



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΛΟΠΟΝΝΗΣΟΥ  
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ  
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ  
ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ

# ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΑΠΩΛΕΙΩΝ ΠΟΛΥΔΙΑΣΤΑΤΗΣ ΤΥΧΑΙΑΣ ΚΙΝΗΣΗΣ ΟΜΑΔΙΚΩΝ ΚΛΗΣΕΩΝ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**ΤΣΕΜΠΕΛΗ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗ του ΑΝΔΡΕΑ**

ΦΟΙΤΗΤΗ ΤΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ  
“ΠΡΟΗΓΜΕΝΑ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΔΙΚΤΥΑ”

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΜΟΣΧΟΛΙΟΣ ΙΩΑΝΝΗΣ

ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2011

## **ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ**

<b>ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΠΙΝΑΚΩΝ.....</b>	<b>σελ.4</b>
<b>ΠΡΟΛΟΓΟΣ.....</b>	<b>σελ.7</b>
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ.....</b>	<b>σελ.8</b>
<b>1.1 Εισαγωγή.....</b>	<b>σελ.8</b>
1.1.1 Συμφόρηση τηλεπικοινωνιακής κίνησης.....	σελ.9
1.1.2 Βαθμός εξυπηρέτησης.....	σελ.9
<b>1.2 Η διαδικασία Poisson.....</b>	<b>σελ.10</b>
<b>1.3 Διάκριση μοντέλων τηλεπικοινωνιακής κίνησης.....</b>	<b>σελ.11</b>
1.3.1 Μαρκοβιανά συστήματα απωλειών.....	σελ.11
1.3.2 Μαρκοβιανά συστήματα αναμονής.....	σελ.12
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΠΟΛΥΔΙΑΣΤΑΤΗ ΚΙΝΗΣΗ ΚΛΗΣΕΩΝ.....</b>	<b>σελ.13</b>
<b>2.1 Ορισμός Πολυδιάστατης κίνησης.....</b>	<b>σελ.13</b>
<b>2.2 Γενικό μοντέλο πολυδιάστατης κίνησης.....</b>	<b>σελ.13</b>
<b>2.3 Ανάλυση συστήματος πολυδιάστατης κίνησης.....</b>	<b>σελ.15</b>
<b>2.4 Υπολογισμός της πιθανότητας απώλειας κλήσεως.....</b>	<b>σελ.18</b>
<b>2.5 Εισαγωγή στην πολιτική δέσμευσης εύρους ζώνης.....</b>	<b>σελ.20</b>
2.5.1 Προσεγγιστικός υπολογισμός πιθανοτήτων απώλειας κλήσεως για σύστημα δέσμευσης εύρους ζώνης.....	σελ.21
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΠΟΛΥΔΙΑΣΤΑΤΗ ΚΙΝΗΣΗ ΟΜΑΔΙΚΩΝ ΚΛΗΣΕΩΝ.....</b>	<b>σελ.23</b>
<b>3.1 Ορισμός Πολυδιάστατης κίνησης ομαδικών κλήσεων.....</b>	<b>σελ.23</b>
<b>3.2 Γενικό μοντέλο απωλειών πολυδιάστατης τυχαίας κίνησης ομαδικών κλήσεων.....</b>	<b>σελ.23</b>
<b>3.3 Αναλυτικό μοντέλο απωλειών πολυδιάστατης τυχαίας κίνησης ομαδικών κλήσεων.....</b>	<b>σελ.24</b>
<b>3.4 Υπολογισμός των απωλειών πολυδιάστατης τυχαίας κίνησης ομαδικών κλήσεων.....</b>	<b>σελ.26</b>
<b>3.5 Εφαρμογή της πολιτικής δέσμευσης εύρους ζώνης στο μοντέλο απωλειών πολυδιάστατης         τυχαίας κίνησης ομαδικών κλήσεων (βάσει της μεθόδου Roberts).....</b>	<b>σελ.28</b>

<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ.....σελ.30</b>	
<b>Παράδειγμα 1.....σελ.30</b>	
<b>Παράδειγμα 2.....σελ.32</b>	
<b>Παράδειγμα 3.....σελ.34</b>	
<b>Παράδειγμα 4.....σελ.36</b>	
<b>Παράδειγμα 5.....σελ.38</b>	
<b>Παράδειγμα 6.....σελ.40</b>	
<b>Παράδειγμα 7.....σελ.42</b>	
<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ.....σελ.44</b>	

## **ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΠΙΝΑΚΩΝ**

### ΣΧΗΜΑΤΑ:

<b>1.1:</b> Μοντέλο χαμένων κλήσεων	<b>σελ.8</b>
<b>1.2:</b> Μοντέλο αναμονής κλήσεων	<b>σελ.9</b>
<b>1.3:</b> Διάγραμμα μεταπτώσεων των καταστάσεων του M/M/s(0)	<b>σελ.11</b>
<b>1.4:</b> Διάγραμμα τοπικής ισορροπίας	<b>σελ.12</b>
<b>1.5:</b> Διάγραμμα σφαιρικής ισορροπίας	<b>σελ.12</b>
<b>2.1:</b> Μοντέλο πολυδιάστατης κίνησης (K υπηρεσίες)	<b>σελ.13</b>
<b>2.2:</b> Σύνολο $\Omega$ για την πολιτική πλήρους διάθεσης	<b>σελ.14</b>
<b>2.3:</b> Διάγραμμα καταστάσεων όταν οι κλήσεις τύπου 1 και 2 δεν φράσσονται	<b>σελ.15</b>
<b>2.4:</b> Διάγραμμα καταστάσεων όταν οι κλήσεις τύπου 2 φράσσονται	<b>σελ.16</b>
<b>2.5:</b> Διάγραμμα καταστάσεων όταν φράσσονται και οι δύο τύποι κλήσεων	<b>σελ.16</b>
<b>2.6:</b> Γενικό διάγραμμα μετάβασης των καταστάσεων	<b>σελ.17</b>
<b>2.7:</b> Σύστημα με πολιτική πλήρους διάθεσης	<b>σελ.18</b>
<b>2.8:</b> Μοντέλο πολυδιάστατης κίνησης με σύστημα δέσμευσης εύρους ζώνης	<b>σελ.20</b>
<b>3.1.α:</b> Αφίξεις κλήσεων σύμφωνα με την διαδικασία Poisson	<b>σελ.23</b>
<b>3.1.β:</b> Αφίξεις κλήσεων σύμφωνα με την διαδικασία Batch Poisson	<b>σελ.23</b>
<b>3.2:</b> Σύνολο $\Omega$ για σύστημα πλήρους διάθεσης με δύο κατηγορίες κίνησης Poisson	<b>σελ.24</b>
<b>3.3:</b> Σύνολο $\Omega$ για ένα σύστημα πλήρους διάθεσης με δύο κατηγορίες κίνησης batch Poisson	<b>σελ.25</b>
<b>3.4:</b> Διάγραμμα καταστάσεων για το παράδειγμα 3.1 βάσει της μεθόδου Roberts	<b>σελ.28</b>
<b>4.1:</b> Σύγκριση των πιθανοτήτων συμφόρησης στον χρόνο, όταν η διαδικασία άφιξης των κλήσεων είναι Poisson (C=60).	<b>σελ.30</b>
<b>4.2:</b> Διάγραμμα της εκμετάλλευσης (utilization) της χωρητικότητας του συστήματος όταν η διαδικασία άφιξης των κλήσεων είναι Poisson (C=60).	<b>σελ.31</b>

- 4.3:** Σύγκριση των πιθανοτήτων συμφόρησης στον χρόνο, όταν η διαδικασία άφιξης των κλήσεων είναι batch Poisson ( $C=50$ ). **σελ.32**
- 4.4:** Σύγκριση των πιθανοτήτων συμφόρησης των κλήσεων, όταν η διαδικασία άφιξης των κλήσεων είναι batch Poisson ( $C=50$ ). **σελ.33**
- 4.5:** Διάγραμμα της εκμετάλλευσης (utilization) της χωρητικότητας του συστήματος όταν η διαδικασία άφιξης των κλήσεων είναι batch Poisson ( $C=50$ ). **σελ.33**
- 4.6:** Σύγκριση των πιθανοτήτων συμφόρησης στον χρόνο, όταν η διαδικασία άφιξης των κλήσεων είναι batch Poisson ( $C=60$ ). **σελ.34**
- 4.7:** Σύγκριση των πιθανοτήτων συμφόρησης των κλήσεων, όταν η διαδικασία άφιξης των κλήσεων είναι batch Poisson ( $C=60$ ). **σελ.35**
- 4.8:** Διάγραμμα της εκμετάλλευσης (utilization) της χωρητικότητας του συστήματος όταν η διαδικασία άφιξης των κλήσεων είναι batch Poisson ( $C=60$ ). **σελ.35**
- 4.9:** Σύγκριση των πιθανοτήτων συμφόρησης στον χρόνο, όταν η διαδικασία άφιξης των κλήσεων είναι batch Poisson ( $C=70$ ). **σελ.36**
- 4.10:** Σύγκριση των πιθανοτήτων συμφόρησης των κλήσεων, όταν η διαδικασία άφιξης των κλήσεων είναι batch Poisson ( $C=70$ ). **σελ.37**
- 4.11:** Διάγραμμα της εκμετάλλευσης (utilization) της χωρητικότητας του συστήματος όταν η διαδικασία άφιξης των κλήσεων είναι batch Poisson ( $C=70$ ). **σελ.37**
- 4.12:** Σύγκριση των πιθανοτήτων συμφόρησης στον χρόνο & συμφόρησης των κλήσεων, όταν η διαδικασία άφιξης των κλήσεων είναι batch Poisson και στο σύστημα εφαρμόζεται η πολιτική δέσμευσης εύρους ζώνης ( $C=50$ ). **σελ.38**
- 4.13:** Διάγραμμα της εκμετάλλευσης (utilization) της χωρητικότητας του συστήματος όταν η διαδικασία άφιξης των κλήσεων είναι batch Poisson και στο σύστημα εφαρμόζεται η πολιτική δέσμευσης εύρους ζώνης ( $C=50$ ). **σελ.39**
- 4.14:** Σύγκριση των πιθανοτήτων συμφόρησης στον χρόνο & συμφόρησης των κλήσεων, όταν η διαδικασία άφιξης των κλήσεων είναι batch Poisson και στο σύστημα εφαρμόζεται η πολιτική δέσμευσης εύρους ζώνης ( $C=60$ ). **σελ.40**
- 4.15:** Διάγραμμα της εκμετάλλευσης (utilization) της χωρητικότητας του συστήματος όταν η διαδικασία άφιξης των κλήσεων είναι batch Poisson και στο σύστημα εφαρμόζεται η πολιτική δέσμευσης εύρους ζώνης ( $C=60$ ). **σελ.41**
- 4.16:** Σύγκριση των πιθανοτήτων συμφόρησης στον χρόνο & συμφόρησης των κλήσεων, όταν η διαδικασία άφιξης των κλήσεων είναι batch Poisson και στο σύστημα εφαρμόζεται η πολιτική δέσμευσης εύρους ζώνης ( $C=70$ ). **σελ.42**

- 4.17: Διάγραμμα της εκμετάλλευσης (utilization) της χωρητικότητας του συστήματος όταν η διαδικασία άφιξης των κλήσεων είναι batch Poisson και στο σύστημα εφαρμόζεται η πολιτική δέσμευσης εύρους ζώνης ( $C=70$ ). **σελ.43**

ΠΙΝΑΚΕΣ:

- 4.1: Οι πιθανότητες συμφόρησης των κλήσεων, συμφόρησης στον χρόνο, & οι τιμές  $U$ , για ζεύξη χωρητικότητας  $C=60$ , όταν η διαδικασία άφιξης των κλήσεων είναι Poisson. **σελ.30**
- 4.2: Οι πιθανότητες συμφόρησης των κλήσεων, συμφόρησης στον χρόνο, & οι τιμές  $U$  για ζεύξη χωρητικότητας  $C=50$ , όταν η διαδικασία άφιξης των κλήσεων είναι batch Poisson. **σελ.32**
- 4.3: Οι πιθανότητες συμφόρησης των κλήσεων, συμφόρησης στον χρόνο, & οι τιμές  $U$  για ζεύξη χωρητικότητας  $C=60$ , όταν η διαδικασία άφιξης των κλήσεων είναι batch Poisson. **σελ.34**
- 4.4: Οι πιθανότητες συμφόρησης των κλήσεων, συμφόρησης στον χρόνο, & οι τιμές  $U$  για ζεύξη χωρητικότητας  $C=70$ , όταν η διαδικασία άφιξης των κλήσεων είναι batch Poisson. **σελ.36**
- 4.5: Οι πιθανότητες συμφόρησης των κλήσεων, συμφόρησης στον χρόνο, & οι τιμές  $U$  για ζεύξη χωρητικότητας  $C=50$ , όταν η διαδικασία άφιξης των κλήσεων είναι batch Poisson και στο σύστημα εφαρμόζεται η πολιτική δέσμευσης εύρους ζώνης. **σελ.38**
- 4.6: Οι πιθανότητες συμφόρησης των κλήσεων, συμφόρησης στον χρόνο, & οι τιμές  $U$  για ζεύξη χωρητικότητας  $C=60$ , όταν η διαδικασία άφιξης των κλήσεων είναι batch Poisson και στο σύστημα εφαρμόζεται η πολιτική δέσμευσης εύρους ζώνης. **σελ.40**
- 4.7: Οι πιθανότητες συμφόρησης των κλήσεων, συμφόρησης στον χρόνο, & οι τιμές  $U$  για ζεύξη χωρητικότητας  $C=70$ , όταν η διαδικασία άφιξης των κλήσεων είναι batch Poisson και στο σύστημα εφαρμόζεται η πολιτική δέσμευσης εύρους ζώνης. **σελ.42**

## **ΠΡΟΛΟΓΟΣ**

Η θεωρία τηλεπικοινωνιακής κίνησης ασχολείται μεταξύ άλλων με θέματα αναμονής ή/και απωλειών κλήσεων στα τηλεπικοινωνιακά συστήματα, όπως π.χ. με τον καθορισμό των συνδιαλέξεων υπό εξέλιξη, τον υπολογισμό της καθυστέρησης κλήσεων, τον υπολογισμό του πλήθους των κατειλημμένων διαύλων, κ.λ.π. Η ανάλυση των προβλημάτων αυτών εξαρτάται τόσο από τις διαδικασίες εισόδου και εξόδου όσο και από τη δομή του συστήματος. Οι απαντήσεις στα προβλήματα αυτά δεν μπορεί να είναι πάντοτε ακριβείς, δεδομένης της πολυπλοκότητας των συστημάτων και της έλλειψης κατάλληλων μαθηματικών τύπων.

