είναι

$$\zeta(u, v) = \frac{p \int_{\mathbb{R}^2} \ell(x)\ell(x - \|u - v\|)dx}{\mathbb{E}[h^2] \int_{\mathbb{R}^2} \ell^2(x)dx}. \quad (3.53)$$

Απόδειξη. Δεδομένου ότι $I_k(u)$ και το $I_l(v)$ κατανέμονται όμοια, έχουμε

$$\zeta(u, v) = \frac{\mathbb{E}[I_k(u)I_l(v)] - \mathbb{E}[I_k(u)]^2}{\mathbb{E}[I_k(u)^2] - \mathbb{E}[I_k(u)]^2}.$$

Με την αντικατάσταση για τις ανωτέρω ποσότητες έχουμε

$$\begin{aligned} \zeta(u, v) &= \frac{P \int_{\mathbb{R}^2} \ell(x-u)\ell(x-v)dx}{\mathbb{E}[h^2] \int_{\mathbb{R}^2} \ell^2(x)dx} \\ &\stackrel{(a)}{=} \frac{P \int_{\mathbb{R}^2} \ell(x)\ell(x-\|u-v\|)dx}{\mathbb{E}[h^2] \int_{\mathbb{R}^2} \ell^2(x)dx}, \end{aligned} \quad (3.54)$$

όπου η (a) συνεπάγεται από την αντικατάσταση $y = x-u$ και το γεγονός ότι η $\ell(x)$ εξαρτάται μόνο από το $\|x\|$.

Παρατηρούμε ότι ο συντελεστής συσχέτισης δεν εξαρτάται από τις k και l και είναι ίδιος για οποιεσδήποτε δύο χρονικές στιγμές. Από την (3.50) λαμβάνουμε από το ακόλουθο λήμμα τη χωρική συσχέτιση:

Λήμμα 3.3. Ο χωρικός συντελεστής συσχέτισης της παρεμβολής, δηλαδή, ο συντελεστής συσχέτισης των $I_k(u)$ και $I_k(v)$, $u \neq v$, είναι

$$\zeta_s(u, v) = \frac{\int_{\mathbb{R}^2} \ell(x)\ell(x-\|u-v\|)dx}{\mathbb{E}[h^2] \int_{\mathbb{R}^2} \ell^2(x)dx}. \quad (3.55)$$

Θέτοντας $\|u-v\| = 0$ στο Λήμμα 3.2, λαμβάνουμε το χρονικό συντελεστή συσχέτισης:

Λήμμα 3.4. Ο χρονικός συντελεστής συσχέτισης για το ALOHA είναι

$$\zeta_t = \frac{P}{\mathbb{E}[h^2]}, \quad (3.56)$$

ανεξάρτητος $\ell(x)$. Όταν η εξασθένιση είναι Nakagami- m , ο συντελεστής συσχέτισης είναι $\zeta_t = pm / m + 1$. Ειδικότερα, για $m = 1$ (Rayleigh εξασθένιση), ο χρονικός συντελεστής συσχέτισης είναι $p/2$ και για $m \rightarrow \infty$ (καμία εξασθένιση), γίνεται p .

Ως εκ τούτου η συσχέτιση αυξάνεται με αυξανόμενο m , δηλαδή, η εξασθένιση μειώνει τη συσχέτιση, αποτέλεσμα που είναι διαισθητικά σωστό. Σημειώνουμε ότι στην ανωτέρω απόδειξη, το ολοκλήρωμα $\int_{\mathbb{R}^2} \ell^2(x)dx$ δεν ορίζεται όταν $\ell(x) = \|x\|^{-\alpha}$, αλλά μπορούμε να

χρησιμοποιήσουμε τη $\ell_\varepsilon(x)$ και να πάρουμε το όριο καθώς $\varepsilon \rightarrow 0$. Κατόπιν, υπολογίζουμε τη συσχέτιση για την οριακή ($\varepsilon \rightarrow 0$) περίπτωση απωλειών διαδρομής $\ell_\varepsilon(x)$.

Λήμμα 3.5. Ορίζουμε το πρότυπο απωλειών διαδρομής ως $\ell_\varepsilon(x) = 1 / (\varepsilon + \|x\|^\alpha)$. Όταν το $u \neq v$, η συσχέτιση είναι

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \zeta_\varepsilon(u, v) = 0.$$

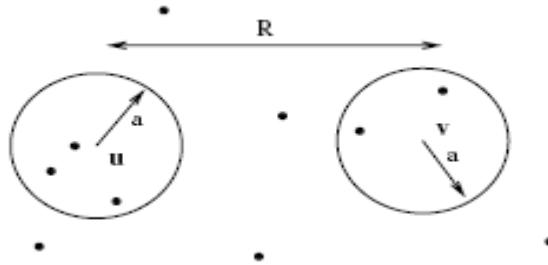
Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned} \zeta_\varepsilon &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{\mathbb{R}^2} \ell_\varepsilon(x-u) \ell_\varepsilon(x-v) dx}{\mathbf{E}[h^2] \int_{\mathbb{R}^2} \ell_\varepsilon^2(x) dx} \\ &\stackrel{(a)}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{P \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{1+\|x-u\varepsilon^{-1/\alpha}\|^\alpha} \frac{1}{1+\|x-v\varepsilon^{-1/\alpha}\|^\alpha} dx}{\mathbf{E}[h^2] \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{1+\|x\|^\alpha}\right)^2 dx} \\ &= 0, \end{aligned}$$

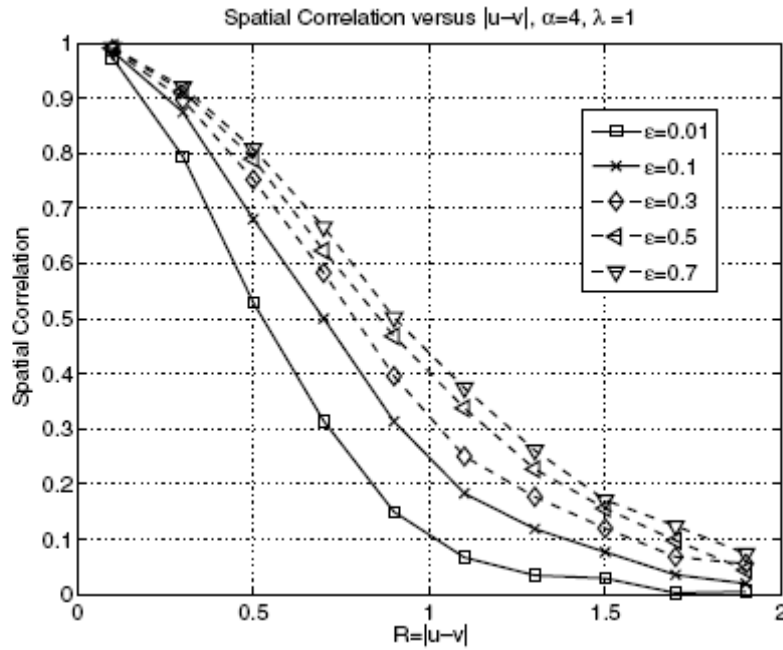
όπου η (α) προκύπτει από αλλαγή των μεταβλητών.

Ο μηδενικός συντελεστής συσχέτισης είναι ένα τεχνούργημα του μοντέλου “Stop Loss”, δηλαδή της μείωσης της πυκνότητας της ενέργειας καθώς αυτή μεταδίδεται στο κενό. Όταν οι απώλειες διαδρομής είναι $\|x\|^{-\alpha}$, ο συντελεστής συσχέτισης ορίζεται από τις στατιστικές πρώτου βαθμού, οι οποίες έχουν κυρίαρχο όρο την παρεμβολή σε μια α -περιοχή όπου $u, v, \alpha > 0$ (βλέπε Σχήμα 3.6). Για $\alpha < \|u-v\|/2$, οι παρεμβολές I_u^α και I_v^α γίνονται ανεξάρτητες.

Ακόμα και όταν $\zeta(u, v) = 0$, οι $I_k(u)$ και $I_l(v)$ δεν είναι ανεξάρτητες. Πράγματι, ο δισδιάστατος μετασχηματισμός Laplace του Θεωρήματος 3.1 δεν παραγοντοποιεί στην περίπτωση του παθογενούς πρότυπου απωλειών διαδρομής. Στο Σχήμα 3.7, η χωρική συσχέτιση δίνεται ως συνάρτηση $\|u-v\|$ για διαφορετικές τιμές του ε .



Σχήμα 3.6 Για οποιαδήποτε δύο u και v σημεία, επιλέγουμε $\alpha < \|u-v\|/2$. Κατόπιν οι θέσεις των κόμβων στο $b(u, \alpha)$ και στο $b(v, \alpha)$ είναι ανεξάρτητες. Δεδομένου ότι η παρεμβολή εξουσιάζεται από τον κοντινότερο παρεμβολέα όταν οι απώλειες διαδρομής είναι παθογενείς, οι I_u^α και I_v^α είναι ανεξάρτητες, δίνοντας έτσι μηδενική συσχέτιση.



Σχήμα 3.7 Κανονικοποιημένη χωρική συσχέτιση $\zeta(u, v) / \rho$ έναντι του όρου $\|u-v\|$, όταν το πρότυπο απωλειών διαδρομής δίνεται από την $\ell_\epsilon(x)$, $\lambda=1$ και $\alpha = 4$. Παρατηρούμε ότι η $\zeta_s(u, v) \rightarrow 0$, $u \neq v$, όταν $\epsilon \rightarrow 0$ (από [14] © 2009 IEEE).

3.8.2 Χρονικός συσχετισμός των διακοπών λειτουργίας συνδέσεων

Στις τυποποιημένες αναλύσεις των αναμεταδόσεων μέσα σε ένα αδόμητο και ασύρματο σύστημα, οι αποτυχίες συνδέσεων υποτίθεται ότι ήταν ασυσχετίστες με το χρόνο. Αλλά αυτό δεν είναι σωστό, δεδομένου ότι η παρεμβολή είναι χρονικά συσχετισμένη. Σκοπός μας συνεπώς είναι η εύρεση της υπό-συνθήκη πιθανότητας των συνδέσεων υποθέτοντας ότι έχει γίνει μία επιτυχής μετάδοση.

Υποθέτουμε ότι ένας πομπός, που βρίσκεται στο σημείο εκκίνησης, έχει προορισμό το χωρικό σημείο $z \in P^2$. Έστω A_k το γεγονός ότι ο πομπός είναι σε θέση να συνδεθεί με τον προορισμό z του τη χρονική στιγμή k . Με άλλα λόγια,

$$SIR = \frac{h_{oz}(k)\ell(z)}{I_k(z)} > \theta.$$

Για λόγους ευκολίας υποθέτουμε ότι η εξασθένιση είναι Rayleigh (παρόμοιες μέθοδοι μπορούν να χρησιμοποιηθούν για εξασθένιση Nakagami- m). Υπολογίζουμε κατόπιν τώρα την από κοινού ή συνδυαστική πιθανότητα επιτυχίας $P(A_k, A_l)$, $k \neq l$, και έχουμε

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{P}(A_k, A_l) \\
 &= \mathbb{P}(h_{oz}(k) > \theta_z I_k(z), h_{oz}(l) > \theta_z I_l(z)) \\
 &\stackrel{(a)}{=} \mathbb{E}[\exp(-\theta_z I_k(z)) \exp(-\theta_z I_l(z))] \\
 &= \mathbb{E}\left[\exp\left(-\theta_z \sum_{x \in \Phi} \ell(x) [\mathbf{1}(x \in \Phi_k) h_{xz}(k) + \mathbf{1}(x \in \Phi_l) h_{xz}(l)]\right)\right] \\
 &\stackrel{(b)}{=} \mathbb{E}\left[\prod_{x \in \Phi} \left(\frac{p}{1 + \theta_z \ell(x)} + 1 - p\right)^2\right] \\
 &\stackrel{(c)}{=} \exp\left(-\lambda \int_{\mathbb{R}^2} 1 - \left(\frac{p}{1 + \theta_z \ell(x)} + 1 - p\right)^2 dx\right), \quad (3.57)
 \end{aligned}$$

όπου $\theta_z = \theta / \ell(z)$. Σημειώνεται ότι η (a) προκύπτει από την ανεξαρτησία των $h_{oz}(k)$ και $h_{oz}(l)$, για $k \neq l$, η (b) ισχύει λόγω της μέσης τιμής των όρων $h_{xz}(k)$, $h_{xz}(l)$ και της παραμέτρου p του ALOHA, και η (c) προκύπτει από τη ροπογεννήτρια της PPP. Ομοίως, έχουμε

$$\mathbb{P}(A_l) = \exp\left(-\lambda \int_{\mathbb{R}^2} 1 - \left(\frac{p}{1 + \theta_z \ell(x)} + 1 - p\right) dx\right).$$

Συνεπώς, η μεν υπό-συνθήκη πιθανότητα είναι

$$\mathbb{P}(A_k | A_l) = \exp\left(-\lambda \int_{\mathbb{R}^2} \frac{p\theta_z \ell(x)}{1 + \theta_z \ell(x)} - \left(\frac{p\theta_z \ell(x)}{1 + \theta_z \ell(x)}\right)^2 dx\right).$$

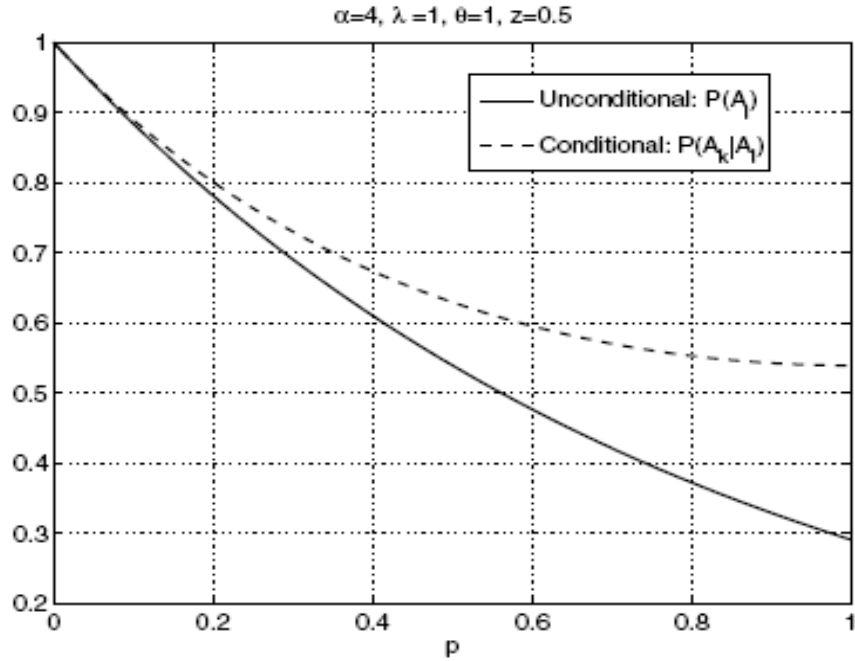
Ο λόγος δε της υπό-συνθήκη πιθανότητας προς την αδέσμευτη πιθανότητα δίνεται από

$$\begin{aligned}
 \frac{\mathbb{P}(A_k | A_l)}{\mathbb{P}(A_l)} &= \frac{\mathbb{P}(A_k, A_l)}{\mathbb{P}(A_l)^2} \\
 &= \exp\left(\lambda p^2 \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{\theta_z \ell(x)}{1 + \theta_z \ell(x)}\right)^2 dx\right) \\
 &> 1. \quad (3.58)
 \end{aligned}$$

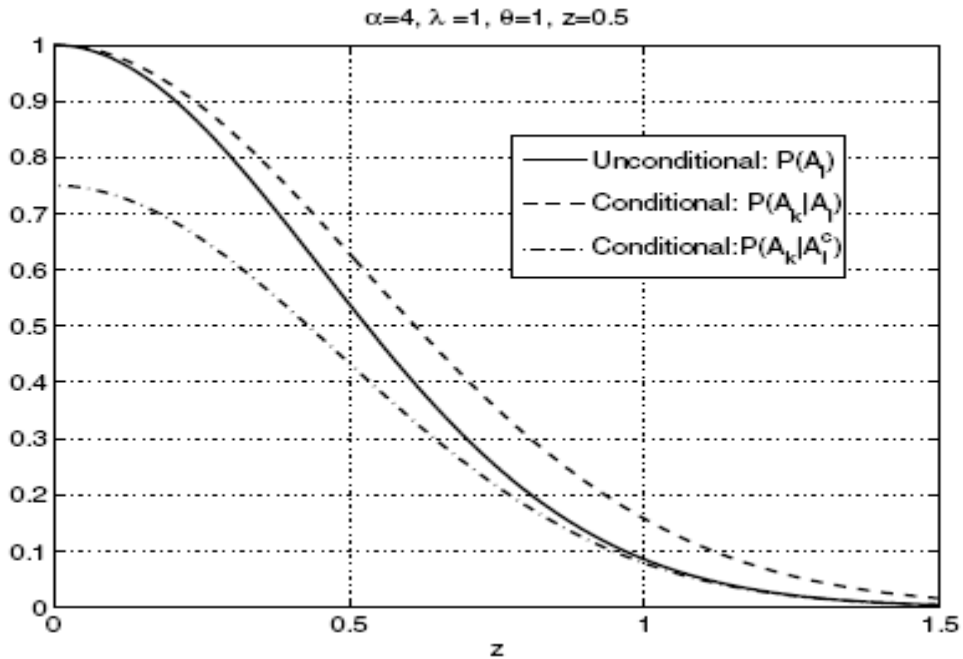
Όταν $\ell(x) = \|x\|^{-\alpha}$, έχουμε

$$\frac{\mathbb{P}(A_k | A_l)}{\mathbb{P}(A_l)} = \exp\left(p^2 \lambda \pi \|z\|^2 (1 - \delta) \frac{\pi \delta}{\sin(\pi \delta)} \theta^\delta\right),$$

όπου $\delta = 2/\alpha$. Τα Σχήματα 3.8 και 3.9 δίνουν τις υπό-συνθήκη και αδέσμευτες πιθανότητες επιτυχών συνδέσεων εναντίον των παραμέτρων (του ALOHA) p και z , αντίστοιχα.



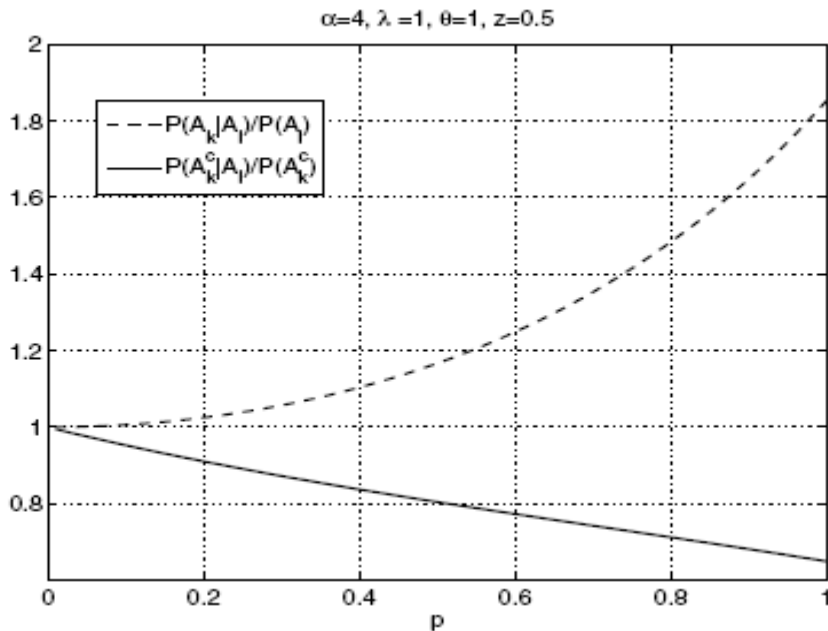
Σχήμα 3.8 Οι πιθανότητες $P(A_k|A_l)$ και $P(A_l)$ εναντίον της παραμέτρου p του ALOHA και όπου $\lambda = 1, \ell(x) = \|x\|^{-4}, z = 0,5$, και $\theta = 1$ (από [14] © 2009 IEEE).



Σχήμα 3.9 Οι πιθανότητες $P(A_k|A_l)$ και $P(A_l)$ εναντίον της απόστασης z με $\lambda = 1, \ell(x) = \|x\|^{-4}, p = 0,5$, και $\theta = 1$.

Από τα θεωρητικά αποτελέσματα και σχετικά Σχήματα παρατηρούμε τα ακόλουθα:

- (1) Οι συνδέσεις συσχετίζονται χρονικά (βλέπε την (3.58)).
- (2) Εάν μια μετάδοση είναι πετυχημένη τη χρονική στιγμή k , τότε υπάρχει μεγάλη πιθανότητα να γίνει μια ορθή μετάδοση την επόμενη χρονική στιγμή l .
- (3) Από την (3.58) έχουμε επίσης ότι $P(A_k^c | A_\ell^c) > P(A_\ell^c)$. Συνεπώς, μια σύνδεση που έχει διακοπή λειτουργίας είναι πιθανότερο να παραμείνει σε διακοπή λειτουργίας και ως εκ τούτου η στρατηγική που θα πρέπει να ακολουθηθεί είναι είτε να μειώσει το ρυθμό μετάδοσης είτε να αλλάξει την πυκνότητα των πομπών παρά να γίνει αναμετάδοση στα "τυφλά".
- (4) Ο λόγος $P(A_k/A_l) / P(A_l)$ πάντα αυξάνεται με τις θ , λ , p , και $\|z\|$. Η αύξηση σε λ και p είναι λόγω του μεγαλύτερου συνόλου κόμβων προς μετάδοση εξαιτίας του οποίου η πιθανότητα του ίδιου υποσυνόλου των κόμβων να μεταδίδουν σε διαφορετικές χρονικές στιγμές αυξάνεται. Με αυτόν τον τρόπο λειτουργίας έχουμε μεγαλύτερη συσχέτιση. Όταν η θ παίρνει μεγάλες τιμές, τότε η διακοπή λειτουργίας είναι απόρροια της παρεμβολής από τις μεταδόσεις που γίνονται από ένα μεγαλύτερο αριθμό κόμβων. Παρόμοια, ο συσχετισμός αυξάνεται.