Στόχος της διπλωματικής εργασίας είναι ο υπολογισμός της πιθανότητας απώλειας κλήσεων σε σύστημα απωλειών (δεν υπάρχει ουρά αναμονής των κλήσεων) που εξυπηρετεί διαφορετικές κατηγορίες κίνησης και η άφιξη των κλήσεων ακολουθεί την κατανομή Batched Poisson.

Η κατανομή αυτή χρησιμοποιείται ευρέως για την μοντελοποίηση συστημάτων υπερροής (overflow systems) ή εναλλακτικής δρομολόγησης (alternative routing systems).

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1**

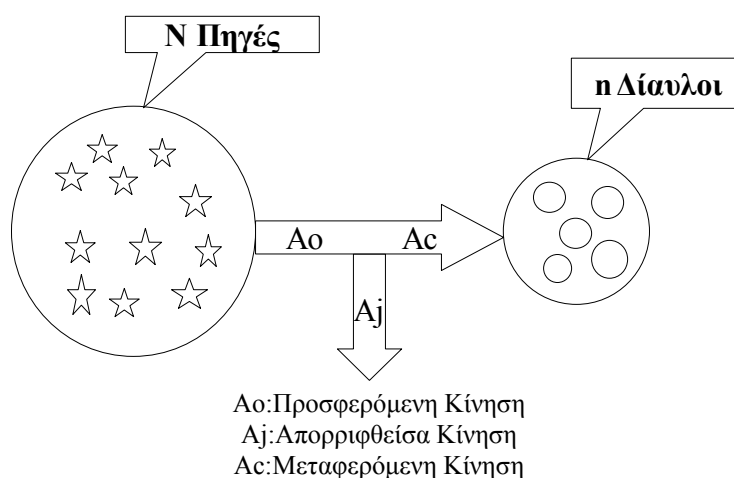
### **ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ**

#### **1.1 Εισαγωγή**

Με τον όρο τηλεπικοινωνιακή κίνηση εννοούμε το φορτίο κίνησης που δέχεται ένα σύστημα **εξυπηρετητών (servers)**. Είναι ένας καθαρός αριθμός χωρίς φυσική μονάδα, αν και, λόγω της μεγάλης σημασίας που έχει στη σχεδίαση των τηλεπικοινωνιακών συστημάτων, του αποδίδουμε τη μονάδα **Erlang**, προς τιμή του Δανού μαθηματικού A. Erlang ο οποίος υπήρξε θεμελιωτής της θεωρίας τηλεπικοινωνιακής κίνησης

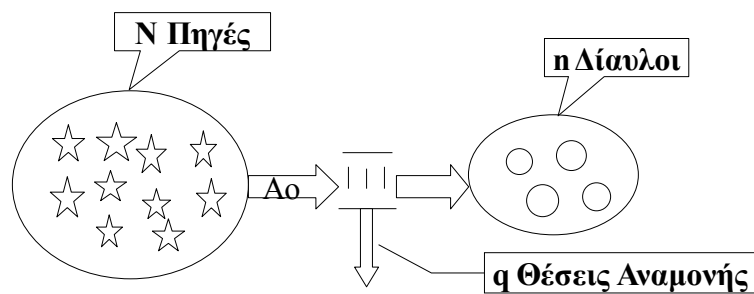
Στα συστήματα τηλεφωνίας οι εξυπηρετές είναι τα **ζευκτικά κυκλώματα (trunks)** και στα ασύρματα ραδιοσυστήματα είναι οι διαθέσιμοι ραδιοδίαυλοι. Συνεπώς, 1Erlang είναι η κίνηση που μεταφέρει ένας πλήρως κατειλημμένος ραδιοδίαυλος. Βέβαια, η άφιξη και η λήξη μιας τηλεφωνικής κλήσης είναι στοχαστικές διαδικασίες. Με την πάροδο του χρόνου, 1Erlang κίνησης μπορεί να καταλαμβάνει κανέναν, έναν, ή και περισσότερους διαύλους. Ο ορισμός της μονάδας Erlang δεν μας υποδεικνύει τον ακριβή τρόπο της στατιστικής συμπεριφοράς της κίνησης γύρω από τη μέση τιμή. Συνεπώς, 1Erlang κίνησης μπορεί να γεννηθεί π.χ. είτε από μια κλήση άπειρης διάρκειας, είτε από μια στοχαστική διαδικασία πολλών κλήσεων, που καταφθάνουν και λήγουν κατά τέτοιο τρόπο, ώστε ο μέσος αριθμός των ενεργών κλήσεων να είναι μονάδα.

Στα κυψελωτά συστήματα κινητών επικοινωνιών, σε κάθε κυψέλη έχει αποδοθεί ορισμένος αριθμός διαύλων και όλοι οι χρήστες, οι οποίοι είναι πολύ περισσότεροι από τους διαύλους, πρέπει να εξυπηρετηθούν από τους διαύλους αυτούς. Στα συστήματα μεταγωγής κυκλώματος, κάθε χρήστης καταλαμβάνει ένα δίαυλο για τη διάρκεια μιας κλήσης. Με τη λήξη της κλήσης, ο δίαυλος ελευθερώνεται και παραμένει διαθέσιμος, μέχρι κάποιος άλλος χρήστης να τον καταλάβει. Λόγω του μικρού αριθμού διαθέσιμων διαύλων, όταν αυξάνει η προσφερόμενη τηλεπικοινωνιακή κίνηση, είναι φυσικό μια νέα κλήση από κάποιον χρήστη να αφιχθεί, ενώ όλοι οι δίαυλοι είναι κατειλημμένοι. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να θεωρήσουμε δύο μοντέλα για το σύστημα. Είτε οι νέες κλήσεις χάνονται (σύστημα απωλειών (**loss system**)), όπως φαίνεται στο **Σχήμα 1.1**, είτε εισέρχονται σε μια ουρά αναμονής (σύστημα αναμονής (**queueing or delay or waiting system**)), όπως φαίνεται στο **Σχήμα 1.2**.



**Σχήμα 1.1: Μοντέλο χαμένων κλήσεων**





Ao: Προσφερόμενη Κίνηση

**Σχήμα 1.2: Μοντέλο αναμονής κλήσεων**

Η απλούστερη παραδοχή για το δεύτερο μοντέλο είναι ότι ο αριθμός  $q$  των θέσεων αναμονής είναι τέτοιος, ώστε  $q + n \geq N$  και επιπλέον ότι οι πηγές (χρήστες) έχουν απεριόριστη υπομονή. Αν όμως ο αριθμός των διαλύων  $n$  είναι πεπερασμένος, τότε η παραπάνω παραδοχή σημαίνει ότι αν  $N \rightarrow \infty$  τότε και  $q \rightarrow \infty$ . Το μοντέλο μπορεί να τροποποιηθεί με πηγές που έχουν περιορισμένη υπομονή και/ή  $q + n < N$ , οπότε προκύπτει ένα συνδυασμένο μοντέλο αναμονής και χαμένων κλήσεων.

### 1.1.1 Συμφόρηση τηλεπικοινωνιακής κίνησης

Συμφόρηση (congestion) είναι η κατάσταση σε ένα κέντρο όπου ένας καλών συνδρομητής δεν μπορεί να επιτύχει σύνδεση αμέσως. Ο αποκλεισμός (blocking) των κλήσεων προκαλείται από ανεπάρκεια μεταγωγικού εξοπλισμού και/ή κατάληψη των οργάνων μεταγωγής στα οποία ο συνδρομητής έχει πρόσβαση. Συμφόρηση, εν γένει, δηλώνει την κατάσταση όπου συμβαίνει αποκλεισμός και λαμβάνει χώρα είτε απώλεια είτε καθυστέρηση (ή και τα δύο). Όταν το σύστημα είναι αποκλεισμένο, δεν υπάρχει ελεύθερη διαδρομή που να μπορεί να αποδοθεί σε μια προσφερόμενη κλήση. Η διαφορά μεταξύ συστημάτων με απώλειες και συστημάτων αναμονής είναι σημαντική για τη δομή του κέντρου, αντιστοιχεί δε στην κατάταξη των προβλημάτων συμφόρησης σε προβλήματα αναμονής (delayed-calls, waiting problems) ή σε προβλήματα απωλειών (lost-calls, loss problems).

### 1.1.2 Βαθμός εξυπηρέτησης

Όταν υπάρχει συμφόρηση και η εισερχόμενη κλήση μπλοκάρεται και εγκαταλείπει το σύστημα, το σύστημα καλείται **σύστημα απωλειών (loss or non-delay system)**. Αν όμως η κλήση μπορεί να περιμένει για να γίνει η σύνδεση τότε το σύστημα καλείται **σύστημα αναμονής (waiting or delay system)**. Το ποσοστό των κλήσεων που χάνονται ή καθυστερούν να διεκπεραιωθούν λόγω συμφόρησης, είναι ένας δείκτης της ποιότητας εξυπηρέτησης που παρέχεται από το τηλεπικοινωνιακό σύστημα ή την υπηρεσία (service), όπως λέμε. Καλείται δε **βαθμός εξυπηρέτησης (grade of service-GOS)**.

Για ένα σύστημα απωλειών ο βαθμός εξυπηρέτησης,  $B$ , ορίζεται ως εξής:

$$B = \text{Συνολικός αριθμός χαμένων κλήσεων} / \text{Συνολικός αριθμός προσφερθεισών κλήσεων}$$

Ο βαθμός εξυπηρέτησης είναι μικρότερος ή ίσος της μονάδας. Όσο μεγαλύτερος είναι ο βαθμός εξυπηρέτησης (GOS), τόσο χειρότερο είναι το σύστημα [1].

## 1.2 Η διαδικασία Poisson

Οι βασικότερες διαδικασίες που χαρακτηρίζουν οποιοδήποτε τηλεπικοινωνιακό σύστημα είναι:

- Η διαδικασία άφιξης πελατών στο σύστημα, δηλαδή η άφιξη πακέτων δεδομένων ή τηλεφωνικών κλήσεων.
- Η διαδικασία εξυπηρέτησης των πελατών, δηλαδή η διάρκεια των τηλεφωνικών συνδιαλέξεων ή γενικότερα η διάρκεια επικοινωνίας.

### • Διαδικασία άφιξης κλήσεων

Η κατανομή που χρησιμοποιείται για την περιγραφή τυχαίων αφίξεων είναι η κατανομή Poisson. Για να χαρακτηριστεί μία διαδικασία άφιξης κλήσεων ως τυχαία θα πρέπει να ικανοποιούνται οι εξής συνθήκες:

Αν θεωρήσουμε ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα ( $\Delta t \rightarrow 0$ ) τότε:

- Η πιθανότητα άφιξης μιας κλήσεως στο χρονικό διάστημα  $\Delta t$  είναι ίση με  $\lambda \cdot \Delta t$ , όπου  $\lambda$  είναι ένας σταθερός αριθμός.
- Η πιθανότητα άφιξης δύο ή και περισσότερων κλήσεων στο ίδιο χρονικό διάστημα  $\Delta t$  τείνει στο μηδέν.
- Οι κλήσεις που φθάνουν στο σύστημα είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Όταν πληρούνται οι παραπάνω συνθήκες, τότε δεχόμαστε ότι οι αφίξεις των κλήσεων ακολουθούν κατανομή Poisson [1].

Η πιθανότητα  $k$  κλήσεις να φθάσουν στο σύστημα μέσα σε κάποιο χρονικό διάστημα  $[0, t]$  δίνεται από τη σχέση:

$$P_k(t) = \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \quad (1.1)$$

,όπου  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

Η παραπάνω σχέση μας δίνει την κατανομή Poisson, όπου το  $\lambda$  ονομάζεται **ρυθμός άφιξης των κλήσεων** και το γινόμενο  $\lambda \cdot t$  **μέση τιμή της κατανομής Poisson**. Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι η πιθανότητα μηδέν κλήσεις να φθάσουν στο σύστημα στο διάστημα  $[0, t]$  είναι:

$$P_0(t) = e^{-\lambda t} \quad (1.2)$$

Αντίθετα, η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί άφιξη στο χρονικό διάστημα  $[0, t]$  δίνεται από τη σχέση:

$$A(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad (1.3)$$

Η παραπάνω σχέση μας δίνει την πιθανότητα ότι ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών αφίξεων δεν θα υπερβεί την τιμή  $t$ .

● **Διαδικασία εξυπηρέτησης κλήσεων**

Για να περιγράψουμε τα φαινόμενα εξυπηρέτησης των κλήσεων χρησιμοποιούμε την εκθετική κατανομή. Σύμφωνα με αυτήν η πιθανότητα μία κλήση να μην τερματιστεί σε διάστημα  $[0,t]$ , δηλαδή η πιθανότητα ο χρόνος εξυπηρέτησης της κλήσεως (έστω  $x$ ) να είναι μεγαλύτερος από  $t$ , δίνεται από τη σχέση [1]:

$$P(x > t) = e^{-\mu t} \tag{1.4}$$

όπου η ποσότητα  $\mu$  ονομάζεται **ρυθμός εξυπηρέτησης**, ενώ το μέγεθος  $1/\mu$  ονομάζεται **μέση τιμή της εκθετικής κατανομής**.

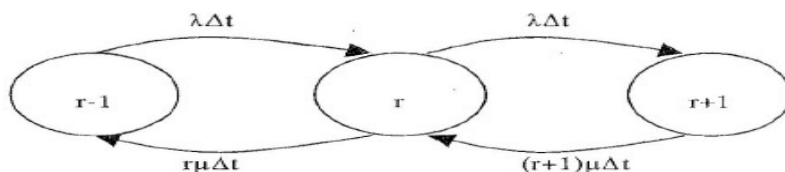
**1.3 Διάκριση μοντέλων τηλεπικοινωνιακής κίνησης**

Για την ταξινόμηση των μοντέλων τηλεπικοινωνιακής κίνησης χρησιμοποιείται ο συμβολισμός του Kendall:  $A/B/s$ . Το  $A$  δηλώνει την κατανομή αφίξεως των κλήσεων, το  $B$  δηλώνει την κατανομή εξυπηρέτησης των κλήσεων και το  $s$  τον αριθμό των εξυπηρετητών και λαμβάνει κάποια ακέραια τιμή. Το  $A$  και το  $B$  λαμβάνουν σαν τιμές τα αρχικά των κατανομών που χρησιμοποιούνται για την άφιξη ή την εξυπηρέτηση. Έτσι μπορούν να εκφράζονται από τους χαρακτήρες:  $M$  (Μαρκοβιανή) ή  $G$  (Γενική) ή  $D$  (ντετερμινιστική) κατανομή. Για παράδειγμα, ένα σύστημα με Poisson κατανομή άφιξης των κλήσεων και εκθετική κατανομή του χρόνου εξυπηρέτησης δηλώνεται ως  $M/M/s$ . Με  $n$  πεπερασμένες γραμμές εισόδου δηλώνεται ως  $M(n)/M/s$  ενώ με ουρά  $m$  θέσεων δηλώνεται ως  $M/M/s(m)$  ή ως  $M/M/s/s+m$ .