Σχήμα 3.10 Οι πιθανότητες $P(A_k/A_l) / P(A_l)$ και $P(A_k^c/A_l^c) / P(A_l^c)$ έναντι της παραμέτρου του ALOHA p . Με $\lambda = 1$, $\ell(x) = \|x\|^{-4}$, $z = 0,5$, και $\theta = 1$.

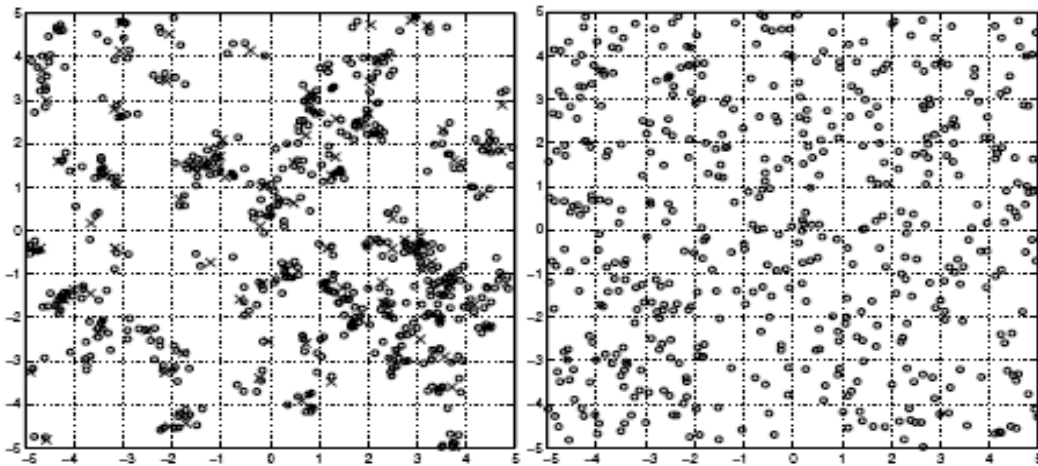
- (5) Από το Σχήμα 3.10 συνεπάγεται ότι ο λόγος $P(A_k/A_l) / P(A_l)$ αυξάνεται με την αύξηση της p . Ταυτόχρονα ο λόγος $P(A_k^c/A_l^c) / P(A_l^c)$ μειώνεται καθώς η p αυξάνεται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Παρεμβολή στα συμπλεγματικά δίκτυα (ή δίκτυα συστάδων) Poisson

Στο προηγούμενο κεφάλαιο αναλύσαμε την παρεμβολή όταν σύνολο πομπών που μεταδίδουν είναι μια PPP. Εάν και αυτή η υπόθεση ισχύει για ορισμένα δίκτυα, είναι πιθανότερο η κατανομή κόμβων να μην είναι μια γνήσια διαδικασία τυχαία κατανομημένη στο χώρο (CSR). Με άλλα λόγια, οι κόμβοι μπορεί να ανήκουν σε συμπλέγματα ή ισοδύναμα, να διαμορφώνουν συστάδες. Επιπλέον, ακόμα κι αν ολόκληρο το σύνολο κόμβων κατανέμεται ως μια PPP, το υποσύνολο των ενεργών κόμβων μπορεί να μην είναι ομοιογενώς Poisson κατανομημένο. Αντίθετα, το σύνολο των ενεργών κόμβων μπορεί να είναι συμπλεγματικό ή πιο ομαλά τακτοποιημένο.

Το σύμπλεγμα των ενεργών κόμβων μπορεί να οφείλεται σε γεωγραφικούς παράγοντες. Για παράδειγμα, σε μια κοινωνική εκδήλωση οι άνθρωποι τείνουν να συγκεντρώνονται σε μικρές ομάδες. Επίσης, σε ένα πεδίο μάχης οι στρατιώτες κινούνται σε μικρές ομάδες με συντονισμένο τρόπο ή σε μια κεντρική περιοχή κάποιας μεγαλούπολης οι ασύρματοι κόμβοι βρίσκονται συγκεντρωμένοι μέσα σε κτίρια έτσι ώστε να αποτελούν ένα σύμπλεγμα. Επιπλέον, σε ένα γνωσιακό δίκτυο, οι ενεργοί γνωστικοί χρήστες τείνουν να ομαδοποιηθούν σε συστάδες. Η συγκέντρωση μπορεί να γίνει με τεχνητό τρόπο από τα πρωτόκολλα του MAC. Ονομάζουμε την πρώτη ομάδα γεωγραφική συστάδα και τη δεύτερη ομάδα λογική συστάδα (βλέπε επίσης το Σχήμα 4.1). Σημειώνεται ότι τα οφέλη των τυχαία τακτοποιημένων μεταδόσεων σε σύγκριση με τις μεταδόσεις εντός συστάδων δεν είναι εκ των προτέρων σαφή. Σκοπός του παρόντος κεφαλαίου είναι η ανάλυση των δικτύων όταν οι κόμβοι κατανέμονται ως συστάδες Poisson.

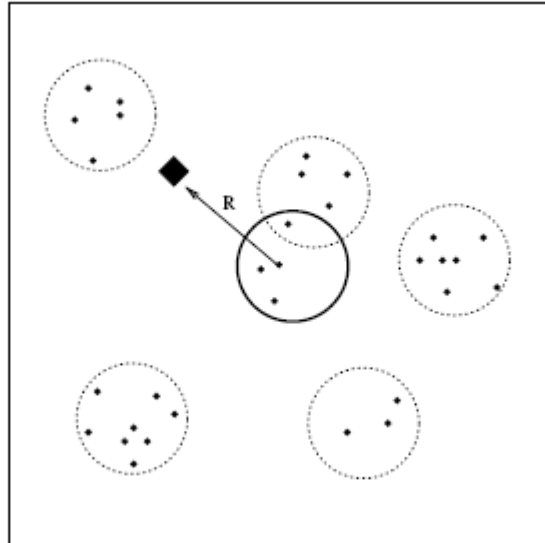


Σχήμα 4.1 (Αριστερό Σχήμα) Διαδικασία συστάδων Thomas με παραμέτρους $\lambda_p = 1$, $\bar{c} = 5$ και $\sigma = 0,2$. Οι σταυροί δείχνουν τα γονικά σημεία (parent points).

(Δεξιό Σχήμα) Η αντίστοιχη διαδικασία PPP με την ίδια ένταση $\lambda = 5$ (από [13] © 2009 IEEE).

Πρότυπο συστημάτων. Η θέση των ενεργών κόμβων μοντελοποιείται ως μια στάσιμη και ισοτροπική διαδικασία συστάδας Poisson [45] Φ στο χώρο P^2 . Υποθέτουμε ότι ο πομπός (που ανήκει στη σημειακή διαδικασία μετάδοσης Φ) βρίσκεται στο σημείο εκκίνησης και ο αντίστοιχος δέκτης (όπου μετράμε την παρεμβολή) βρίσκεται στο σημείο z με $\|z\|=R$. Ο δέκτης δεν ανήκει στην προαναφερθείσα διαδικασία διότι διαφορετικά θα ήταν δύσκολο να επιλέξουμε τα ζεύγη πομπών—δεκτών. Το Σχήμα 4.2 παρέχει ένα παράδειγμα της παραπάνω λειτουργίας.

Κάθε πομπός υποτίθεται ότι μεταδίδει με μοναδιαία ισχύ και η λαμβανόμενη ισχύς σε έναν δέκτη που βρίσκεται στο σημείο z από έναν πομπό που βρίσκεται στο σημείο x μοντελοποιείται ως $h_x \ell(x-z)$, όπου h_x είναι ο συντελεστής εξασθένησης ισχύος που σχετίζεται με το κανάλι μεταξύ των κόμβων x και z που είναι ανεξάρτητοι και εκθετικά κατανομημένοι (Rayleigh εξασθένιση). Υποθέτουμε ότι το πρότυπο απωλειών διαδρομής $\ell(x): P^2 \setminus \{0\} \rightarrow P^+$ είναι μία συνεχής, θετική, και μη αυξανούσα συνάρτηση του $\|x\|$.



Σχήμα 4.2 Απεικόνιση του μοντέλου διαδικασίας συστάδας Matern. Τα μικρά μαύρα σημεία αντιπροσωπεύουν τους πομπούς, οι οποίοι διαμορφώνουν μια διαδικασία Φ συστάδων Matern. Υποτίθεται ότι υπάρχει ένας κόμβος που ανήκει στη Φ και βρίσκεται στο σημείο εκκίνησης, και αναπαριστά τον ενεργό πομπό. Ο αντίστοιχος δέκτης (που έχει σχήμα τετράγωνου) είναι σε απόσταση R και δεν ανήκει στη Φ . Η ύπαρξης ενός πομπού στο σημείο εκκίνησης δημιουργεί μία συστάδα γύρω από αυτό (ο έντονος κύκλος στο σχήμα).

Επίσης, η παρεμβολή στο σημείο z δίνεται από

$$I_{\Phi}(z) = \sum_{x \in \Phi \setminus \{o\}} h_x \ell(x - z). \quad (4.1)$$

Εστιάζουμε στις διαδικασίες συστάδας Matern και στις διαδικασίες συστάδας Thomas, οι όποιες ανήκουν στην κατηγορία των διαδικασιών συστάδας Neyman—Scott. Η διαδικασία συστάδας αποτελείται από μια γονική PPP $\Phi_p = \{x_1, x_2, \dots\}$ με πυκνότητα λ_p . Οι συστάδες είναι της μορφής $N_{x_i} = N_i + x_i, \forall x_i \in \Phi_p$. Οι N_i είναι μια οικογένεια ανεξάρτητων και ιδιοκατανεμημένων σημειακών συνόλων και επίσης ανεξάρτητη από τη γονική διαδικασία. Δεδομένου ότι όλες οι συστάδες είναι όμοια κατανεμημένες, μπορούμε να έχουμε μια αντιπροσωπευτική συστάδα με την ίδια κατανομή όπως αυτή της διαδικασίας συστάδων. Αυτή η αντιπροσωπευτική συστάδα συμβολίζεται με N_o .