**1.3.1 Μαρκοβιανά συστήματα απωλειών**

Τα μαρκοβιανά συστήματα απωλειών είναι συστήματα με χρόνους άφιξης και εξυπηρέτησης εκθετικά κατανομημένους. Τέτοιου είδους συστήματα χρησιμοποιήθηκαν στο παρελθόν στα παλαιά συμβατικά τηλεφωνικά δίκτυα. Στα συστήματα απωλειών κριτήριο αξιολόγησης της απόδοσης αποτελεί η πιθανότητα απώλειας κλήσεως. Στη συνέχεια παρουσιάζεται το βασικότερο σύστημα απωλειών  $M/M/s(0)$ , όπως επίσης και το διάγραμμα μεταπτώσεων των καταστάσεων του συστήματος, καθώς και η έννοια της τοπικής και σφαιρικής ισορροπίας. Το σύστημα  $M/M/s(0)$  χαρακτηρίζεται από αφίξεις κλήσεων που ακολουθούν την κατανομή Poisson, εκθετική κατανομή του χρόνου εξυπηρέτησης των κλήσεων και  $s$  αριθμό εξερχόμενων γραμμών (εξυπηρετητών) με μηδενική ουρά.

- Συμβολίζουμε την κατάσταση των  $r$  υπαρχουσών κλήσεων στο σύστημα ως  $S_r$ . Έτσι η πιθανότητα να πάμε από την κατάσταση  $S_r$  σε γειτονικές καταστάσεις, είναι ίση με την πιθανότητα να έρθουμε από γειτονικές καταστάσεις στην κατάσταση  $S_r$ . Αυτό καλείται “**ρυθμός εισόδου = ρυθμός εξόδου**” (**rate in = rate out**) και εκφράζεται στο διάγραμμα μετάβασης καταστάσεων (διάγραμμα μετάπτωσης των καταστάσεων) όπως στο **Σχήμα 1.3 [1]**.

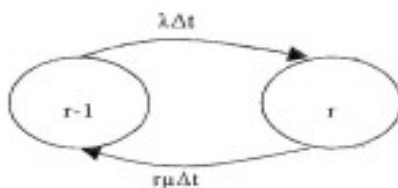


**Σχήμα 1.3: Διάγραμμα μεταπτώσεων των καταστάσεων του  $M/M/s(0)$**

- **Τοπική ισορροπία (Σχ. 1.4)**, ισχύει ανάμεσα σε δύο καταστάσεις ( $r$  &  $r-1$ ) ή ( $r$  &  $r+1$ ). Η πιθανότητα να πάω από  $r-1 \rightarrow r$ , είναι ίση με την πιθανότητα να πάω από  $r \rightarrow r-1$  [1].

$$\lambda P_{r-1} = r\mu P_r \quad , r = 1, 2, \dots, s \quad (1.5)$$

Η σχέση (1.5) αναφέρεται και ως εξίσωση **τοπικής ισορροπίας (local balance)**, όπου το αριστερό μέλος αντιπροσωπεύει τον ρυθμό κατάστασης που “ανεβαίνει” και το δεξιό μέλος τον ρυθμό κατάστασης που “κατεβαίνει”.

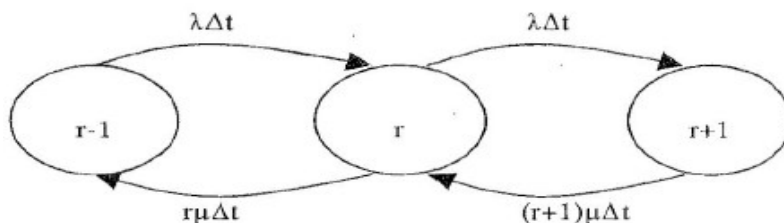


**Σχήμα 1.4: Διάγραμμα τοπικής ισορροπίας**

- **Σφαιρική ισορροπία (Σχ. 1.5) [1]**, ισχύει σε μία κατάσταση όπου η πιθανότητα να φύγω από αυτήν ισούται με την πιθανότητα να έρθω σε αυτήν.

$$(\lambda+r\mu)P_r = \lambda P_{r-1} + (r+1)\mu P_{r+1} \quad , r = 0, 1, \dots, s \quad (1.6)$$

Η σχέση (1.6) αναφέρεται και ως εξίσωση **σφαιρικής ισορροπίας (global balance)**.



**Σχήμα 1.5: Διάγραμμα σφαιρικής ισορροπίας**

### 1.3.2 Μαρκοβιανά συστήματα αναμονής

Σε αντίθεση με τα συστήματα απωλειών όπου σε κατάσταση συμφόρησης η εισερχόμενη κλήση μπλοκάρεται και εγκαταλείπει το σύστημα, στα συστήματα αναμονής η κλήση μπορεί να περιμένει για να γίνει η σύνδεση. Στα συστήματα αναμονής, κριτήριο αξιολόγησης της απόδοσης του συστήματος είναι η **πιθανότητα αναμονής** ή ο **μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά**.

Βασικότερο και απλούστερο σύστημα αναμονής είναι το σύστημα  $M/M/s$  όπου έχουμε αφίξεις κλήσεων σύμφωνα με την κατανομή Poisson, εκθετική κατανομή του χρόνου εξυπηρέτησης των κλήσεων,  $s$  αριθμό εξερχόμενων γραμμών και άπειρες θέσεις αναμονής στις οποίες όλες οι κλήσεις παραμένουν μέχρι να εξυπηρετηθούν, κατά μέσον όρο επί χρόνο  $W$  [1].

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

### ΠΟΛΥΔΙΑΣΤΑΤΗ ΚΙΝΗΣΗ ΚΛΗΣΕΩΝ

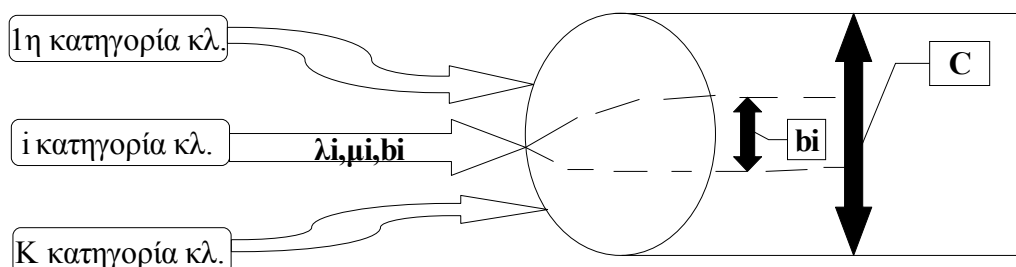
#### 2.1 Ορισμός Πολυδιάστατης κίνησης

Ως **πολυδιάστατη κίνηση (multi-dimensional traffic)** ορίζονται οι κλήσεις με διαφορετικά χαρακτηριστικά που μοιράζονται με κάποιο τρόπο (πολιτική) το εύρος ζώνης (bandwidth) ενός τηλεπικοινωνιακού συστήματος. Παράδειγμα πολυδιάστατης κίνησης είναι η μεικτή κίνηση φωνής και δεδομένων (data) με διαφορετική ταχύτητα μετάδοσης που μοιράζονται μια ομάδα καναλιών μετάδοσης.

#### 2.2 Γενικό μοντέλο πολυδιάστατης κίνησης

Για την ανάπτυξη και ανάλυση του μοντέλου της πολυδιάστατης κίνησης (**Σχήμα 2.1**), απαιτούνται οι εξής βασικές προϋποθέσεις:

- Η χωρητικότητα των πόρων του συστήματος είναι περιορισμένη και ίση με  $C$  μονάδες εύρους ζώνης.
- Έστω  $K$  οι κατηγορίες των πηγών κίνησης, όπου  $K$ : μικρός ακέραιος αριθμός.
- Ο τρόπος γέννησης των κλήσεων θεωρούμε ότι είναι τυχαίος. Οι κλήσεις δηλαδή που παράγονται από τις  $K$  κατηγορίες πηγών ακολουθούν μια διαδικασία Poisson και φθάνουν στο σύστημα με ρυθμό  $\lambda_i$  όπου ( $i = 1, 2, \dots, K$ ). Θεωρούμε ακόμα ότι ο χρόνος εξυπηρέτησης είναι εκθετικά καταναμημένος με μέση τιμή  $1/\mu_i$  όπου  $\mu_i$ : ο ρυθμός εξυπηρέτησης των κλήσεων (service rate).



**Σχήμα 2.1: Μοντέλο πολυδιάστατης κίνησης (K υπηρεσίες)**

- Υποθέτουμε ότι κάθε κλήση κατηγορίας  $i$  απαιτεί  $b_i$  μονάδες εύρους ζώνης, ( $i = 1, 2, \dots, K$ ). Αν αυτό το εύρος ζώνης είναι διαθέσιμο κατά την άφιξη μιας κλήσης κατηγορίας  $i$ , τότε διατίθεται στην κλήση για διάρκεια ίση με τον χρόνο εξυπηρέτησής της. Μετά την πάροδο αυτού του χρόνου οι  $b_i$  μονάδες εύρους ζώνης αποδεσμεύονται. Όταν το εύρος ζώνης  $b_i$  δεν είναι διαθέσιμο, τότε η κλήση μπλοκάρεται και χάνεται.

Αν συμβολίσουμε με  $n_i$  τον αριθμό των κλήσεων τύπου  $i$  στο σύστημα στην κατάσταση ισορροπίας, τότε θεωρούμε το διάνυσμα οριακής κατάστασης  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_K)$ . Με  $\mathbf{n}$  δηλαδή συμβολίζεται η κατάσταση ισορροπίας στην οποία υπάρχουν στο σύστημα  $n_1$  κλήσεις τύπου 1,  $n_2$  κλήσεις τύπου 2, κ.ο.κ. Συμβολίζουμε επίσης με  $\mathbf{n}_i^+$  το διάνυσμα οριακής κατάστασης που εκφράζει την περίπτωση να αυξηθεί κατά μία κλήση ο αριθμός των κλήσεων τύπου  $i$  που βρίσκονται στο σύστημα, δηλαδή:  $\mathbf{n}_i^+ = (n_1, \dots, n_{i-1}, n_i+1, n_{i+1}, \dots, n_K)$ .

Ομοίως συμβολίζουμε με  $n_i^-$  το διάνυσμα οριακής κατάστασης που εκφράζει την περίπτωση να μειωθεί κατά μία κλήση ο αριθμός των κλήσεων τύπου  $i$ , άρα :  $n_i^- = (n_1, \dots, n_{i-1}, n_i - 1, n_{i+1}, \dots, n_K)$ .

Ορίζουμε τέλος ως  $\Omega$  το σύνολο των δυνατών καταστάσεων (το οποίο εξαρτάται από τον τρόπο διάθεσης των πόρων του συστήματος). Στο παράδειγμα που ακολουθεί παρουσιάζεται η εξάρτηση του συνόλου των δυνατών καταστάσεων  $\Omega$  από τον τρόπο διάθεσης των πόρων του συστήματος.

### Παράδειγμα 2.1

Θεωρούμε δύο υπηρεσίες, οι κλήσεις των οποίων έχουν απαίτηση σε μονάδες εύρους ζώνης  $b_1=1$  και  $b_2=2$ , αντιστοίχως. Έστω ότι η χωρητικότητα του συστήματος είναι  $C=8$  μονάδες εύρους ζώνης (trunks) [1].

Κύριο χαρακτηριστικό των συστημάτων όπου εφαρμόζεται **πολιτική πλήρους διάθεσης (complete sharing policy)**, είναι ότι μία κλήση που χρειάζεται  $b$  μονάδες εύρους ζώνης για να διεκπεραιωθεί μπλοκάρεται και χάνεται αν και μόνο αν λιγότερες από  $b$  μονάδες εύρους ζώνης από τις  $C$  είναι διαθέσιμες. Με άλλα λόγια μια κλήση που φτάνει στο σύστημα γίνεται δεκτή οποτεδήποτε υπάρχει ελεύθερο το εύρος ζώνης που απαιτεί.

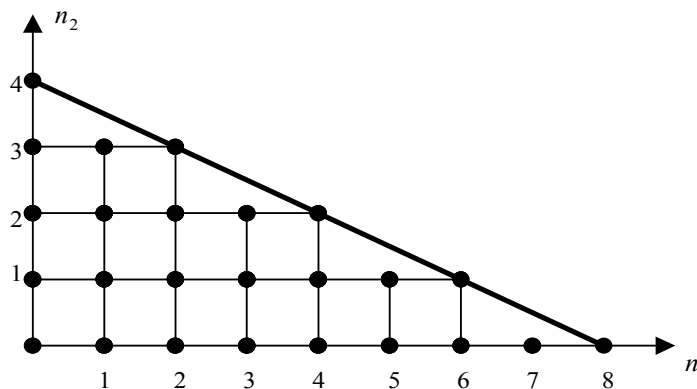
Με βάση το γεγονός ότι το σύνολο  $\Omega$  για συστήματα πλήρους διάθεσης περιγράφεται από την σχέση:

$$\Omega = \{n: 0 \leq nb \leq C\}, \quad nb = n_1 b_1 + n_2 b_2 \tag{2.1}$$

Δηλαδή στο παράδειγμά μας θα πρέπει να ισχύει:

$$n_1 b_1 + n_2 b_2 \leq C \Rightarrow n_1 + 2n_2 \leq 8.$$

Κάθε δυνατή κατάσταση προκύπτει από την σχέση  $n_1 + 2n_2 \leq 8$  και συμβολίζεται στο **(Σχήμα 2.2)** [1] με  $\bullet$ . Τα ακραία σημεία 4, 8 που βρίσκονται πάνω στους άξονες  $n_2$  και  $n_1$  αντιστοίχως προκύπτουν από τις εκφράσεις  $C/b_2$  και  $C/b_1$ .



**Σχήμα 2.2:** Σύνολο  $\Omega$  για την πολιτική πλήρους διάθεσης

### 2.3 Ανάλυση συστήματος πολυδιάστατης κίνησης

Για να προχωρήσουμε στην ανάλυση συστήματος πολυδιάστατης κίνησης και κατ' επέκταση στην γενική εξίσωση σφαιρικής ισορροπίας, θα πρέπει να εξετάσουμε αρχικά την περίπτωση ενός συστήματος πλήρους διάθεσης των πόρων του, και εν συνεχεία να επεκταθούμε σε “πολιτικές” αυθαίρετης διάθεσης των πόρων του συστήματος.