Στις διαδικασίες συστάδων Matern και Thomas, ο αριθμός σημείων στην αντιπροσωπευτική συστάδα είναι κατανεμημένος σύμφωνα με το νόμο Poisson με μέση τιμή c . Τα σημεία απογόνων της αντιπροσωπευτικής συστάδας N_o είναι διεσπαρμένα ανεξάρτητα και με την ίδια χωρική κατανομή

$$F_{cl}(A) = \int_A f_{cl}(x) dx, \quad A \subset \mathbb{R}^2,$$

γύρω από το σημείο εκκίνησης. Για τη διαδικασία συστάδας Matern κάθε σημείο είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο μέσα σε μια σφαίρα ακτίνας a . Συνεπώς, η πυκνότητα $f_{cl}(x)$ δίνεται από

$$f_{cl}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi a^2}, & \|x\| \leq a \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (4.2)$$

Αντίθετα, για τη διαδικασία συστάδας Thomas, κάθε σημείο είναι διεσπαρμένο σύμφωνα με μία (συμμετρική) κανονική κατανομή με διασπορά σ^2 . Άρα σε αυτήν την περίπτωση η $f_{cl}(x)$ δίνεται από

$$f_{cl}(x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{2\sigma^2}\right).$$

Συνεπώς, η διαδικασία Φ δίνεται από

$$\Phi = \bigcup_{x \in \Phi_p} N_x,$$

με ροπογεννήτρια που δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}[\nu] &\triangleq \mathbb{E} \left[\prod_{x \in \Phi} \nu(x) \right] \\ &= \exp \left(-\lambda_p \int_{\mathbb{R}^d} 1 - M \left(\int_{\mathbb{R}^d} \nu(x+y) f_{cl}(x) dx \right) \right), \end{aligned}$$

όπου $M(z) = \exp(\bar{c}(z-1))$. Η πυκνότητα δεύτερης τάξης του γινομένου μιας διαδικασίας συστάδας Matern και μιας διαδικασίας συστάδας Thomas δίνεται από την

$$\rho^{(2)}(z) = \lambda_p \bar{c}^2 [(f_{cl} * f_{cl})(z) + \lambda_p]. \quad (4.3)$$

Σημειώνεται ότι στην [45, Παράγραφος 5.3] δίνεται μια λεπτομερής περιγραφή των σημειακών διαδικασιών συμπλέγματος.

4.1 Στατιστική περιγραφή της παρεμβολής

Σε αυτή την ενότητα θα δώσουμε τη στατιστική περιγραφή της παρεμβολής όταν οι πομποί κατανέμονται όπως μια διαδικασία PCP. Συγκεκριμένα, θα παραγάγουμε τις ιδιότητες της παρεμβολής κάτω από την προϋπόθεση ότι ο επιθυμητός πομπός τοποθετείται στο σημείο εκκίνησης.

Σε αντίθεση με το μοντέλο PPP, όπου τοποθετείται ένας πρόσθετος πομπός στο σημείο εκκίνησης και, ακόμα κι αν δεν συμβάλλει στην παρεμβολή, η κατανομή της παρεμβολής γίνεται χρονικά μεταβαλλόμενη. Με άλλα λόγια, η κατανομή της παρεμβολής $I_\Phi(z)$ εξαρτάται από τη z . Η μέση τιμή της παρεμβολής (υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχει ένα σημείο της διαδικασίας στο σημείο εκκίνησης) είναι

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{lo}[I_\Phi(z)] &= \mathbb{E}^{lo} \left[\sum_{x \in \Phi} h_x \ell(x-z) \right] \\ &= \mathbb{E}[h] \lambda \int_{\mathbb{R}^2} \ell(x-z) \mathcal{K}_2(dx), \end{aligned} \quad (4.4)$$

όπου το \mathcal{K}_2 είναι το μέτρο ροπής δεύτερης τάξης και E^{lo} είναι η μέση τιμή όσον αφορά το μέτρο Palm. Ισοδύναμα, έχουμε

$$\mathbb{E}^{lo}[I_\Phi(z)] = \frac{\mathbb{E}[h]}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^2} \ell(x-z) \rho^{(2)}(x) dx. \quad (4.5)$$

Παράδειγμα: Thomas Cluster Process. Σε αυτήν την περίπτωση, από την [45, σελ.160], έχουμε

$$\frac{\rho^{(2)}(x)}{\lambda^2} = 1 + \frac{1}{4\pi\lambda_p\sigma^2} \exp\left(\frac{-\|x\|^2}{4\sigma^2}\right),$$

όπου $\lambda = \lambda_p \bar{c}$. Και η (4.5) γίνεται

$$\mathbf{E}^{lo}[I_{\Phi}(z)] = \mathbf{E}I_{\text{Poi}(\lambda)} + \frac{\bar{c}\mathbf{E}[h]}{4\pi\sigma^2} \int_{\mathbb{R}^2} \ell(x-z) \exp\left(\frac{-\|x\|^2}{4\sigma^2}\right) dx. \quad (4.6)$$

$\mathbf{E}I_{\text{Poi}(\lambda)}$ είναι η μέση τιμή της παρεμβολής όταν οι κόμβοι κατανέμονται ως PPP με ένταση λ . Σημειώνεται ότι η $\mathbf{E}I_{\text{Poi}(\lambda)}$ είναι πεπερασμένη μόνο όταν η $\ell(x)$ είναι φραγμένη στο $x=0$. Η ανωτέρω έκφραση επίσης δείχνει ότι η μέση παρεμβολή είναι πράγματι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη τιμή της για την γνήσια περίπτωση PPP καθώς επίσης και $\mathbf{E}^{lo}[I_{\Phi}(z)] \rightarrow \mathbf{E}I_{\text{Poi}}$ όταν $\|z\| \rightarrow \infty$. Το τελευταίο αποτέλεσμα είναι διαισθητικά σωστό διότι η επίδραση της συστάδας στο σημείο μηδέν παύει να υφίσταται καθώς το $\|z\|$ αυξάνεται. Υπολογίζουμε κατόπιν τον υπό συνθήκη μετασχηματισμό Laplace (ML) της παρεμβολής. Πρώτα δείχνουμε ότι ο ML μπορεί να εκφραστεί μέσω της υπό συνθήκη ροπογεννήτριας συνάρτησης ή απλά ροπογεννήτριας (PGFL) της Φ .

Λήμμα 4.1. Ο υπό συνθήκη μετασχηματισμός Laplace της παρεμβολής στο z μπορεί να εκφραστεί όπως

$$\mathcal{L}_{I_{\Phi}(z)}^{lo}(s) = \bar{\mathcal{G}}[\mathcal{L}_h(s\ell(\cdot - z))],$$

όπου $\bar{\mathcal{G}}$ είναι η υπό συνθήκη PGFL της σημειακής διαδικασίας Φ .

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{I_{\Phi}(z)}^{lo}(s) &= \mathbf{E}^{lo} \exp\left(-s \sum_{x \in \Phi} h_x \ell(x-z)\right) \\ &= \mathbf{E}^{lo} \left[\prod_{x \in \Phi} \exp(-sh_x \ell(x-z)) \right] \\ &\stackrel{(a)}{=} \mathbf{E}^{lo} \left[\prod_{x \in \Phi} \mathcal{L}_h(s\ell(x-z)) \right], \end{aligned} \quad (4.7)$$

όπου η (a) προκύπτει από την ανεξαρτησία του h_x και το αποτέλεσμα συνεπάγεται από τον ορισμό της υπό συνθήκη ροπογεννήτριας (PGFL).

Επειδή το μέτρο Palm της PCP δεν είναι στάσιμο [45, σελ. 158], προκύπτει από το Λήμμα 4.1 ότι η κατανομή παρεμβολής εξαρτάται από τη μεταβλητή z . Υπολογίζουμε τώρα τις υπό συνθήκη ροπογεννήτριες των διαδικασιών Matern και Thomas, οι οποίες χρειάζονται για να υπολογισθεί ο υπό συνθήκη ML της παρεμβολής. Το βασικό εργαλείο για την απόδειξη είναι η ιδιότητα του μέτρου Palm που ουσιαστικά εκφράζει το γεγονός ότι η τοποθέτηση ενός πομπού στο σημείο εκκίνησης περίπου ισοδυναμεί με την τοποθέτηση μιας ανεξάρτητης συστάδας στο ίδιο σημείο. Χρησιμοποιούμε επίσης το γεγονός ότι κάθε συστάδα Matern ή Thomas είναι μια χρονικά μεταβλητή διαδικασία Poisson με ένταση $\lambda(x) = \bar{c} f_{c1}(x)$ (δεδομένου ότι ο αριθμός κόμβων σε κάθε συστάδα είναι μια Poisson τυχαία μεταβλητή με μέσο \bar{c}) και ως εκ τούτου το θεώρημα Slivnyak ισχύει για κάθε μια συστάδα.

Θεώρημα 4.2. Έστω $0 \leq v(x) \leq 1$. Η υπό συνθήκη ροπογεννήτρια των διαδικασιών συστάδας Thomas και Matern δίνεται από

$$\bar{\mathcal{G}}[v] = \mathcal{G}[v] \int_{\mathbb{R}^2} G_{cl}[v(\cdot - y)] f_{cl}(y) dy,$$

όπου

$$G_{cl}[v] = \exp\left(-\bar{c} \left[1 - \int_{\mathbb{R}^2} v(x) f_{cl}(x) dx\right]\right)$$

είναι η PGFL οποιασδήποτε απλής συστάδας.

Απόδειξη. Θέτουμε $Y_x = Y + x$. Κατόπιν, έχουμε

$$\bar{\Omega}^{lo}(Y) = \frac{1}{\bar{c}} \mathbf{E} \left(\sum_{x \in N_o} \mathbf{1}_{Y_x}(N_o \setminus \{x\}) \right). \quad (4.8)$$

Συμβολίζουμε με $\Omega(\cdot)$ την κατανομή πιθανότητας αντιπροσωπευτικής απλής συστάδας και χρησιμοποιώντας το θεώρημα Campbell–Mecke [45, σελ. 119], παίρνουμε

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}^{lo}(Y) &= \frac{1}{\bar{c}} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbf{N}} \mathbf{1}_{Y_z}(N_o) \Omega^{lx}(dN_o) \bar{c} F_{cl}(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbf{N}} \mathbf{1}_{Y_z}(N_o) \Omega^{lx}(dN_o) f_{cl}(x) dx, \end{aligned} \quad (4.9)$$

όπου το \mathbf{N} δείχνει το σύνολο των πεπερασμένων και απλών ακολουθιών στο \mathbb{P}^2 .