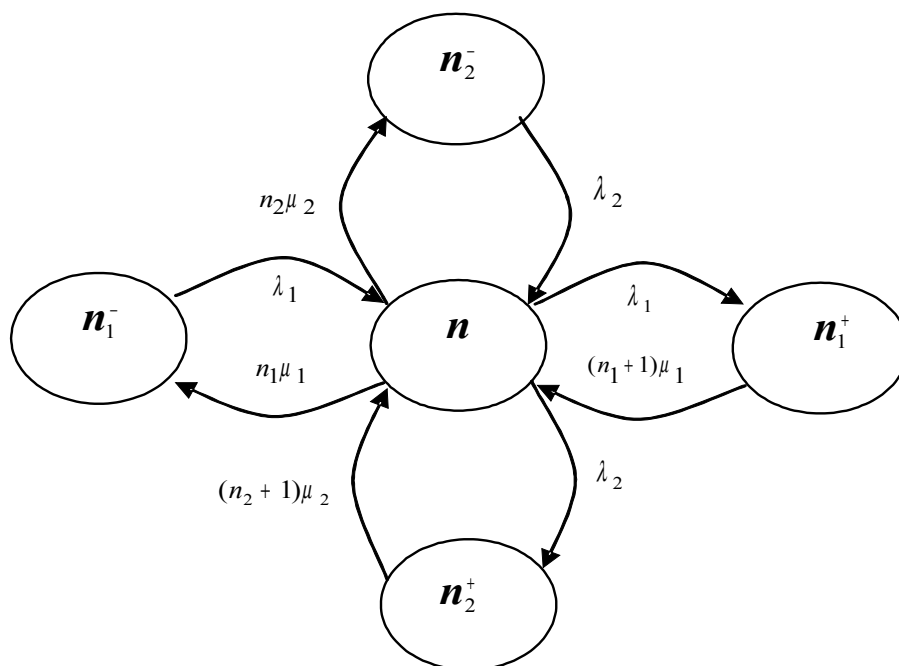
Έστω ότι έχουμε μόνο δύο κατηγορίες κίνησης ( $K=2$ ). Συμβολίζουμε με  $\lambda_1, \lambda_2$  τους ρυθμούς άφιξης των κλήσεων των δύο υπηρεσιών και με  $\mu_1, \mu_2$  τους ρυθμούς εξυπηρέτησής τους. Στην κατάσταση ισορροπίας θεωρούμε ότι έχουμε  $n_1$  κλήσεις της πρώτης υπηρεσίας και  $n_2$  κλήσεις της δεύτερης υπηρεσίας. Άρα η κατάσταση ισορροπίας θα περιγράφεται από το διάνυσμα ισορροπίας  $\mathbf{n} = [n_1, n_2]$ . Επίσης, θεωρούμε ότι:

$$\mathbf{n}_1^+ = \{n_1+1, n_2\}, \mathbf{n}_2^+ = \{n_1, n_2+1\}, \mathbf{n}_1^- = \{n_1-1, n_2\}, \mathbf{n}_2^- = \{n_1, n_2-1\} \quad (2.2)$$

Προκύπτουν τελικά τρία διαγράμματα καταστάσεων, τα οποία απεικονίζονται στα παρακάτω σχήματα που ακολουθούν.

- Το **Σχήμα 2.3 [1]** εκφράζει την περίπτωση όπου δεν έχουμε απώλεια κλήσεων σε καμία από τις δύο κατηγορίες. Από την εξίσωση της σφαιρικής ισορροπίας, “Ρυθμός εισόδου = Ρυθμός εξόδου”, προκύπτει:

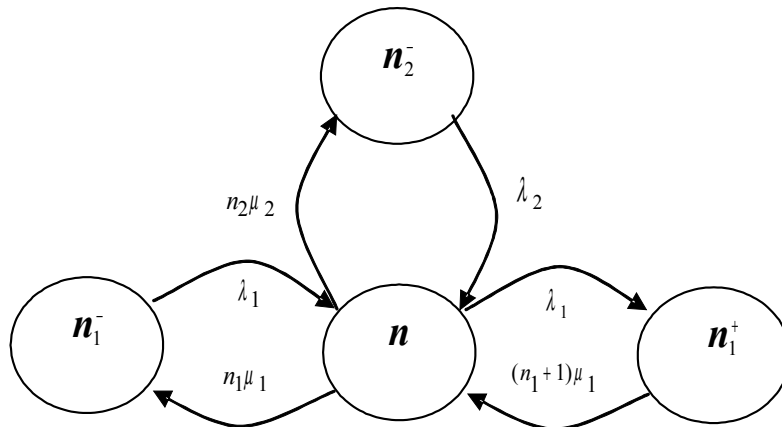
$$\lambda_1 P(\mathbf{n}_1^-) + \lambda_2 P(\mathbf{n}_2^-) + (n_1+1)\mu_1 P(\mathbf{n}_1^+) + (n_2+1)\mu_2 P(\mathbf{n}_2^+) = (n_1\mu_1 + n_2\mu_2 + \lambda_1 + \lambda_2) P(\mathbf{n}) \quad (2.3)$$



**Σχήμα 2.3: Διάγραμμα καταστάσεων όταν οι κλήσεις τύπου 1 και 2 δεν φράσσονται**

- Το διάγραμμα του **Σχήματος 2.4 [1]** εκφράζει την κατάσταση κατά την οποία παρουσιάζεται απώλεια κλήσεων της δεύτερης κατηγορίας κίνησης. Από την εξίσωση της σφαιρικής ισορροπίας, “Ρυθμός εισόδου = Ρυθμός εξόδου”, προκύπτει:

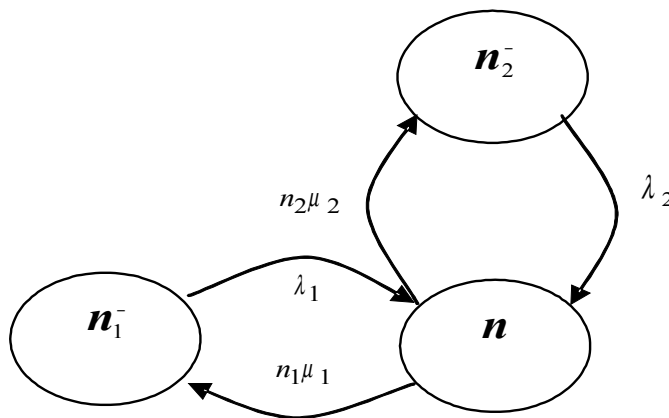
$$\lambda_1 P(\mathbf{n}_1^-) + \lambda_2 P(\mathbf{n}_2^-) + (n_1+1)\mu_1 P(\mathbf{n}_1^+) = (n_1\mu_1 + n_2\mu_2 + \lambda_1) P(\mathbf{n}) \quad (2.4)$$



**Σχήμα 2.4: Διάγραμμα καταστάσεων όταν οι κλήσεις τύπου 2 φράσσονται**

- Το διάγραμμα του **Σχήματος 2.5** [1] εκφράζει την κατάσταση κατά την οποία παρουσιάζεται απώλεια κλήσεων και στις δύο κατηγορίες κίνησης. Από την εξίσωση της σφαιρικής ισορροπίας, “Ρυθμός εισόδου = Ρυθμός εξόδου”, προκύπτει:

$$\lambda_1 P(\mathbf{n}_1^-) + \lambda_2 P(\mathbf{n}_2^-) = (\mathbf{n}_1 \mu_1 + \mathbf{n}_2 \mu_2) P(\mathbf{n}) \quad (2.5)$$



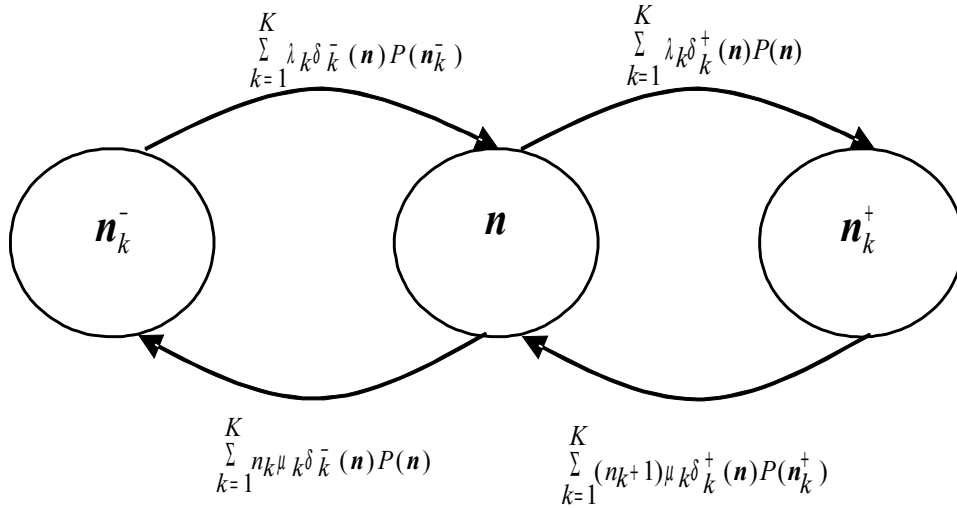
**Σχήμα 2.5: Διάγραμμα καταστάσεων όταν φράσσονται και οι δύο τύποι κλήσεων**

Ακολούθως, προκειμένου να εκφράσουμε όλες τις εξισώσεις σφαιρικής ισορροπίας (2.3), (2.4), (2.5) μέσω μιας μόνο εξίσωσης, εισάγουμε τους εξής συμβολισμούς:  $\delta_i^+(\mathbf{n}) = 1$  και  $\delta_i^-(\mathbf{n}) = 1$  όταν οι καταστάσεις  $\mathbf{n}_1^+$  και  $\mathbf{n}_1^-$  ανήκουν στο σύνολο των καταστάσεων  $\Omega$ , διαφορετικά  $\delta_i^+(\mathbf{n}) = \delta_i^-(\mathbf{n}) = 0$ .

Έχοντας λοιπόν εισάγει τους βοηθητικούς αυτούς συμβολισμούς, και μετά από μια σειρά συλλογισμών, μπορούμε εύκολα να καταλήξουμε στην παρακάτω γενική εξίσωση σφαιρικής ισορροπίας “Ρυθμός εισόδου = Ρυθμός εξόδου”, καθώς επίσης και σε ένα γενικό διάγραμμα μετάβασης των καταστάσεων (**Σχήμα 2.6**) [1].



$$\sum_{k=1}^K \lambda_k \delta_k^-(\mathbf{n}) P(\mathbf{n}_k^-) + \sum_{k=1}^K (n_k + 1) \mu_k \delta_k^+(\mathbf{n}) P(\mathbf{n}_k^+) = \left[ \sum_{k=1}^K \lambda_k \delta_k^+(\mathbf{n}) + \sum_{k=1}^K n_k \mu_k \delta_k^-(\mathbf{n}) \right] P(\mathbf{n}) \quad (2.6)$$



**Σχήμα 2.6: Γενικό διάγραμμα μετάβασης των καταστάσεων**

### 2.4 Υπολογισμός της πιθανότητας απώλειας κλήσεως

Όπως γνωρίζουμε, η σχέση  $P(\mathbf{n}) = G^{-1}\left(\prod_{k=1}^K \frac{a_k^{n_k}}{n_k!}\right)$ , όπου  $G \equiv G(\Omega) = \sum_{\mathbf{n} \in \Omega} \left(\prod_{k=1}^K \frac{a_k^{n_k}}{n_k!}\right)$

ισχύει για αυθαίρετη πολιτική τρόπου διάθεσης των πόρων του συστήματος.

Στην ειδική περίπτωση όπου έχουμε σύστημα πλήρους διάθεσης, η σταθερά κανονικοποίησης  $G(\Omega)$  μπορεί να οριστεί και ως  $G(C,K)$ . Αποσκοπώντας έτσι στον υπολογισμό της πιθανότητας  $P_{b_i}$ , καταλήγουμε σε μια **αναδρομική σχέση** για τον υπολογισμό του  $G(C,K)$ .

Μέσω της αναδρομικής αυτής σχέσης, υπολογίζονται τα στοιχεία ενός πίνακα διαστάσεων  $[C \times K]$  στήλη προς στήλη. Για μεγάλες τιμές του  $C$  ο υπολογισμός αυτός γίνεται ιδιαίτερα επίπονος. Στην περίπτωση δε που έχουμε μεγάλες τιμές τόσο του  $C$  όσο και του  $K$  ο ανωτέρω υπολογισμός γίνεται ιδιαίτερα πολύπλοκος. Για τον λόγο αυτό παρουσιάζεται ακολούθως ένας απλός τρόπος για τον υπολογισμό της πιθανότητας απώλειας, μέσω ενός μονοδιάστατου αναδρομικού τύπου.

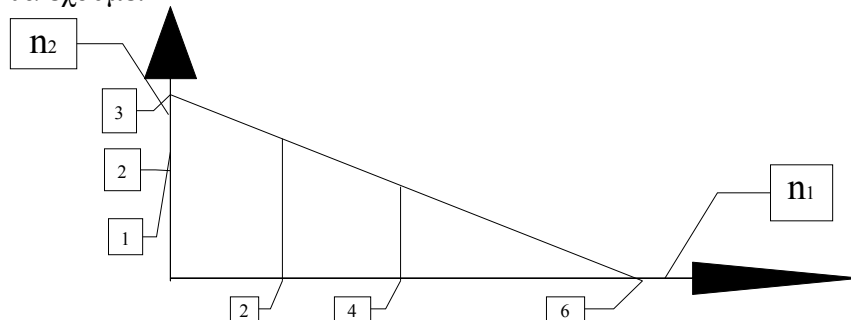
Θεωρούμε λοιπόν αρχικά το σύνολο των καταστάσεων  $\Omega_j = \{n \in \Omega : nb = j\}$ . Από τον ορισμό αυτό φαίνεται ότι το σύνολο  $\Omega_j$  είναι το σύνολο εκείνο στο οποίο ακριβώς  $j$  γραμμές είναι κατειλημμένες. Οι δυνατές καταστάσεις του συνόλου αυτού βρίσκονται πάνω στην διαγώνιο  $nb=j$  (όπου  $j=0,1,2,\dots,C$ ), όπως φαίνεται και στο παράδειγμα 2.2, που ακολουθεί.