Δεδομένου ότι η αντιπροσωπευτική συστάδα είναι διαδικασία PPP, από το θεώρημα Slivnyak έχουμε ότι $\Omega^{lx}(\cdot) = \Omega(\cdot)$. Ως εκ τούτου

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}^{lo}(Y) &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbf{N}} \mathbf{1}_{Y_z}(N_o) \Omega(dN_o) f_{cl}(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \Omega(Y_x) f_{cl}(x) dx. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Για λόγους απλοποίησης ορίζουμε την ψ να συμβολίζει την N_o καθώς επίσης και θέτουμε $\psi_y = \psi + y$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Slivnyak, παίρνουμε το παρακάτω αποτέλεσμα:

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathcal{G}}[v] &= \int_{\mathbf{N}} \int_{\mathbf{N}} \prod_{x \in \phi \cup \psi} v(x) \mathbf{P}(d\phi) \bar{\Omega}^{lo}(d\psi) \\
 &= \int_{\mathbf{N}} \prod_{x \in \phi} v(x) \mathbf{P}(d\phi) \int_{\mathbf{N}} \prod_{x \in \psi} v(x) \bar{\Omega}^{lo}(d\psi) \\
 &= \mathcal{G}[v] \int_{\mathbf{N}} \prod_{x \in \psi} v(x) \bar{\Omega}^{lo}(d\psi) \tag{4.11} \\
 &\stackrel{(a)}{=} \mathcal{G}[v] \int_{\mathbf{N}} \prod_{x \in \psi} v(x) \int_{\mathbb{R}^2} \Omega(d\psi_y) f_{cl}(y) dy \\
 &= \mathcal{G}[v] \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbf{N}} \prod_{x \in \psi} v(x) \Omega(d\psi_y) f_{cl}(y) dy \\
 &= \mathcal{G}[v] \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbf{N}} \prod_{x \in \psi} v(x - y) \Omega(d\psi) f_{cl}(y) dy \\
 &\stackrel{(b)}{=} \mathcal{G}[v] \int_{\mathbb{R}^2} G_{cl}[v(\cdot - y)] f_{cl}(y) dy.
 \end{aligned}$$

Σημειώνεται ότι η (a) προκύπτει από την (4.10) και (b) προκύπτει από τον ορισμό της συνάρτησης $\mathcal{G}(\cdot)$.

Το ανωτέρω αποτέλεσμα μπορεί να ερμηνευθεί ως εξής. Το μέτρο Palm της συμπλεκτικής διαδικασίας είναι η ανεξάρτητη υπέρθεση της αρχικής διαδικασίας και μιας συστάδας (που βρίσκεται στο σημείο εκκίνησης) η οποία μετατοπίζεται τυχαία κατά ένα ποσοστό που προέρχεται από την πυκνότητα $f_{cl}(y)$. Ως εκ τούτου η συνισταμένη υπό συνθήκη ροπογεννήτρια (PGFL) δίνεται από το γινόμενο της PGFL της συμπλεγματικής διαδικασίας και της PGFL της αντιπροσωπευτικής συστάδας που μετατοπίζεται κατά y (προς τα δεξιά) και υπολογίζεται κατά μέσο όρο από την πυκνότητα $f_{cl}(y)$. Στις διαδικασίες συστάδων Matern και Thomas, ο αριθμός από τους κόμβους σε κάθε συστάδα είναι μια τυχαία μεταβλητή Poisson με μέσο \bar{c} . Αντίθετα, εάν κάθε συστάδα έχει έναν σταθερό αριθμό κόμβων $\bar{c} \in \mathbb{Z}^+$, η ροπογεννήτρια της PGFL δίνεται από

$$\bar{\mathcal{G}}[v] = \hat{\mathcal{G}}[v] \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} v(x - y) f_{cl}(x) dx \right)^{\bar{c}-1} f_{cl}(y) dy,$$

όπου

$$\hat{\mathcal{G}}[v] = \exp \left(-\lambda_p \int_{\mathbb{R}^2} 1 - \left(\int_{\mathbb{R}^2} v(x + y) f_{cl}(y) dy \right)^{\bar{c}} dx \right).$$

Παρατηρούμε ότι όταν $\bar{c} = 1$, παίρνουμε τον τύπο της υπό συνθήκη ροπογεννήτριας (PGFL) της σημειακής διαδικασίας Poisson (PPP). Ο υπό συνθήκη ML της παρεμβολής υπολογίζεται από το Λήμμα 4.1 και το Θεώρημα 4.2. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να παραγάγει τις ροπές της παρεμβολής. Παραδείγματος χάριν, η μέση παρεμβολή είναι ίση με

$$\mathbf{E}^{lo}[I_{\Phi}(z)] = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}_{I_{\Phi}(z)}^{lo}(s) \Big|_{s=0}.$$

Όταν $\ell(x) = \|x\|^{-\alpha}$, ο υπό συνθήκη μετασχηματισμός Laplace μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποδείξει ότι η πυκνότητα της παρεμβολής έχει έντονη ουρά. Το ακόλουθο λήμμα παρέχει τις ασυμπτωτικές ιδιότητες της ουράς.

Λήμμα 4.3. Για $\ell(x) = \|x\|^{-\alpha}$, το κατώτερο και ανώτερο όριο της συνάρτησης κατανομής (CCDF) $F_I(y)$ της παρεμβολής στη θέση z , όταν κατανέμονται οι κόμβοι ως διαδικασία συστάδων Neyman–Scott, δίνονται από τις παρακάτω εκφράσεις όταν $y \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \bar{F}_I^l(y) &\sim C_z y^{-\delta} \\ \bar{F}_I^u(y) &\sim \frac{C_z}{1-\delta} y^{-\delta}, \end{aligned}$$

αντίστοιχα. Και όπου
 where $C_z = \pi c [(f_{cl} * f_{cl})(z) + \lambda_p] \mathbf{E}[h^\delta]$ and $\delta = 2/\alpha$.
 $C_z = \pi c [(f_{cl} * f_{cl})(z) + \lambda_p] \mathbf{E}[h^\delta]$, $\delta = 2/\alpha$.

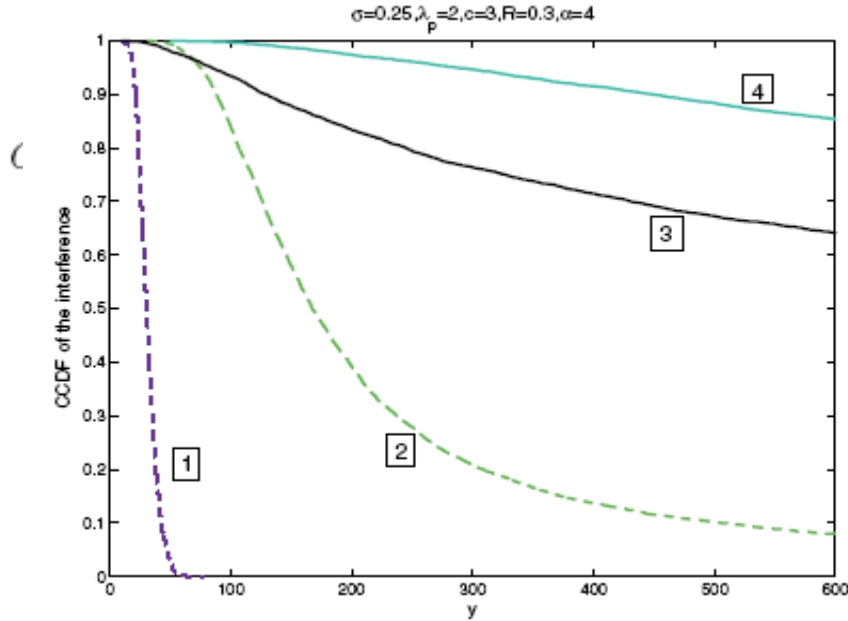
Η απόδειξη του παραπάνω Λήμματος, συγκεκριμένα για τη διαδικασία συστάδων, δίνεται στο [13, Λήμμα 3]. Από αυτό το Λήμμα παρατηρούμε ότι η παρεμβολή δεν έχει πεπερασμένες ροπές ακέραιων τιμών όταν $\ell(x) = \|x\|^{-\alpha}$. Χρησιμοποιώντας την (4.3), ο όρος C_z μπορεί επίσης να εκφραστεί ως

$$C_z = \frac{\pi \rho^{(2)}(z)}{\lambda} \mathbf{E}[h^\delta].$$

Επιπλέον, για εξασθένιση Rayleigh και τη διαδικασία συστάδων Thomas ο παραπάνω όρος γίνεται

$$C_z = \pi \lambda_p c \Gamma(1 + \delta) \left[1 + \frac{1}{4\pi \lambda_p \sigma^2} \exp\left(\frac{-\|z\|^2}{4\sigma^2}\right) \right],$$

και όταν η Φ είναι διαδικασία συστάδων Matern, τότε παίρνει την εξής μορφή:



Σχήμα 4.3 Σύγκριση της συνάρτησης κατανομής (CCDF) για μια διαδικασία συστάδων Thomas για διαφορετικά πρότυπα απωλειών διαδρομής και διαφορετικές στατιστικές εξασθένισης. Οι κοινές παράμετροι είναι $\lambda_p = 2$, $\bar{c} = 3$, $\sigma = 0,25$, $\alpha = 4$, και $\|z\| = 0,3$. Οι καμπύλες λήφθηκαν μέσω προσομοίωσης Monte-Carlo (από [13] © 2009 IEEE).

όπου $\alpha_z = \|z\|/(2\alpha)$. Επειδή

$$\Pi(I_\Phi(z) \geq y) \sim \pi \rho^{(2)}(z) \lambda^{-1} \mathbb{E}[h^\delta] y^{-\delta},$$

καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το μικρότερο φράγμα βρίσκεται πιο κοντά στην πραγματική συνάρτηση κατανομής (CCDF) για μεγάλες τιμές της y .

Όταν $\ell(x)$ φράζεται για $x=0$, τότε η ουρά της πυκνότητας της παρεμβολής ακολουθεί την κατανομή της εξασθένισης. Στο Σχήμα 4.3 οι καμπύλες #1 και #2 αντιστοιχούν στη $\ell(x) = (1 + \|x\|^\alpha)^{-1}$. Η καμπύλη #1 αντιστοιχεί στην εκθετικά φθίνουσα εξασθένιση Rayleigh. Η καμπύλη #2 για την οποία η h περιγράφεται από τη γενικευμένη κατανομή Pareto με παραμέτρους $k = 1$, $\theta = 0$, $\sigma_p = 1$ (μια υποθετική εξασθένιση κατανομής που εκθέτει την αποσύνθεση νόμου δύναμης) αντιστοιχεί στο νόμο φθίνουσας ισχύος. Οι καμπύλες #3 (αντιστοιχεί στη γενικευμένη Pareto) και #4 (αντιστοιχεί στη Rayleigh) δίνουν το γράφημα της $\ell(x) = \|x\|^{-\alpha}$ και όπου η ουρά και για τις δύο κατανομές εξασθένισης είναι πιο έντονη από τις άλλες δυο περιπτώσεις.

Μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε τον υπό συνθήκη μετασχηματισμό Laplace για να υπολογίσουμε τη συνάρτηση κατανομής των πλησιέστερων γειτόνων $N(r) = \mathcal{G}[\mathbf{1}_{b(o,r)^c}(x)]$. Επίσης, όλες οι ροπές του μέτρου Palm της PCP μπορούν να υπολογισθούν από την υπό συνθήκη ροπογεννήτρια (PGFL).

4.2 Ανάλυση διακοπής λειτουργίας

Η πιθανότητα της επιτυχίας για τον πομπό που βρίσκεται στο σημείο εκκίνησης και με τον αντίστοιχο δέκτη στο σημείο z είναι

$$\begin{aligned} p_s(\theta) &= \mathbf{P}\left(\frac{h\ell(z)}{W + I_{\Phi \setminus \{o\}}(z)} \geq \theta \mid \text{transmitter at the origin}\right) \\ &= \mathbf{P}^{lo}\left(\frac{h\ell(z)}{W + I_{\Phi}(z)} \geq \theta\right). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Όταν η εξασθένιση είναι Rayleigh, τότε η $p_s(\theta)$ δίνεται από

$$\begin{aligned} p_s(\theta) &= \int_0^\infty e^{-s\theta/\ell(z)} d\mathbf{P}^{lo}(W + I_{\Phi}(z) \leq s) \\ &= \mathcal{L}_{I_{\Phi}(z)}^{lo}(\theta/\ell(z)) \mathcal{L}_W(\theta/\ell(z)). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Η ποσότητα $\mathcal{L}_{I_{\Phi}(z)}^{lo}$ είναι ο υπό συνθήκη μετασχηματισμός Laplace της παρεμβολής και η \mathcal{L}_w δείχνει το μετασχηματισμό Laplace του θορύβου. Χρησιμοποιούμε τώρα την υπό συνθήκη ροπογεννήτρια PGFL της Poisson διαδικασίας συμπλέγματος PCP καθώς επίσης και την (4.13) για να υπολογίσουμε την πιθανότητα επιτυχημένης μετάδοσης.

Θεώρημα 4.4 (Πιθανότητα επιτυχημένης μετάδοσης). Η πιθανότητα επιτυχημένης μετάδοσης $p_s(\theta)$ μεταξύ του πομπού που βρίσκεται στο σημείο $z=0$ και του δέκτη που βρίσκεται, αντίστοιχα, στο $z \in \mathbb{P}^2$, όταν $W \equiv 0$ (αθόρυβος διάυλος), δίνεται από

$$\begin{aligned} P_s(\theta) &= \underbrace{\exp\left\{-\lambda_p \int_{\mathbb{R}^2} [1 - \exp(-\bar{c}\beta(z, y))] dy\right\}}_{T_1} \\ &\quad \times \underbrace{\int_{\mathbb{R}^2} \exp(-\bar{c}\beta(z, y)) f_d(y) dy}_{T_2}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

όπου

$$\beta(z, y) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\ell(x - y - z)}{\frac{\ell(z)}{\theta} + \ell(x - y - z)} f_d(x) dx. \quad (4.15)$$

Απόδειξη. Από το Λήμμα 4.1, έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{I_{\Phi}(z)}^{\text{lo}}\left(\frac{\theta}{\ell(z)}\right) &= \tilde{\mathcal{G}}\left[\mathcal{L}_h\left(\frac{\theta}{\ell(z)}\ell(\cdot - z)\right)\right] \\ &\stackrel{(a)}{=} \tilde{\mathcal{G}}\left[\frac{1}{1 + \frac{\theta}{\ell(z)}\ell(\cdot - z)}\right], \end{aligned}$$

όπου η (a) προκύπτει από το μετασχηματισμό Laplace της εκθετικά κατανεμημένης τυχαίας μεταβλητής h . Συνεπώς, το επιθυμητό αποτέλεσμα προκύπτει με εφαρμογή του Θεωρήματος 4.2.

Παρατηρήσεις. Η παρεμβολή μπορεί να γραφτεί ως το άθροισμα δυο ανεξάρτητων όρων. Ο ένας οφείλεται στην παρεμβολή που προκάλεσε στο δέκτη η συστάδα του αντίστοιχου πομπού και ο άλλος οφείλεται στην παρεμβολή που προκλήθηκε από άλλες συστάδες, δηλαδή,

$$I_{\Phi}(z) = I_{\Phi \setminus T_1\text{-cluster}}(z) + I_{T_1\text{-cluster}}(z). \quad (4.16)$$

Δεδομένου ότι εξετάζουμε μια διαδικασία συστάδων κατανεμημένη σύμφωνα με το νόμο Poisson, συνεπάγεται ότι οι δύο όροι της (4.16) είναι ανεξάρτητοι. Η συμβολή της παρεμβολής στην πιθανότητα επιτυχημένης μετάδοσης είναι ο όρος $\mathcal{L}_{I_{\Phi}(z)}^{\text{lo}}(\theta/\ell(z))$.

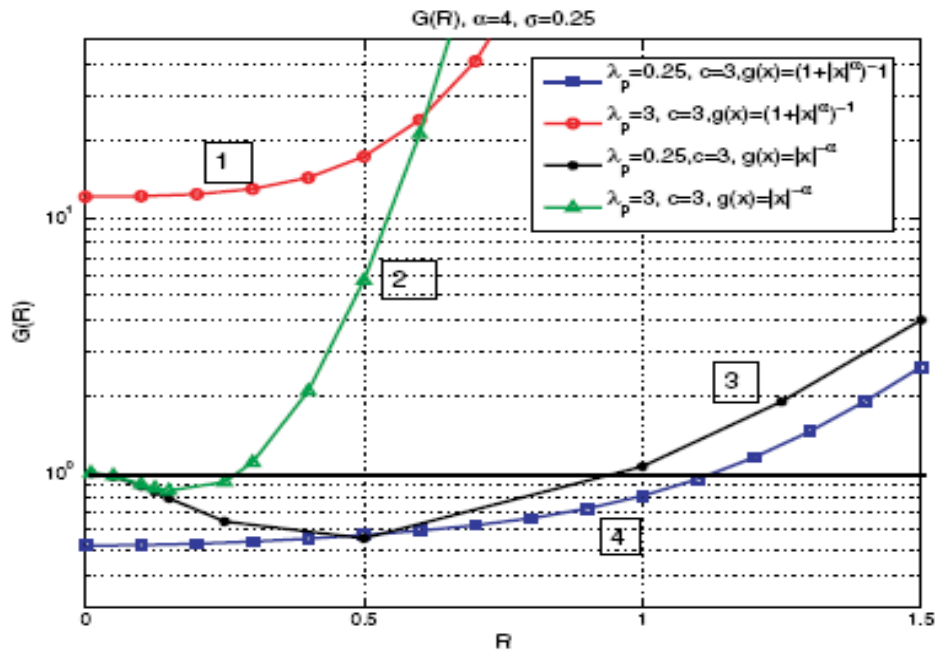
Επειδή ο μετασχηματισμός Laplace του αθροίσματος δυο ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών ισούται με το γινόμενο των επιμέρους μετασχηματισμών Laplace τους, παίρνουμε το γινόμενο των δύο όρων στην (4.14). Ο όρος T_1 στην (4.14) οφείλεται στην παρεμβολή χωρίς συστάδα στο σημείο εκκίνησης και είναι ανεξάρτητος από τη θέση z διότι η αρχική διαδικασία συστάδων είναι στάσιμη. Αυτό μπορεί εύκολα να επιβεβαιωθεί με αλλαγή μεταβλητών σύμφωνα με $y_1 = y + z$. Ο δεύτερος όρος T_2 είναι η συμβολή συστάδας πομπού και είναι ίδια για κάθε z με $\|z\| = R$ επειδή η πυκνότητα f_{cl} και η παράμετρος ℓ είναι ισοτροπικές. Συνεπώς, και η πιθανότητα επιτυχημένης μετάδοσης είναι η ίδια για όλα τα z που βρίσκονται σε απόσταση R (από το σημείο εκκίνησης). Αυτό συμβαίνει επειδή η κατανομή Palm είναι πάντα ισοτροπική όταν η αρχική κατανομή είναι αμετάβλητη [45, Υποπαράγραφος 4.4.8].

Από το ανωτέρω επιχειρήμα παρατηρούμε ότι η $p_s(\theta)$ εξαρτάται μόνο από την ποσότητα $\|z\| = R$ και όχι από τη γωνία που σχηματίζει το σημείο z . Άρα, η πιθανότητα επιτυχημένης μετάδοσης θα πρέπει να ερμηνευτεί ως ο μέσος όρος γύρω από τον κύκλο $\|z\| = R$, δηλαδή, ο δέκτης μπορεί να βρίσκεται ομοιόμορφα οπουδήποτε μέσα στον κύκλο ακτίνας R γύρω από το σημείο $z = 0$.

Διαισθητικά για την ίδια ένταση (ισχύ) μετάδοσης των κόμβων, μία Poisson διαδικασία συστάδας θα έχει περισσότερα κενά (περιοχές χωρίς τοποθετημένους πομπούς) από μία PPP. Ως εκ τούτου για R μεγαλύτερο από μια κρίσιμη ακτίνα που είναι συνάρτηση του σ^2 ή του a , λp , c , και η πιθανότητα να είναι ένας παρεμβάλλον πομπός κοντά στο δέκτη είναι μικρότερη για μια διαδικασία συστάδων από την αντίστοιχα για σημειακή διαδικασία Poisson (PPP). Για μικρότερες τιμές του R , ο δέκτης βρίσκεται μέσα στη συστάδα, η οποία προκαλεί περισσότερες διακοπές λειτουργίας. Ορίζουμε το κέρδος συστάδας ως εξής:

$$G(R) \triangleq \frac{p_s^{cl}}{p_s^{PPP}},$$

Όπου η p_s^{cl} αντιπροσωπεύει την πιθανότητα επιτυχημένης μετάδοσης όταν οι πομποί είναι συγκεντρωμένοι (βρίσκονται μέσα σε μια συστάδα) και η p_s^{PPP} αντιπροσωπεύει την ίδια ποσότητα αλλά για την ανεξάρτητη περίπτωση (μοντελοποίηση μέσω μιας PPP). Μπορούμε έπειτα να δείξουμε ότι όταν $\ell(x) = \|x\|^{-\alpha}$, έχουμε $G(R) < 1$ για μικρές τιμές του R και $G(R) > 1$ για μεγάλες τιμές του R . Συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μια κρίσιμη απόσταση συνδέσεων R^* πέρα από την οποία ο σχηματισμός συστάδας έχει ευεργετικό χαρακτήρα. Για μια φραγμένη συνάρτηση απωλειών διαδρομής, το σημείο διασταύρωσης μπορεί να μην υπάρχει και η $G(R)$ μπορεί να είναι πάντα μεγαλύτερη από τη μονάδα για όλες τις αποστάσεις R (βλέπε επίσης το Σχήμα 4.4). Μια λεπτομερής περιγραφή καθώς επίσης και ανάλυση του κέρδους συστάδας γίνεται στην [13].