#### Παράδειγμα 2.2

Θεωρούμε δύο υπηρεσίες οι κλήσεις των οποίων έχουν απαίτηση σε μονάδες εύρους ζώνης  $b_1=1$  και  $b_2=2$ , αντιστοίχως, και έστω ότι ο αριθμός των κατειλημμένων γραμμών είναι  $j=6$ . Αν ισχύει  $n_1+2n_2 \leq 6$ , τότε οι δυνατές καταστάσεις θα είναι ως εξής:

$$(n_1=0, n_2=3), (n_1=2, n_2=2), (n_1=4, n_2=1), (n_1=6, n_2=0)$$

Οπότε σχηματικά θα έχουμε:



**Σχήμα 2.7: Σύστημα με πολιτική πλήρους διάθεσης**

Η πιθανότητα να έχουμε  $j$  κατειλημμένες γραμμές στην κατάσταση ισορροπίας δίνεται από την σχέση [1], [2]:

$$q(j) = \sum_{\mathbf{n} \in \Omega_j} P(\mathbf{n}) = \sum_{\mathbf{n} \in \Omega_j} \prod_{k=1}^K \frac{a_k^{n_k}}{n_k!} G^{-1}(C, K) \quad (2.7)$$

Η πιθανότητα απώλειας κλήσεως  $P_{b_i}$  μπορεί να εκφρασθεί και ως εξής:

$$P_{b_k} = \sum_{\{n: nb > C - b_k\}} P(\mathbf{n}) \quad (2.8)$$

Όπως έχει αναφερθεί, όταν οι κατελιμμένες γραμμές είναι  $j = nb > C - b_i$  έχουμε απώλεια των κλήσεων της υπηρεσίας τύπου  $i$ . Επομένως η πιθανότητα  $P_{b_i}$  μπορεί να εκφρασθεί και ως το άθροισμα των πιθανοτήτων  $q(j)$  όπου  $j > C - b_i$ . Στην περίπτωση αυτή θα έχουμε:

$$P_{b_k} = \sum_{j=C-b_k+1}^C q(j) = \sum_{j=0}^{b_k-1} q(C-j) \quad (2.9)$$

Παρατηρούμε τελικά ότι ο υπολογισμός της πιθανότητας  $P_{b_i}$  έγκειται στην εύρεση ενός αναδρομικού τύπου για τον υπολογισμό του  $q(j)$ .

Έτσι, μετά από σειρά εξισώσεων, προκύπτει τελικά η ακριβής αναδρομική σχέση για τον υπολογισμό των  $q(j)$  [2], [3]:

$$q(j) = \begin{cases} 1 & \text{για } j = 0 \\ \frac{1}{j} \sum_{k=1}^K a_k b_k q(j - b_k) & \text{για } j = 1, \dots, C \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \quad (2.10)$$

όπου  $\sum q(j) = 1$  και  $q(x) = 0$  για  $x < 0$ .

Η σχέση (2.10) είναι γνωστή στην βιβλιογραφία ως “Kaufman-Roberts formula”. Βασιζόμενοι στην σχέση (2.10) μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα απώλειας κλήσεως κάθε κατηγορίας κίνησης σύμφωνα με την σχέση (2.9).

### Παράδειγμα 2.3

Σε σύστημα χωρητικότητας  $C=2$  μονάδων εύρους ζώνης που εξυπηρετεί κλήσεις δύο κατηγοριών κίνησης, να υπολογιστούν οι πιθανότητες απώλειας κλήσεων χρησιμοποιώντας τον τύπο των “Kaufman-Roberts”. Δίνονται:  $b_1=1, b_2=2, a_1=a_2=1 \text{erl}$ .

Σύμφωνα με τον τύπο (2.10) έχουμε:

$$q(0)=1, q(1)=1/1[a_1 b_1 q(0) + a_2 b_2 q(1-2)] = q(0) + 2 \cdot 0 = 1 \Rightarrow q(1)=1,$$

$$q(2)=1/2[a_1 b_1 q(1) + a_2 b_2 q(0)] = 1/2(1+2) = 3/2 \Rightarrow q(2)=3/2$$

Η σταθερά κανονικοποίησης δίνεται από την σχέση  $G=q(0) + q(1) + q(2) = 1+1+1.5=3.5 \Rightarrow G=3.5$ .

Άρα οι κανονικοποιημένες τιμές των  $q(j)$  είναι οι εξής:

$$q(0)=1/G=0.2857, q(1)=1/G=0.2857, q(2)=1.5/G=0.4285$$

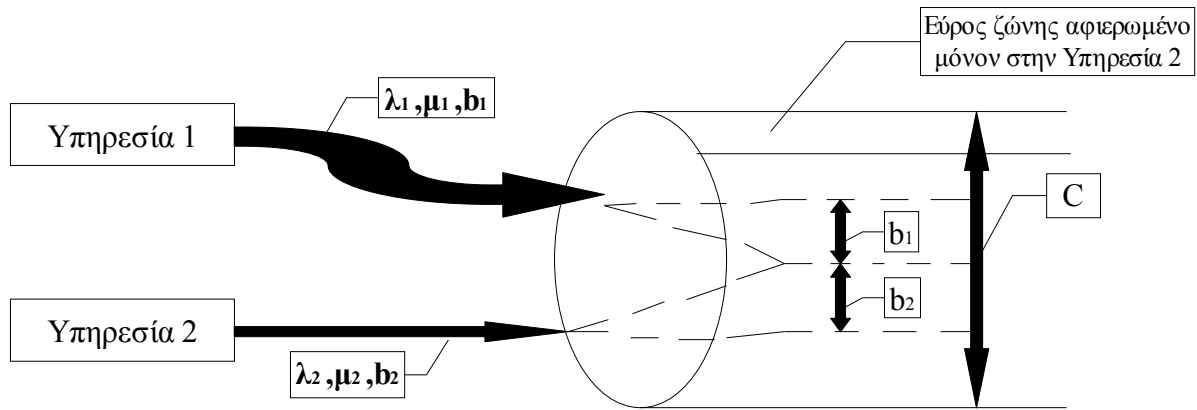
Επομένως, μέσω της σχέσης (2.9) προκύπτει τελικά ότι:

$$P_{b_1}=q(2) \Rightarrow P_{b_1}=0.4285$$

$$P_{b_2}=q(1) + q(2) = 0.2857 + 0.4285 \Rightarrow P_{b_2}=0.7142$$

## 2.5 Εισαγωγή στην πολιτική δέσμευσης εύρους ζώνης

Η πολιτική δέσμευσης εύρους ζώνης (**trunk reservation policy**) εφαρμόζεται για να εξισορροπήσουμε τις πιθανότητες απώλειας κλήσεως των διαφορετικών υπηρεσιών, όταν από κοινού μοιράζονται τους πόρους ενός συστήματος εξυπηρέτησης.



**Σχήμα 2.8: Μοντέλο πολυδιάστατης κίνησης με σύστημα δέσμευσης εύρους ζώνης**

Στο μοντέλο του **Σχήματος 2.8** έστω ότι η υπηρεσία 1 είναι η τηλεφωνική υπηρεσία με απαιτήσεις  $b_1 = 64$  kbps/κλήση (= 1 trunk) και η υπηρεσία 2 είναι μια υπηρεσία εικόνας (video) με απαιτήσεις  $b_2 = 640$  kbps/κλήση (= 10 trunks). Ας υποθέσουμε ότι η χωρητικότητα του συστήματος εξυπηρέτησης των κλήσεων των διαφορετικών αυτών υπηρεσιών είναι  $C = 10$  trunks. Οι ρυθμοί άφιξης και εξυπηρέτησης των κλήσεων είναι  $\lambda_1, \lambda_2$  και  $\mu_1, \mu_2$ , αντιστοίχως, για τις υπηρεσίες 1, 2. Αν οι δύο αυτές υπηρεσίες μοιράζονται από κοινού όλη την χωρητικότητα  $C$  του συστήματος, τότε είναι προφανές ότι μία κλήση της υπηρεσίας 2 μπορεί να διεκπεραιωθεί μόνον όταν όλο το σύστημα είναι κενό. Η πιθανότητα δε να συμβεί αυτό, διαισθητικά, είναι πολύ μικρή. Επομένως γίνεται κατανοητό ότι η υπηρεσία 2 θα έχει περισσότερες απώλειες κλήσεων απ' ό,τι η υπηρεσία 1. Το συγκεκριμένο λοιπόν σύστημα “αδικεί” την υπηρεσία 2. Τι θα μπορούσαμε όμως να κάνουμε ώστε να παράσχουμε την ίδια ποιότητα εξυπηρέτησης για τις δύο αυτές υπηρεσίες;

Για να έχουμε την ίδια πιθανότητα απώλειας κλήσεως και για τις δύο υπηρεσίες, στο συγκεκριμένο σύστημα, πρέπει να **δεσμεύσουμε** ένα μέρος από το συνολικό εύρος ζώνης  $C$  προς όφελος της υπηρεσίας 2. Έστω λοιπόν ότι το σύστημα είναι εξ ολοκλήρου κενό, και δεσμεύουμε  $b_2 - b_1 = 9$  trunks προς όφελος της υπηρεσίας 2. Τότε θα είχαμε 1 μόνον κοινό trunk. Όποια λοιπόν κλήση έλθει θα μπορεί να εξυπηρετηθεί. Αν μεν έλθει κλήση της υπηρεσίας 1 αυτή θα διεκπεραιωθεί από τον κοινό trunk, αν δε έλθει κλήση της υπηρεσίας 2 θα πάρει εκτός από το κοινό trunk και τα υπόλοιπα 9 που είναι αφιερωμένα σε εκείνην. Μπορούμε να πούμε ότι με τον τρόπο αυτόν της δέσμευσης του εύρους ζώνης επιτύχαμε εξισορρόπηση των απωλειών μεταξύ των δύο υπηρεσιών. Έχοντας μόνον 1 trunk ελεύθερο, η πιθανότητα να καταληφθεί από την υπηρεσία 1 ή την 2 έστω ότι είναι η ίδια, δηλ. 50%, οπότε και η πιθανότητα απώλειας κλήσεως είναι επίσης 50%.

### 2.5.1 Προσεγγιστικός υπολογισμός πιθανοτήτων απωλείας κλήσεως για σύστημα δέσμευσης εύρους ζώνης

Η σχέση (2.10) πρέπει να διατυπωθεί έτσι ώστε να μπορεί να ληφθεί υπ' όψη η πολιτική δέσμευσης του εύρους ζώνης που εφαρμόζουμε για να εξισορροπήσουμε την πιθανότητα απωλείας κλήσεως μεταξύ των διαφορετικών υπηρεσιών.

Χρησιμοποιούμε τα εξής σύμβολα:

**K** : το πλήθος των διαφορετικών υπηρεσιών.

**i** : κατηγορία υπηρεσίας  $i$  ( $i=1,2,\dots,K$ ).

**b<sub>i</sub>** : το απαιτούμενο εύρος ζώνης ανά κλήση της υπηρεσίας  $i$ .

**a<sub>i</sub>** : προσφερόμενη κίνηση από την υπηρεσία  $i$ .

**C** : ο συνολικός αριθμός εξυπηρετητών (χωρητικότητα σε εύρος ζώνης).

Όταν εφαρμόζουμε τέτοιο σύστημα, οι κλήσεις της υπηρεσίας  $i$  δεν θα εξυπηρετούνται όταν υπάρχουν λιγότερες από  $t_i$  μονάδες εύρους ζώνης διαθέσιμες στο σύστημα εξυπηρέτησης. Όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο, διαλέγοντας κατάλληλα το  $t$  είναι δυνατόν να βελτιώσουμε την πιθανότητα απωλείας κλήσεως όλων των υπηρεσιών υψηλής ταχύτητας, εις βάρος των υπηρεσιών χαμηλής ταχύτητας, εξισορροπώντας έτσι τις απώλειες των διαφορετικών υπηρεσιών. Με τις σχέσεις (2.11)-(2.13) υπολογίζουμε προσεγγιστικά τις πιθανότητες απωλείας κλήσεως για σύστημα δέσμευσης εύρους ζώνης [4]:

$$q(j) = \begin{cases} 1 & \text{για } j = 0 \\ \frac{1}{j} \sum_{k=1}^K a_k D_k(j - b_k) q(j - b_k) & \text{για } j = 1, \dots, C \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \quad (2.11)$$

$$D_k(j - b_k) = \begin{cases} b_k & \text{για } j \leq C - t_k \\ 0 & \text{για } j > C - t_k \end{cases} \quad (2.12)$$

και

$$P_{b_k} = \sum_{j=C-b_k-t_k+1}^C G^{-1} q(j) \quad (2.13)$$

όπου  $G$  η σταθερά κανονικοποίησης του συστήματος.

#### **Παράδειγμα 2.4**

Να υπολογιστούν οι πιθανότητες να μπλοκαριστεί μια κλήση τύπου 1 ή τύπου 2, βάσει των σχέσεων (2.11)-(2.13), όταν στο σύστημα εξυπηρέτησης εφαρμόζεται σύστημα δέσμευσης εύρους ζώνης, και  $C=2$ ,  $K=2$ ,  $b_1=1$ ,  $b_2=2$ ,  $\alpha_1=\alpha_2=1e1$ ,  $t_1=1$ ,  $t_2=0$ . Η επιλογή των παραμέτρων δέσμευσης εύρους ζώνης είναι τέτοια ώστε να εξασφαλίζεται εξισορρόπηση των απωλειών μεταξύ των κλήσεων των δύο κατηγοριών κίνησης.

Σύμφωνα με τις σχέσεις (2.11)-(2.12) έχουμε:

$$\begin{aligned}q(0) &= 1 \\q(1) &= 1/1[\alpha_1 b_1 q(0) + \alpha_2 b_2 q(1-2)] = q(0) + 2 \cdot 0 = 1 \Rightarrow q(1) = 1 \\q(2) &= 1/2[\alpha_1 \cdot 0 \cdot q(1) + \alpha_2 b_2 q(0)] = 1/2 \cdot 2 = 1 \Rightarrow q(2) = 1\end{aligned}$$

Η σταθερά κανονικοποίησης ισούται με:  $G = q(0) + q(1) + q(2) = 1 + 1 + 1 = 3 \Rightarrow G = 3$

Άρα

$$q(0) = 1/G = 0.3333, \quad q(1) = 1/G = 0.3333, \quad q(2) = 1/G = 0.3333$$

Επομένως, βάσει της σχέσης (2.13) προκύπτει τελικά ότι:

$$P_{b1} = q(1) + q(2) = 0.3333 + 0.3333 \Rightarrow P_{b1} = 0.667$$

$$P_{b2} = q(1) + q(2) = 0.3333 + 0.3333 \Rightarrow P_{b2} = 0.667$$

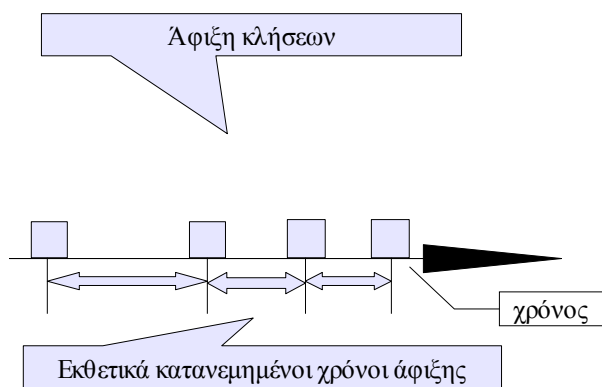
## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

### ΠΟΛΥΔΙΑΣΤΑΤΗ ΚΙΝΗΣΗ ΟΜΑΔΙΚΩΝ ΚΛΗΣΕΩΝ

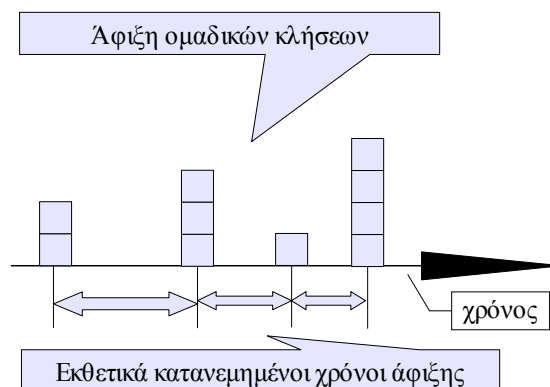
#### 3.1 Ορισμός Πολυδιάστατης κίνησης ομαδικών κλήσεων

Στο προηγούμενο κεφάλαιο εξετάστηκε το μοντέλο απωλειών πολυδιάστατης κίνησης, στο οποίο η άφιξη των κλήσεων ήταν τυχαία (Poisson). Στο κεφάλαιο αυτό θα εξετάσουμε το μοντέλο απωλειών πολυδιάστατης τυχαίας κίνησης ομαδικών κλήσεων (Multirate batch Poisson Loss Model), στο οποίο η άφιξη των κλήσεων γίνεται κατά ομάδες (batches).