Σχήμα 4.4 Γράφημα της $G(R)$ έναντι της R , με $\alpha = 4$, $\sigma = 0,25$. Παρατηρούμε ότι οι καμπύλες κέρδους #2 και # 3, οι οποίες αντιστοιχούν στην ιδιόμορφη περίπτωση, εκκινούν από τη μονάδα, κλίνουν προς τα κάτω και μετά προς τα επάνω όπου στη δεύτερη περίπτωση οι τιμές του κέρδους συστάδας είναι μεγαλύτερες της μονάδας. Το σημείο διασταύρωσης είναι περίπου ίσο με $1/(2 \sqrt{\lambda_p})$, το οποίο είναι ο μέσος όρος της απόστασης πλησιέστερου γείτονα της γονικής διαδικασίας. Οι καμπύλες #1 και #4 αντιστοιχούν σε φραγμένο πρότυπο απωλειών διαδρομής όπου το σημείο διασταύρωσης R^* μπορεί να είναι αόριστο (από [13] © 2009 IEEE).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Σημαντικότερα Αποτελέσματα και Συμπεράσματα

Η ισχύς της παρεμβολής στα ασύρματα δίκτυα μπορεί να περιγραφεί με ακρίβεια σε ορισμένες περιπτώσεις όπως αυτές που εξετάστηκαν στα Κεφάλαια 3 και 4 της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Ειδικότερα, στο Κεφάλαιο 3, όπου εξετάστηκε η περίπτωση ενός ομοιογενούς δικτύου Poisson, αποδείχθηκε ότι είναι δυνατόν να υπολογισθεί ο μετασχηματισμός Laplace της παρεμβολής, ο οποίος εμπεριέχει τη διάσταση του ασύρματου δικτύου καθώς επίσης και την εκθετική δύναμη των απωλειών διαδρομής μέσω του τύπου $\delta = d/\alpha$, που είναι επίσης η εκθετική δύναμη της σταθερής στοχαστικής διαδικασίας που περιγράφει την ίδια την παρεμβολή. Συνέπεια του παραπάνω αποτελέσματος είναι ο υπολογισμός της πιθανότητας επιτυχημένης μετάδοσης, η οποία ισούται με το μετασχηματισμό Laplace όταν ο λόγος σήμα – προς - παρεμβολή (SIR) πάρει την τιμή του κατωφλιού θ και το επιθυμητό σήμα κατανέμεται εκθετικά λόγω της εξασθένισης Rayleigh. Σε αυτή την περίπτωση, η κατανομή του λόγου σήμα – προς - παρεμβολή υπολογίζεται για όλες τις επιτρεπτές τιμές των δυο παραμέτρων α και d , ενώ αντίθετα η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (PDF) της παρεμβολής υπολογίζεται στη μοναδική περίπτωση όπου $\delta = 1/2$.

Σημειώνεται ότι το πρωτόκολλο ALOHA, που χρησιμοποιείται ως ο μηχανισμός πρόσβασης στο ίδιο κεφάλαιο, είναι το μοναδικό πρωτόκολλο πολλαπλής πρόσβασης MAC που αφήνει ανέπαφη τη στατιστική περιγραφή των κόμβων μέσω της κατανομής Poisson, επειδή μέσω της αραίωσης η ιδιότητα της ανεξαρτησίας παραμένει σε ισχύ ακόμα και όταν μεταδίδουν οι κόμβοι. Λόγω αυτής της ιδιότητάς του το πρωτόκολλο ALOHA έχει λάβει εκτενέστερες αναφορές στη σχετική βιβλιογραφία (βλέπε, για παράδειγμα, τις [2, 3, 51]). Εκτός από τα αναλυτικά πλεονεκτήματά του, το ALOHA χρησιμοποιείται επίσης ως μέτρο σύγκρισης, διότι είναι το μοναδικό πρωτόκολλο που είναι πλήρως κατανεμημένο και χωρίς λειτουργικές επιβαρύνσεις. Αναφέρουμε ότι ένας πιο προχωρημένος μηχανισμός πρόσβασης καναλιών θα μπορούσε να παρέχει καλύτερη απόδοση (throughput), αλλά με αυξημένη επιβάρυνση στη λειτουργικότητα του δικτύου, κάτι που θα έπρεπε να αφαιρεθεί πρώτα, και κατόπιν να υπολογισθεί το καθαρό κέρδος του συγκεκριμένου πρωτοκόλλου έναντι του ALOHA. Είναι επίσης ενδιαφέρον να σημειωθεί ότι το ALOHA επιτυγχάνει το γνωστό $\Theta(1/\sqrt{n})$ νόμο κλιμάκωσης. Άρα, εάν χρησιμοποιηθεί το ALOHA για την ανάλυση της επίδοσης του δικτύου, όπως έγινε στη δική μας περίπτωση, δεν υπάρχει καμία διαφορά με άλλα πρωτόκολλα όσον αφορά το νόμο κλιμάκωσης. Λόγω της ιδιότητας αραίωσης, το πρωτόκολλο ALOHA είναι επίσης η ακραία περίπτωση για τη συσχέτιση της παρεμβολής. Τα άλλα πρωτόκολλα (πρωτόκολλα μη-ALOHA) εισάγουν μεγαλύτερη συσχέτιση και συνεπώς τα αποτελέσματα που δίνονται στην Παράγραφο 3.8 αποτελούν τα κατώτερα όρια.

Σαν γενίκευση στο πρότυπο Poisson, έχουμε τις διαδικασίες συστάδων Poisson, οι οποίες εξετάζονται στο Κεφάλαιο 4. Όπως ήταν αναμενόμενο, δείχθηκε ότι η συγκέντρωση αυξάνει την παρεμβολή και ότι η πυκνότητα των παρεμβολέων (interferers) είναι υψηλότερη απ' ό,τι για την περίπτωση της ομοιογενούς PPP της ίδιας πυκνότητας. Επισημαίνεται ότι η συγκέντρωση είναι πιο αποδοτική όταν χρησιμοποιούνται συστήματα επικοινωνιών διευρυσμένου φάσματος [53].

Οι αναλύσεις παρεμβολής και διακοπής λειτουργίας σε αυτήν την εργασία μπορούν να βοηθήσουν ώστε να επινοήσουμε καλύτερες προδιαγραφές για το σχεδιασμό ενός μεγάλου ασύρματου δικτύου (ή τηλεπικοινωνιακού) συστήματος. Μερικά αποτελέσματα που μπορούν να συμβάλλουν στη διατύπωση καλύτερων προδιαγραφών καθώς επίσης και στη βέλτιστη λειτουργία των ασύρματων δικτύων είναι τα εξής:

- Σχεδιασμός δεκτών που θα είναι καλύτερα προσαρμοσμένοι στις στατιστικές περιγραφές της παρεμβολής. Αυτές οι στατιστικές περιγραφές επίσης καθορίζουν πότε είναι βέλτιστο να θεωρήσουμε την παρεμβολή ως θόρυβο [42].

- Η μετάδοση στον κοντινότερο γείτονα μέσα σε ένα δίκτυο Poisson είναι επιτυχής με πιθανότητα που δεν τείνει στο μηδέν καθώς αυξάνεται η πυκνότητα του δικτύου. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο η μετάδοση πολλαπλής μεταπήδησης (multihopping) στους κοντινότερους γείτονες επιτυγχάνει ακόμη και σε ένα πολύ πυκνό δίκτυο.

- Η βέλτιστη μετάδοση μέσω του ALOHA γίνεται με πιθανότητα που μπορεί να υπολογισθεί μεγιστοποιώντας την αδέσμευτη πιθανότητα επιτυχίας $p(1-p)p_s(p)$, η οποία περιλαμβάνει την περίπτωση κατά την οποία ο πομπός πραγματικά μεταδίδει και ο δέκτης ακούει [21]. Λόγω της μη ευρωστίας των τιμών του εκθέτη απωλειών διαδρομής, πρέπει η πιθανότητα μετάδοσης να μειωθεί δραστικά εάν η τιμή του εκθέτη απωλειών διαδρομής είναι κοντά στον αριθμό διαστάσεων του δικτύου. Επίσης, η μεγιστοποίηση της χωρικής επίδοσης είναι μια άλλη παράμετρος που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για βέλτιστη απόδοση [3].

- Η πυκνότητα των πομπών μπορεί να μεγιστοποιηθεί υπό την προϋπόθεση ότι διακόπτεται η λειτουργία. Στην ίδια ακριβώς μεγιστοποίηση αποσκοπεί και η χωρητικότητα μετάδοσης (transmission capacity) [51].

- Οι τιμές των κατωφλιών του λόγου SINR μπορούν να βελτιστοποιηθούν εάν το γινόμενο του ρυθμού μετάδοσης, που δίνεται από την εξίσωση $R = \log_2(1+\theta)$ ή την $R = E(\log_2(1+SINR))$, με την πιθανότητα επιτυχίας, $Rp_s(p)$, μεγιστοποιηθεί. Το ίδιο πλαίσιο επιτρέπει επίσης την ανάλυση από τα οφέλη της προσαρμοστικής διαμόρφωσης.

- Διαφορετικές τεχνικές φυσικού επιπέδου, συμπεριλαμβανομένων της τεχνικής διευρυμένου φάσματος, τον έλεγχο ισχύος και την ακύρωση παρεμβολής, μπορεί να αναλυθούν και οι δυνατότητές τους να διερευνηθούν κάτω από το ίδιο πλαίσιο (βλέπε, επίσης, αναφορές [1, 48, 49]).

- Η συσχέτιση της παρεμβολής είναι σημαντική κατά το σχεδιασμό του μηχανισμού ARQ. Θετική συσχέτιση των αμέσως επόμενων επιτυχημένων μεταδόσεων σημαίνει ότι η υπόθεση μιας ανεξάρτητης επιτυχίας κατά την αναμετάδοση είναι άκυρη. Σε ένα στατικό δίκτυο, η πιθανότητα επιτυχημένης k -οστής μετάδοσης κάτω από την προϋπόθεση ότι οι προηγούμενες $(k-1)$ -οστές απέτυχαν, τείνει στο 0 καθώς $k \rightarrow \infty$, ακόμη και με το ALOHA και Rayleigh εξασθένιση με i.i.d. δείγματα.