Κάθε ομάδα περιλαμβάνει κλήσεις μόνο της ίδιας κατηγορίας κίνησης, ενώ η άφιξη των ομάδων ακολουθεί την διαδικασία Poisson. Στο παρακάτω (Σχήμα 3.1.α) παρουσιάζεται η περίπτωση μιας κατηγορίας κίνησης, όπου οι αφίξεις των κλήσεων ακολουθούν την διαδικασία Poisson, ενώ στο (Σχήμα 3.1.β) θεωρούμε την ίδια κατηγορία κίνησης μόνο που τώρα οι αφίξεις των ομάδων (και όχι των κλήσεων) ακολουθούν την διαδικασία Poisson (διαδικασία Batch Poisson).



Σχήμα 3.1.α: Αφίξεις κλήσεων σύμφωνα με την διαδικασία Poisson



Σχήμα 3.1.β: Αφίξεις κλήσεων σύμφωνα με την διαδικασία Batch Poisson

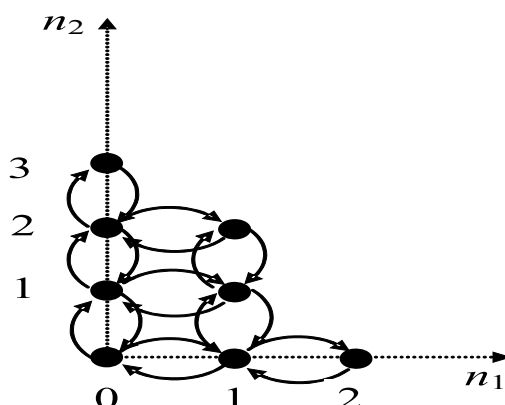
#### 3.2 Γενικό μοντέλο απωλειών πολυδιάστατης τυχαίας κίνησης ομαδικών κλήσεων (Multirate batch Poisson Loss Model)

Θεωρούμε μια ζεύξη χωρητικότητας  $C$  μονάδων εύρους ζώνης, η οποία εξυπηρετεί  $K$  κατηγορίες κίνησης. Οι κλήσεις κάθε κατηγορίας κίνησης  $k$  ( $k=1, \dots, K$ ) απαιτούν  $b_k$  μονάδες εύρους ζώνης προκειμένου να συνδεθούν στο σύστημα, ενώ ο χρόνος εξυπηρέτησής τους είναι εκθετικά καταναμημένος με μέση τιμή  $1/\mu_k$ . Οι κλήσεις αφικνούνται ακολουθώντας την διαδικασία batch Poisson με ρυθμό άφιξης  $\lambda_k$  και κατανομή του μεγέθους της ομάδας κλήσεων  $B_r^k$ , όπου  $B_r^k$  είναι η πιθανότητα μια ομάδα κλήσεων της κατηγορίας κίνησης  $k$  να αποτελείται από  $r$  κλήσεις.

Ως αρχή της απώλειας μιας ομάδας κλήσεων, θεωρούμε την απώλεια μέρους αυτής (partial batch blocking discipline). Σύμφωνα λοιπόν με αυτή την αρχή αν μια ομάδα κλήσεων, κατά την άφιξή της, αποτελείται από  $n$  κλήσεις και το διαθέσιμο εύρος ζώνης της ζεύξης είναι  $m < nb_k$  τότε θα γίνουν δεκτές  $\lfloor m/b_k \rfloor$  κλήσεις (όπου  $\lfloor x \rfloor$  είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος αριθμός που είναι μικρότερος ή ίσος με το  $x$ ) και οι υπόλοιπες  $n - \lfloor m/b_k \rfloor$  κλήσεις, θα απορριφθούν.

### 3.3 Αναλυτικό μοντέλο απωλειών πολυδιάστατης τυχαίας κίνησης ομαδικών κλήσεων

Στο μοντέλο απωλειών πολυδιάστατης τυχαίας κίνησης, είδαμε ότι η πιθανότητα  $P_{b_k}$  δίνεται από μια έκφραση μορφής γινομένου (σχέσεις 2.7-2.8) ως αποτέλεσμα της ύπαρξης τοπικής ισορροπίας μεταξύ διαδοχικών καταστάσεων. Στο παρακάτω (**Σχήμα 3.2**) υπενθυμίζουμε την έννοια της τοπικής ισορροπίας μεταξύ διαδοχικών καταστάσεων (ο ρυθμός μετάβασης από μια κατάσταση στη γειτονική της, ισούται με τον ρυθμό επιστροφής στην κατάσταση αυτή από την γειτονική της) μέσω ενός παραδείγματος όπου δύο κατηγορίες κίνησης με απαιτήσεις  $b_1 = 3$  και  $b_2 = 2$  μονάδες εύρους ζώνης εξυπηρετούνται από μια ζεύξη χωρητικότητας  $C = 7$  μονάδων εύρους ζώνης.



**Σχήμα 3.2:** Σύνολο  $\Omega$  για σύστημα πλήρους διάθεσης με δύο κατηγορίες κίνησης Poisson

Προκειμένου να περιγράψουμε το μοντέλο απωλειών πολυδιάστατης τυχαίας κίνησης ομαδικών κλήσεων στην μόνιμη κατάσταση, συμβολίζουμε με  $n_k$  τον αριθμό των κλήσεων της κατηγορίας  $k$  που βρίσκονται στο σύστημα στην μόνιμη κατάσταση και με  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_k)$  το αντίστοιχο διάνυσμα. Επιπλέον ορίζουμε ως :

$$\mathbf{n}_k^{+m} = (n_1, n_2, \dots, n_{k-1}, n_k + m, n_{k+1}, \dots, n_K), m=1,2,\dots$$

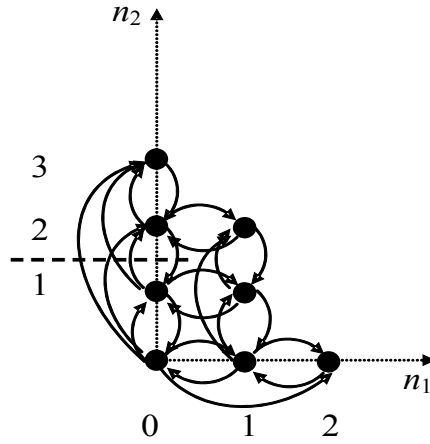
$$\mathbf{n}_k^{-m} = (n_1, n_2, \dots, n_{k-1}, n_k - m, n_{k+1}, \dots, n_K), m=1,2,\dots,n_k$$

$\Omega$  = το σύνολο των δυνατών καταστάσεων, το οποίο στην περίπτωση της πολιτικής πλήρους διάθεσης ορίζεται από την σχέση:  $\Omega = \{\mathbf{n}; 0 \leq \mathbf{n}\mathbf{b} \leq C\}$ , όπου  $\mathbf{n}\mathbf{b} = n_1 b_1 + \dots + n_k b_k$ .

Με βάση, λοιπόν, το παράδειγμα που μόλις προαναφέραμε, αλλά με την κίνηση να είναι batch Poisson, φαίνεται στο (**Σχήμα 3.3**) το σύνολο  $\Omega$  να παραμένει το ίδιο, αλλά οι μεταβάσεις μεταξύ των καταστάσεων να διαφοροποιούνται. Παρατηρώντας κανείς το σχήμα διαπιστώνει ότι η έννοια της τοπικής ισορροπίας μεταξύ διαδοχικών καταστάσεων παύει να ισχύει όταν η διαδικασία άφιξης των κλήσεων είναι η batch Poisson. Παρόλα αυτά υπάρχει μια μορφή τοπικής ισορροπίας, όχι μεταξύ διαδοχικών καταστάσεων, αλλά μεταξύ των ρυθμών που διαπερνούν ένα νοητό διαχωριστικό επίπεδο δύο διαδοχικών καταστάσεων. Αυτής της μορφής η τοπική ισορροπία είναι αρκετή για να μας οδηγήσει σε μια λύση μορφής γινομένου. Τα διαχωριστικά αυτά επίπεδα ορίζονται ως εξής:

Για κάθε διάνυσμα μόνιμης κατάστασης  $\mathbf{n}$ , θεωρούμε το επίπεδο  $L_{\mathbf{n}}^{(k)}$  το οποίο χωρίζει το διάνυσμα  $\mathbf{n}$  από το διάνυσμα  $\mathbf{n}_k^{+1} = (n_1, n_2, \dots, n_{k-1}, n_k + 1, n_{k+1}, \dots, n_K)$ . Για παράδειγμα, στο (**Σχήμα 3.3**) παρουσιάζεται το επίπεδο  $L_{(0,1)}^{(2)}$  το οποίο χωρίζει την κατάσταση  $(0,1)$  από την κατάσταση  $(0,1+1)=(0,2)$ .





**Σχήμα 3.3:** Σύνολο  $\Omega$  για ένα σύστημα πλήρους διάθεσης με 2 κατηγορίες κίνησης batch Poisson

Για να κατανοήσουμε καλύτερα το (Σχήμα 3.3) και πιο συγκεκριμένα την περίπτωση “προς τα άνω” μετάβαση ως προς το επίπεδο  $L_{(0,1)}^{(2)}$ , λόγω άφιξης μιας ομάδας κλήσεων της δεύτερης κατηγορίας κίνησης, θεωρούμε με βάση το προηγούμενο παράδειγμα, την περίπτωση να έχουμε:  $\mathbf{n}=(n_1, n_2) = (0, 1)$ ,  $\mathbf{n}_2^{-1}=(n_1, n_2-1) = (0, 1-1)$ , οπότε έχουμε την εξής σχέση:

$$f^{(up)}(L_{(0,1)}^2) = \sum_{l=0}^1 P(\mathbf{n}_2^{-l}) \lambda_2 \sum_{m=l+1}^{\infty} B_m^{(2)} \Rightarrow f^{(up)}(L_{(0,1)}^2) = P(0,1) \lambda_2 \sum_{m=1}^{\infty} B_m^{(2)} + P(0,0) \lambda_2 \sum_{m=2}^{\infty} B_m^{(2)} \quad (3.1)$$

Ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους της σχέσης (3.1) μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: Μας δίνει την πιθανότητα το σύστημα να βρίσκεται στην κατάσταση (0, 1) και να έλθει με ρυθμό άφιξης  $\lambda_2$  μια ομάδα κλήσεων με μέγεθος 1, 2, ...

Ο δεύτερος όρος μας δίνει την πιθανότητα το σύστημα να βρίσκεται στην κατάσταση (0, 0) και να έλθει με ρυθμό άφιξης  $\lambda_2$  μια ομάδα κλήσεων με μέγεθος τουλάχιστον 2. Άφιξη ομάδας με μέγεθος 1 (αποτελούμενη δηλαδή από μόνο μια κλήση) θα οδηγούσε το σύστημα από την κατάσταση (0, 0) στην κατάσταση (0, 1) και βέβαια δεν θα είχαμε μετάβαση πάνω από το επίπεδο  $L_{(0,1)}^{(2)}$ .

Εύκολα τώρα προκύπτει ότι η “προς τα άνω”, ως προς το επίπεδο  $L_n^{(k)}$ , πιθανότητα μετάβασης (λόγω νέας άφιξης ομάδας κλήσεων της κατηγορίας k) δίνεται από τη σχέση (3.2) [5]:

$$f^{(up)}(L_n^k) = \sum_{l=0}^{n_k} P(\mathbf{n}_k^{-l}) \lambda_k \sum_{m=l+1}^{\infty} B_m^{(k)} \quad (3.2)$$

Η “προς τα κάτω”, ως προς το επίπεδο  $L_n^{(k)}$ , πιθανότητα μετάβασης (λόγω τερματισμού μιας κλήσης της κατηγορίας κίνησης k) δίνεται από την σχέση (3.3) [5]:

$$f^{(down)}(L_n^k) = P(\mathbf{n}_k^{+1}) \mu_k (n_k + 1) \quad (3.3)$$

### 3.4 Υπολογισμός των απωλειών πολυδιάστατης τυχαίας κίνησης ομαδικών κλήσεων

Γνωρίζοντας ότι το μοντέλο απωλειών πολυδιάστατης τυχαίας κίνησης ομαδικών κλήσεων έχει λύση μορφής γινομένου, το επόμενο στάδιο είναι η εύρεση ενός αναδρομικού τύπου υπολογισμού της πιθανότητας να υπάρχουν  $j$  κατειλημμένες μονάδες εύρους στην ζεύξη,  $q(j)$ . Ο αναδρομικός τύπος που προκύπτει έχει την ακόλουθη μορφή [5]:

$$q(j) = \begin{cases} 1 & \text{για } j = 0 \\ \frac{1}{j} \sum_{k=1}^K \alpha_k b_k \sum_{l=1}^{\lfloor j/b_k \rfloor} \hat{B}_{l-1}^k q(j - lb_k) & \text{για } j = 1, \dots, C \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \quad (3.4)$$

όπου:  $\alpha_k = \lambda_k / \mu_k$ ,  $\lfloor j/b_k \rfloor$  είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος αριθμός που είναι μικρότερος ή ίσος της ποσότητας  $j/b_k$ , ενώ  $\hat{B}_l^k = \sum_{r=l+1}^{\infty} B_r^k$

- Στην ειδική περίπτωση που ισχύει:  $B_r^k=1$  για  $r=1$  και  $B_r^k=0$  για  $r>1$  (επιτρέπεται δηλαδή κάθε ομάδα κλήσεων της κατηγορίας κίνησης  $k$  να αποτελείται μόνο από μια κλήση) τότε η διαδικασία batch Poisson μετατρέπεται σε Poisson και προκύπτει το μοντέλο απωλειών πολυδιάστατης τυχαίας κίνησης του 2ου κεφαλαίου οπότε ο τύπος (3.4) συμπίπτει με τον (2.10).
- Αν οι κλήσεις κάθε κατηγορίας κίνησης  $k$  φτάνουν κατά ομάδες μεγέθους  $s_k$  όπου το  $s_k$  καθορίζεται από την γεωμετρική κατανομή με παράμετρο  $\beta_k$ , δηλαδή  $\Pr(s_k = r) = (1-\beta_k)\beta_k^{r-1}$  με  $r \geq 1$ , τότε το μοντέλο απωλειών πολυδιάστατης τυχαίας κίνησης ομαδικών κλήσεων συμπίπτει με το μοντέλο πολυδιάστατης κίνησης του Delbrouck [6]. Πιο συγκεκριμένα επειδή ισχύει  $B_1^k = \beta_k^{-1}$  ο τύπος (3.4) παίρνει την μορφή:

$$q(j) = \begin{cases} 1 & \text{για } j = 0 \\ \frac{1}{j} \sum_{k=1}^K \hat{\alpha}_k b_k \sum_{y=1}^{\lfloor j/b_k \rfloor} \beta_k^{y-1} q(j - y b_k) & \text{για } j = 1, \dots, C \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \quad (3.5)$$

Έχοντας καθορίσει κανείς τον τρόπο υπολογισμού των  $q(j)$  (τύπος 3.5) είναι σε θέση να υπολογίσει διάφορες παραμέτρους απόδοσης του συστήματος, όπως:

- Την πιθανότητα συμφόρησης στον χρόνο (time congestion probability) μιας κατηγορίας κίνησης  $k$  που ορίζεται ως  $P_{b_k}$ , και είναι η πιθανότητα να είναι κατειλημμένες το λιγότερο  $C - b_k + 1$  μονάδες εύρους ζώνης της ζεύξης κατά την άφιξη μιας ομάδας κλήσεων της κατηγορίας κίνησης  $k$ :

$$P_{b_k} = \sum_{j=C-b_k+1}^C G^{-1} q(j) \quad (3.6)$$

όπου :  $G = \sum_{j=0}^C q(j)$  είναι η σταθερά κανονικοποίησης.

- Την πιθανότητα συμφόρησης των κλήσεων (call congestion probability) της κατηγορίας κίνησης  $k$ , η οποία ορίζεται ως  $C_{b_k}$  και είναι η πιθανότητα να μην γίνει δεκτή στο σύστημα μια νέα κλήση της κατηγορίας κίνησης  $k$ :

$$C_{b_k} = \frac{\alpha_k \hat{B}_k - \bar{n}_k}{\alpha_k \hat{B}_k} \quad (3.7)$$

όπου η μεταβλητή  $\hat{B}_k$  εκφράζει την μέση τιμή του μεγέθους της ομάδας κλήσεων, της κατηγορίας κίνησης  $k$ , που φτάνει στο σύστημα και ισούται με:  $\sum_{r=1}^{\infty} r B_r^k$

- Την μέση τιμή των κλήσεων της κατηγορίας κίνησης  $k$  στο σύστημα,  $\bar{n}_k$

$$\bar{n}_k = \sum_{j=1}^C y_k(j) q(j) \quad (3.8)$$

- Την μέση τιμή των κλήσεων της κατηγορίας κίνησης  $k$  ενώ το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση  $j$ , που ορίζεται ως  $y_k(j)$ :

$$y_k(j) = \frac{\alpha_k \sum_{l=1}^{\lfloor j/b_k \rfloor} \hat{B}_{l-1}^k q(j - lb_k)}{q(j)} \quad (3.9)$$

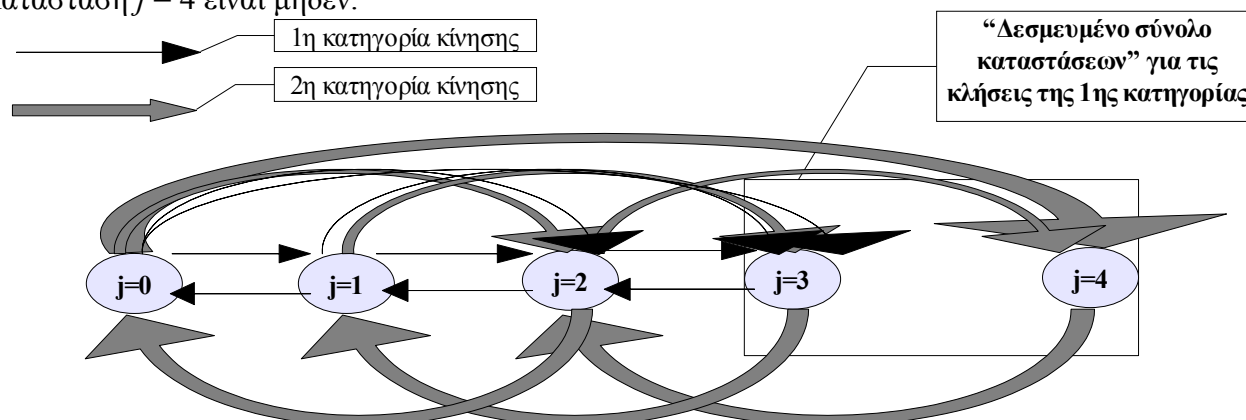
### 3.5 Εφαρμογή της πολιτικής δέσμευσης εύρους ζώνης στο μοντέλο απωλειών πολυδιάστατης τυχαίας κίνησης ομαδικών κλήσεων (βάσει της μεθόδου Roberts)

Η εφαρμογή της πολιτικής δέσμευσης εύρους ζώνης στο μοντέλο απωλειών πολυδιάστατης τυχαίας κίνησης ομαδικών κλήσεων βάσει της μεθόδου Roberts βασίζεται στην υπόθεση ότι η μέση τιμή των κλήσεων της κατηγορίας κίνησης  $k$ ,  $y_k(j)$ , σε κάθε κατάσταση  $j \in [C-t_k + 1, \dots, C]$  είναι μηδέν, όπου  $t_k$  είναι η παράμετρος δέσμευσης εύρους ζώνης της κατηγορίας κίνησης  $k$ . Η υπόθεση αυτή στοχεύει στην εύρεση ενός απλού αναδρομικού τύπου για τον υπολογισμό των  $q(j)$ , ο οποίος θα είναι προσεγγιστικός αφού το μοντέλο παύει να έχει λύση μορφής γινομένου [7]. Για την περιγραφή της μεθόδου Roberts θεωρούμε το παρακάτω παράδειγμα 3.1.

#### Παράδειγμα 3.1

Έστω μια ζεύξη χωρητικότητας  $C=4$  μονάδων εύρους ζώνης, η οποία εξυπηρετεί δύο κατηγορίες κίνησης, οι κλήσεις των οποίων απαιτούν  $b_1=1$  και  $b_2=2$  μονάδες εύρους ζώνης αντίστοιχα. Οι παράμετροι δέσμευσης εύρους ζώνης επιλέγονται  $t_1=1$ ,  $t_2=0$  ώστε να επιτευχθεί πλήρης εξισορρόπηση των πιθανοτήτων συμφόρησης στον χρόνο των δύο κατηγοριών κίνησης.

Το Σχήμα 3.4 παρουσιάζει το διάγραμμα καταστάσεων για το παράδειγμα αυτό. Τα δύο διαφορετικά βέλη αντιστοιχούν στις δύο κατηγορίες κίνησης και χρησιμοποιούνται για να δείξουν όλες τις πιθανές μεταβάσεις μεταξύ των καταστάσεων  $j = 0, \dots, 4$ . Παραδείγματος χάριν, έστω ότι την στιγμή της άφιξης μιας ομάδας κλήσεων της πρώτης κατηγορίας κίνησης το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση  $j = 0$ . Η ομάδα αυτή μπορεί να αποτελείται από μία, δύο ή τρεις κλήσεις οπότε θα έχουμε μετάβαση του συστήματος στις καταστάσεις  $j = 1$ ,  $j = 2$  ή  $j = 3$  αντίστοιχα (προφανώς η ομάδα αυτή μπορεί να αποτελείται από περισσότερες των τριών κλήσεις, οπότε όμως οι παραπάνω κλήσεις απορρίπτονται και εγκαταλείπουν το σύστημα). Όμοια αν το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση  $j = 0$  και έχουμε άφιξη μιας ομάδας κλήσεων της δεύτερης κατηγορίας κίνησης τότε το σύστημα θα «μεταφερθεί» στις καταστάσεις  $j = 2$  ή  $j = 4$  ανάλογα με το αν η ομάδα αποτελείται από μία ή δύο κλήσεις αντίστοιχα (αν βέβαια η ομάδα αποτελείται από περισσότερες των δύο κλήσεων, τότε οι παραπάνω αυτές κλήσεις απορρίπτονται). Όπως εύκολα παρατηρεί κανείς όταν το σύστημα βρεθεί στις καταστάσεις  $j = 3$  ή  $j = 4$  τότε καμία νέα κλήση της πρώτης κατηγορίας κίνησης δεν μπορεί να γίνει δεκτή (οι καταστάσεις  $j = 3, 4$  συνιστούν το «δεσμευμένο σύνολο καταστάσεων» της πρώτης κατηγορίας κίνησης). Στην κατάσταση  $j = 4$  λόγω της παραμέτρου δέσμευσης εύρους ζώνης ( $t_1=1$ ) η μέση τιμή των κλήσεων της πρώτης κατηγορίας κίνησης στην κατάσταση  $j = 4$  είναι μηδέν.



Σχήμα 3.4: Διάγραμμα καταστάσεων για το παρ. 3.1 βάσει της μεθόδου Roberts

Προκειμένου να συμπεριληφθεί η υπόθεση της μεθόδου Roberts στον τύπο (3.5) που υπολογίζει τις πιθανότητες  $q(j)$  στο μοντέλο απωλειών πολυδιάστατης τυχαίας κίνησης ομαδικών κλήσεων με εφαρμογή της πολιτικής πλήρους διάθεσης, θα πρέπει πρώτα να ορίσουμε την παρακάτω μεταβλητή:

$$D_k(j - b_k) = \begin{cases} b_k & \text{όταν } j \leq C - t_k \\ 0 & \text{όταν } j > C - t_k \end{cases} \quad (3.10)$$

Με βάση την σχέση (3.10) ο τύπος (3.5) παίρνει την μορφή [7]:

$$q(j) = \begin{cases} 1 & \text{για } j = 0 \\ \frac{1}{j} \sum_{k=1}^K \alpha_k D_k(j - b_k) \sum_{l=1}^{\lfloor j/b_k \rfloor} \hat{B}_{l-1}^k q(j - lb_k) & \text{για } j = 1, \dots, C \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \quad (3.11)$$

**Σημείωση:** Στην ειδική περίπτωση που ισχύει:  $B_r^k = 1$  για  $r=1$  και  $B_r^k = 0$  για  $r > 1$  τότε η διαδικασία batch Poisson μετατρέπεται σε Poisson.

Έχοντας καθορίσει τον τρόπο υπολογισμού των  $q(j)$  μπορούμε να υπολογίσουμε την μέση τιμή των κλήσεων της κατηγορίας κίνησης  $k$  ενώ το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση  $j$ ,  $y_k(j)$ , από τον τύπο [7]:

$$y_k(j) = \begin{cases} \frac{\alpha_k \sum_{l=1}^{\lfloor j/b_k \rfloor} \hat{B}_{l-1}^k q(j - lb_k)}{q(j)} & \text{όταν } j \leq C - t_k \\ 0 & \text{όταν } j > C - t_k \end{cases} \quad (3.12)$$

Βασιζόμενοι στους τύπους (3.11) και (3.12) μπορούμε να υπολογίσουμε διάφορες παραμέτρους απόδοσης του συστήματος (βλ. τύπους (3.7) έως (3.9), για τον υπολογισμό της κατειλημμένης χωρητικότητας, της μέσης τιμής των κλήσεων στο σύστημα μιας κατηγορίας κίνησης  $k$ , της εκμετάλλευσης της χωρητικότητας της ζεύξης και της πιθανότητας συμφόρησης των κλήσεων). Όσον αφορά στην πιθανότητα συμφόρησης στον χρόνο, διαφοροποιούμε τα όρια του αθροίσματος του τύπου (3.6) προκειμένου να ληφθεί υπ' όψιν η παράμετρος δέσμευσης του εύρους ζώνης:

$$P_{b_k} = \sum_{j=C-b_k-t_k+1}^C G^{-1} q(j) \quad (3.13)$$

όπου  $G = \sum_{j=0}^C q(j)$  είναι η σταθερά κανονικοποίησης.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ & ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

#### Παράδειγμα 1

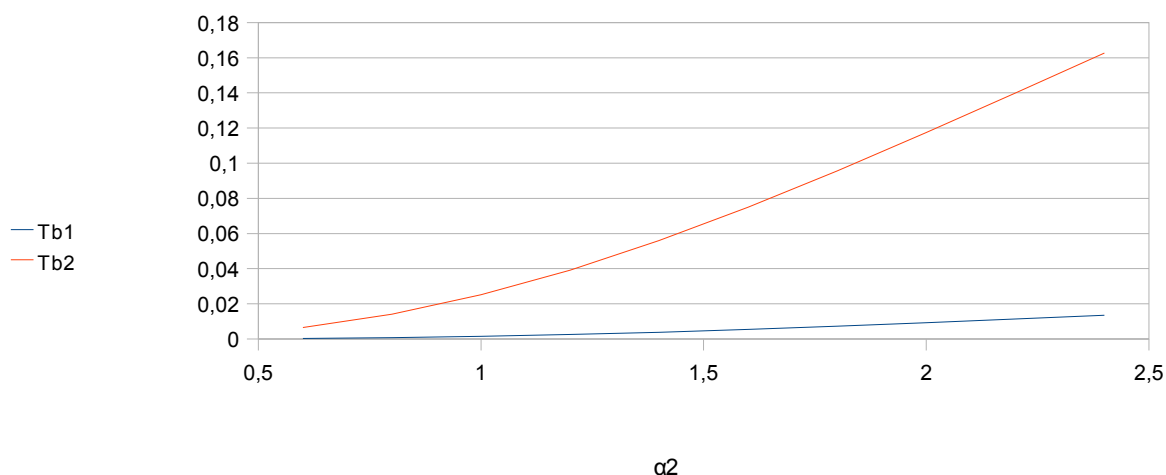
Έστω σύστημα χωρητικότητας  $C=60$ , το οποίο εξυπηρετεί  $K=2$  κατηγορίες κίνησης, οι κλήσεις των οποίων έχουν απαίτηση σε μονάδες εύρους ζώνης  $b_1=1$  και  $b_2=12$ , αντιστοίχως. Το φορτίο κίνησης της 1ης κατηγορίας παραμένει σταθερό  $a_1=10$  erl, ενώ της 2ης κατηγορίας παίρνει διάφορες τιμές από,  $a_2=0.6-2.4$  erl.