- Τα δίκτυα συστάδας μπορούν να αξιολογηθούν. Αναλύοντας τα δίκτυα συστάδας υπολογίζουμε πότε είναι ωφέλιμο να ομαδοποιηθούν οι χρήστες σε συστάδες και πότε δεν είναι. Στη δεύτερη περίπτωση, χρησιμοποιείται πρωτόκολλο MAC για να δημιουργηθούν οι απαραίτητες συστάδες.

- Γενικότερα, τα αποτελέσματα για το ALOHA MAC με δέκτες ενός χρήστη παρέχουν τα κατώτατα όρια για την επιτεύξιμη απόδοση. Περιπλοκότερες λύσεις στα χαμηλότερα στρώματα μπορούν να συγκριθούν με αυτή τη μετρική επίδοσης. Σε μερικές περιπτώσεις, όταν ληφθεί υπόψη ο απαραίτητος έλεγχος ή η υπερφόρτιση του δικτύου λόγω της μεγάλης κίνησης των πακέτων για καλύτερο συντονισμό, τότε είναι πολύ πιθανό οι απλούστεροι μέθοδοι να αποδίδουν αρκετά καλά.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΑΚΡΩΝΥΜΑ

LHS	left-hand side (of equation)
RHS	right-hand side (of equation)
a.s.	almost surely (with probability 1)
iid	independent and identically distributed
PPP	Poisson point process
PDF	Probability density function
CDF	Cumulative distribution function
CCDF	Complementary CDF
PGFL	Probability-generating functional

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- [1] J. G. Andrews, S. Weber, and M. Haenggi, “Ad hoc networks: To spread or not to spread?,” *IEEE Communications Magazine*, vol. 45, pp. 84–91, December 2007.
- [2] J. C. Arnbäck and W. van Blitterswijk, “Capacity of slotted ALOHA in rayleigh-fading channels,” *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. SAC-5, pp. 261–269, February 1987.
- [3] F. Baccelli, B. Blaszczyszyn, and P. Mühlethaler, “An Aloha protocol for multi-hop mobile wireless networks,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 52, pp. 421–436, February 2006.
- [4] F. Baccelli, B. Blaszczyszyn, and P. Mühlethaler, “Stochastic analysis of spatial and opportunistic Aloha,” *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 27, pp. 1105–1119, September 2009.
- [5] N. H. Bingham, C. M. Goldie, and J. L. Teugels, *Regular Variation*. Cambridge University Press, 1989.
- [6] N. Campbell, “Discontinuities in light emission,” *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 15, pp. 310–328, 1909.
- [7] N. Campbell, “The study of discontinuous phenomena,” *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 15, pp. 117–136, 1909.
- [8] D. J. Daley and D. Vere-Jones, *An Introduction to the Theory of Point Processes: Volume II: General Theory and Structure*. Springer, second edition, 2007.
- [9] O. Dousse and P. Thiran, “Connectivity vs Capacity in Dense Ad Hoc Networks,” in *IEEE INFOCOM*, Hong Kong, March 2004.
- [10] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications, Vol. 2*. Wiley, second edition, 1970.

- [11] M. Franceschetti, J. Bruck, and L. Schulman, "A random walk model of wave propagation," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 52, pp. 1304–1317, May 2004.
- [12] R. K. Ganti and M. Haenggi, "Interference in ad hoc networks with general motion-invariant node distributions," in *2008 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT'08)*, Toronto, Canada, July 2008.
- [13] R. K. Ganti and M. Haenggi, "Interference and outage in clustered wireless ad hoc networks," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 55, pp. 4067–4086, September 2009.
- [14] R. K. Ganti and M. Haenggi, "Spatial and temporal correlation of the interference in ALOHA Ad Hoc networks," *IEEE Communications Letters*, vol. 13, pp. 631–633, September 2009.
- [15] E. N. Gilbert and H. O. Pollak, "Amplitude distribution of shot noise," *Bell Systems Technical Journal*, vol. 39, pp. 333–350, March 1960.
- [16] M. Grossglauser and D. Tse, "Mobility increases the capacity of ad hoc wireless networks," *IEEE/ACM Transactions on Networking*, vol. 10, pp. 477–486, August 2002.
- [17] P. Gupta and P. R. Kumar, "The capacity of wireless networks," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 46, pp. 388–404, March 2000.
- [18] A. Gut, *Probability: A Graduate Course*, Springer Texts in Statistics. Springer, 2005.
- [19] M. Haenggi, "On distances in uniformly random networks," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 51, pp. 3584–3586, October 2005.
- [20] M. Haenggi, "A geometric interpretation of fading in wireless networks: Theory and applications," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 54, pp. 5500–5510, December 2008.
- [21] M. Haenggi, "Outage, local throughput, and capacity of random wireless networks," *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 8, pp. 4350–4359, August 2009.
- [22] K. Hamdi, "Exact probability of error of BPSK communication links subjected to asynchronous interference in Rayleigh fading environment," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 50, no. 10, pp. 1577–1579, 2002.
- [23] K.-H. Hanisch, "Reduction of n-th moment measures and the special case of the third moment measure of stationary and isotropic planar point processes," *Mathematische Operationsforschung und Statistik, Serie Statistik*, vol. 14, no. 3, pp. 421–435, 1983.
- [24] A. Hasan and J. Andrews, "The guard zone in wireless ad hoc networks," *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 6, pp. 897–906, March 2007.
- [25] L. Heinrich and V. Schmidt, "Normal convergence of multidimensional shot noise and rates of this convergence," *Advances in Applied Probability*, vol. 17, no. 4, pp. 709–730, 1985.
- [26] J. Ilow and D. Hatzinakos, "Analytical alpha-stable noise modeling in a poisson field of interferers or scatterers," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 46, no. 6, pp. 1601–1611, 1998.
- [27] H. Inaltekin, M. Chiang, H. V. Poor, and S. B. Wicker, "On unbounded path-loss models: effect of singularity on wireless network performance," *IEEE*

- Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 27, pp. 1078–1092, September 2009.
- [28] N. Jindal, S. Weber, and J. Andrews, “Fractional power control for decentralized wireless networks,” *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 7, pp. 5482–5492, December 2008.
- [29] O. Kallenberg, *Foundations of Modern Probability*. Springer, second edition, 2001.
- [30] J. F. C. Kingman, *Poisson Processes*. Oxford Science Publications, 1993.
- [31] J.-P. M. G. Linnartz, “Exact analysis of the outage probability in multiple-user radio,” *IEEE Transactions on Communications*, vol. 40, pp. 20–23, January 1992.
- [32] S. B. Lowen and M. C. Teich, “Power-law shot noise,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 36, pp. 1302–1318, November 1990.
- [33] R. Mathar and J. Mattfeldt, “On the distribution of cumulated interference power in Rayleigh fading channels,” *Wireless Networks*, vol. 1, pp. 31–36, February 1995.
- [34] J. Mecke, “Eine charakteristische Eigenschaft der doppelt stochastischen Poissonschen Prozesse,” *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, vol. 11, pp. 74–81, 1968.
- [35] S. Nadarajah and S. Kotz, “On the product and ratio of gamma and weibull random variables,” *Econometric Theory*, vol. 22, no. 02, pp. 338–344, 2006.
- [36] K. Nakagawa, “Application of Tauberian theorem to the exponential decay of the tail probability of a random variable,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 53, pp. 3239–3249, September 2007.
- [37] H. Q. Nguyen, F. Baccelli, and D. Kofman, “A stochastic geometry analysis of dense 802.11 networks,” in *IEEE INFOCOM*, Anchorage, AK, May 2007.
- [38] P. Patel and J. Holtzman, “Analysis of a simple successive interference cancellation scheme in a DS/CDMA system,” *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 12, no. 5, pp. 796–807, 1994.
- [39] S. O. Rice, “Mathematical analysis of random noise,” *Bell System Technical Journal*, vol. 23, pp. 282–332, July 1944.
- [40] G. Samorodnitsky and M. S. Taqqu, *Stable Non-Gaussian Random Processes: Stochastic Models with Infinite Variance*. Chapman & Hall, Jan 1994.
- [41] W. Schottky, “Über spontane Stromschwankungen in verschiedenen Elektrizitätsleitern,” *Annalen der Physik*, vol. 57, pp. 541–567, 1918.
- [42] X. Shang, G. Kramer, and B. Chen, “A new outer bound and the noisy-interference sum-rate capacity for Gaussian interference channels,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 55, pp. 689–699, February 2009.
- [43] E. S. Sousa and J. A. Silvester, “Optimum transmission ranges in a direct-sequence spread-spectrum multihop packet radio network,” *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 8, pp. 762–771, June 1990.
- [44] K. Stamatiou, F. Rossetto, M. Haenggi, T. Javidi, J. R. Zeidler, and M. Zorzi, “A delay-minimizing routing strategy for wireless multihop networks,” in *2009 Workshop on Spatial Stochastic Models for Wireless Networks (SpaSWiN’09)*, Seoul, Korea, June 2009.
- [45] D. Stoyan, W. S. Kendall, and J. Mecke, *Stochastic Geometry and its Applications*. John Wiley & Sons, second edition, 1995.

- [46] H. Takagi and L. Kleinrock, "Optimal transmission ranges for randomly distributed packet radio terminals," *IEEE Transactions on Communications*, vol. COM-32, pp. 246–257, March 1984.
- [47] A. Viterbi, "Very low-rate convolutional codes for maximum theoretical performance of spread-spectrum multiple-access channels," *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 8, no. 4, pp. 641–649, 1990.
- [48] S. Weber, J. Andrews, X. Yang, and G. D. Veciana, "Transmission capacity of wireless ad hoc networks with successive interference cancellation," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 53, pp. 2799–2814, August 2007.
- [49] S. Weber, J. G. Andrews, and N. Jindal, "The effect of fading, channel inversion, and threshold scheduling on ad hoc networks," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 53, pp. 4127–4149, November 2007.
- [50] S. Weber and M. Kam, "Computational complexity of outage probability simulations in mobile ad hoc networks," in *Proceedings of the 39th Annual Conference on Information Sciences and Systems (CISS'05)*, Baltimore, MD, March 2005.
- [51] S. Weber, X. Yang, J. G. Andrews, and G. de Veciana, "Transmission capacity of wireless ad hoc networks with outage constraints," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 51, pp. 4091–4102, December 2005.
- [52] M. Westcott, "The probability generating functional," *The Journal of the Australian Mathematical Society*, vol. 14, pp. 448–466, 1972.
- [53] X. Yang and G. de Veciana, "Inducing multiscale clustering using multistage MAC contention in CDMA ad hoc networks," *IEEE/ACM Transactions on Networking*, vol. 15, pp. 1387–1400, December 2007.
- [54] M. Zorzi and S. Pupolin, "Optimum transmission ranges in multihop packet radio networks in the presence of fading," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 43, pp. 2201–2205, July 1995.
- [55] I. J. Zucker, "Exact results for some lattice sums in 2, 4, 6 and 8 dimensions," *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 7, pp. 1568–1575, 1974.