Η παράμετρος της γεωμετρικής κατανομής και στις 2 κατηγορίες κίνησης ισούται με  $z_1=z_2=1$ . Αυτό έχει ως αποτέλεσμα όπως παρατηρούμε από τον πίνακα μετρήσεων που ακολουθεί αλλά και από την γραφική παράσταση, το **time congestion** της κάθε κατηγορίας, να ισούται με το **call congestion** της αντίστοιχης ( $Tb_1=Cb_1$  και  $Tb_2=Cb_2$ ).

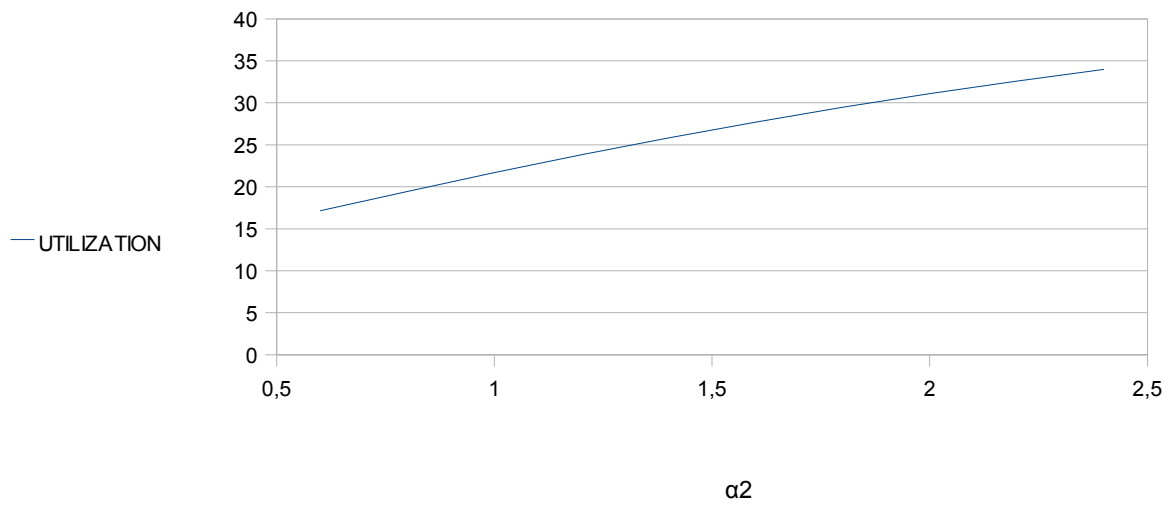
Επομένως, η άφιξη των κλήσεων ακολουθεί την κατανομή **Poisson**.

$a_2$	$Tb_1$	$Tb_2$	$Cb_1$	$Cb_2$	UTILIZATION
0,6	0.00028	0.00647	0.00028	0.00647	17,15
0,8	0.00073	0.01410	0.00073	0.01410	19,45
1	0.00146	0.02509	0.00146	0.02509	21,68
1,2	0.00250	0.03920	0.00250	0.03920	23,81
1,4	0.00383	0.05601	0.00383	0.05601	25,82
1,6	0.00542	0.07501	0.00542	0.07501	27,7
1,8	0.00723	0.09564	0.00723	0.09564	29,46
2	0.00922	0.11742	0.00922	0.11742	31,08
2,2	0.01134	0.13989	0.01134	0.13989	32,59
2,4	0.01355	0.16268	0.01355	0.16268	33,97

Πίνακας 4.1:Οι πιθανότητες συμφόρησης των κλήσεων,συμφόρησης στον χρόνο,& οι τιμές U,για ζεύξη χωρητικότητας  $C=60$ ,όταν η διαδικασία άφιξης των κλήσεων είναι Poisson.



Σχ.4.1:Σύγκριση των πιθανοτήτων συμφόρησης στον χρόνο,όταν η διαδικασία άφιξης των κλήσεων είναι Poisson ( $C=60$ ).



**Σχ.4.2: Διάγραμμα της εκμετάλλευσης (utilization) της χωρητικότητας του συστήματος όταν η διαδικασία άφιξης των κλήσεων είναι Poisson ( $C=60$ ).**

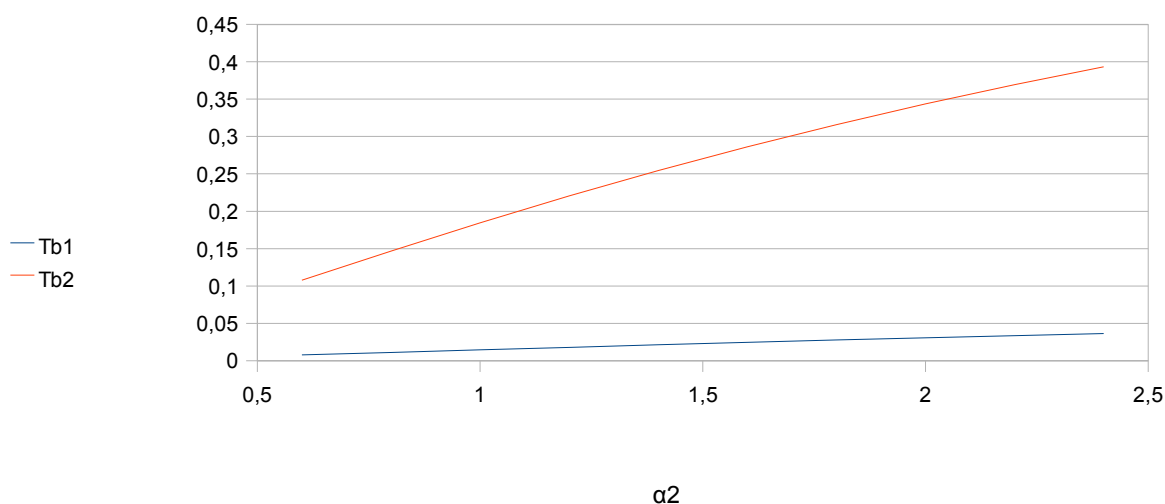
### Παράδειγμα 2

Έστω σύστημα χωρητικότητας  $C=50$ , το οποίο εξυπηρετεί  $K=2$  κατηγορίες κίνησης, οι κλήσεις των οποίων έχουν απαίτηση σε μονάδες εύρους ζώνης  $b_1=1$  και  $b_2=12$ , αντιστοίχως. Το φορτίο κίνησης της 1ης κατηγορίας παραμένει σταθερό  $\alpha_1=10$  erl, ενώ της 2ης κατηγορίας παίρνει διάφορες τιμές από,  $\alpha_2=0.6-2.4$  erl.

Η παράμετρος της γεωμετρικής κατανομής στην 1η κατηγορία ισούται με  $z_1=1.25$ , ενώ στην 2η ισούται με  $z_2=2$ .

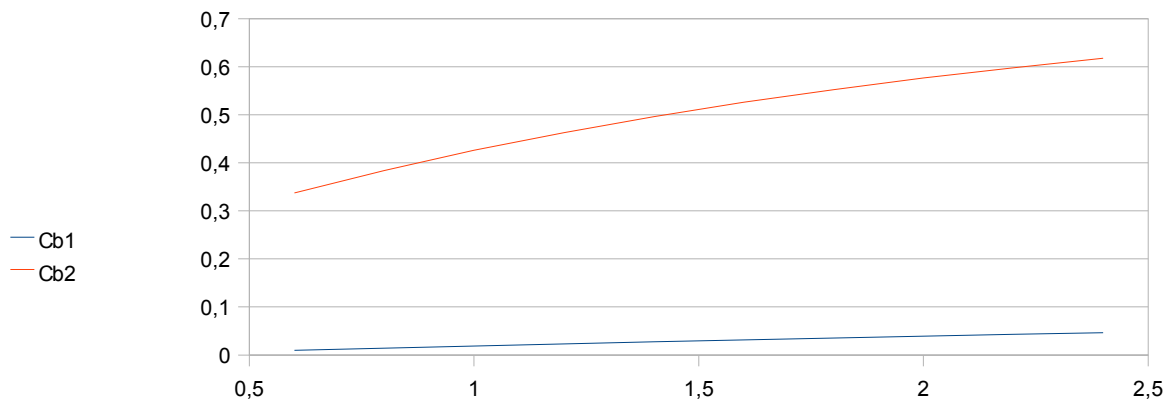
$\alpha_2$	$T_{b1}$	$T_{b2}$	$C_{b1}$	$C_{b2}$	UTILIZATION
0,6	0.00767	0.10751	0.00985	0.33710	21,92
0,8	0.01098	0.14660	0.0140	0.38412	24,14
1	0.01438	0.18445	0.01845	0.42592	26,04
1,2	0.01779	0.22048	0.02282	0.46309	27,67
1,4	0.02115	0.25442	0.02711	0.49621	29,08
1,6	0.02442	0.28621	0.03129	0.52583	30,31
1,8	0.02757	0.31589	0.03532	0.55240	31,39
2	0.03059	0.34357	0.03919	0.57634	32,34
2,2	0.03349	0.36936	0.04289	0.59798	33,19
2,4	0.03626	0.39341	0.04642	0.61762	33,94

**Πίνακας 4.2: Οι πιθανότητες συμφόρησης των κλήσεων, συμφόρησης στον χρόνο, & οι τιμές U για ζεύξη χωρητικότητας  $C=50$ , όταν η διαδικασία άφιξης των κλήσεων είναι batch Poisson.**



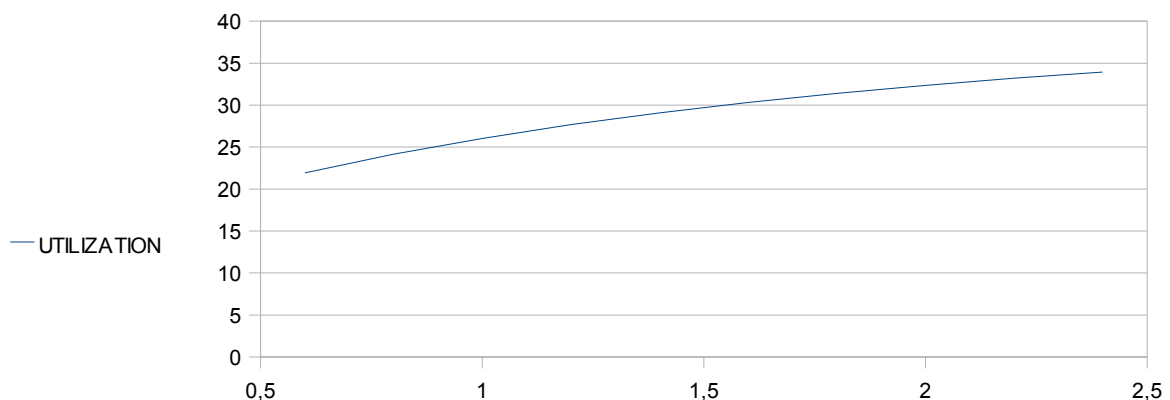
**Σχ.4.3: Σύγκριση των πιθανοτήτων συμφόρησης στον χρόνο, όταν η διαδικασία άφιξης των κλήσεων είναι batch Poisson ( $C=50$ ).**





α2

Σχ.4.4: Σύγκριση των πιθανοτήτων συμφόρησης των κλήσεων, όταν η διαδικασία άφιξης των κλήσεων είναι batch Poisson (C=50).



α2

Σχ.4.5: Διάγραμμα της εκμετάλλευσης (utilization) της χωρητικότητας του συστήματος όταν η διαδικασία άφιξης των κλήσεων είναι batch Poisson (C=50).

- Το γεγονός ότι η διαδικασία άφιξης των κλήσεων είναι **batch Poisson**, σημαίνει ότι στο σύστημα έρχονται περισσότερες κλήσεις. Άρα είναι αναμενόμενο, στο **παράδειγμα 2**, να έχουμε υψηλότερες τιμές **blocking** από εκείνες του **1ου παραδείγματος**.

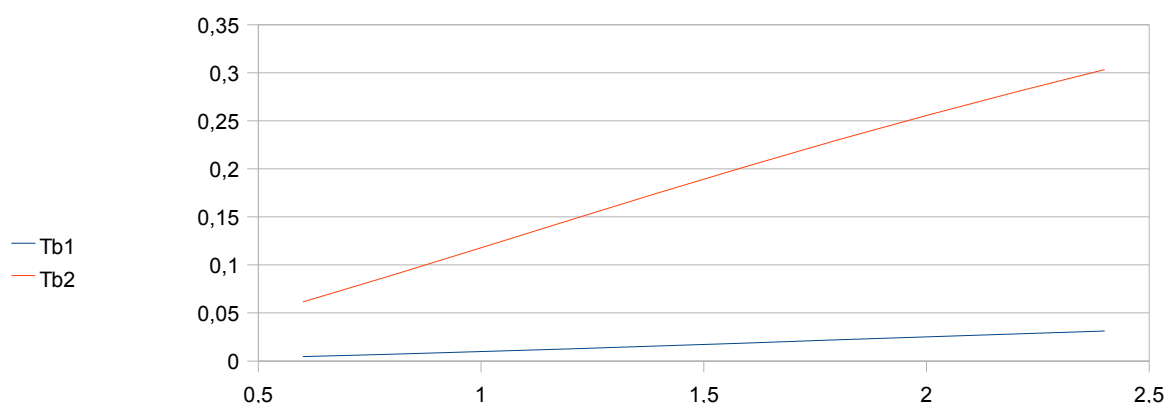
### Παράδειγμα 3

Έστω σύστημα χωρητικότητας  $C=60$ , το οποίο εξυπηρετεί  $K=2$  κατηγορίες κίνησης, οι κλήσεις των οποίων έχουν απαίτηση σε μονάδες εύρους ζώνης  $b_1=1$  και  $b_2=12$ , αντιστοίχως. Το φορτίο κίνησης της 1ης κατηγορίας παραμένει σταθερό  $a_1=10$  erl, ενώ της 2ης κατηγορίας παίρνει διάφορες τιμές από,  $a_2=0.6-2.4$  erl.

Η παράμετρος της γεωμετρικής κατανομής στην 1η κατηγορία ισούται με  $z_1=1.25$ , ενώ στην 2η ισούται με  $z_2=2$ .

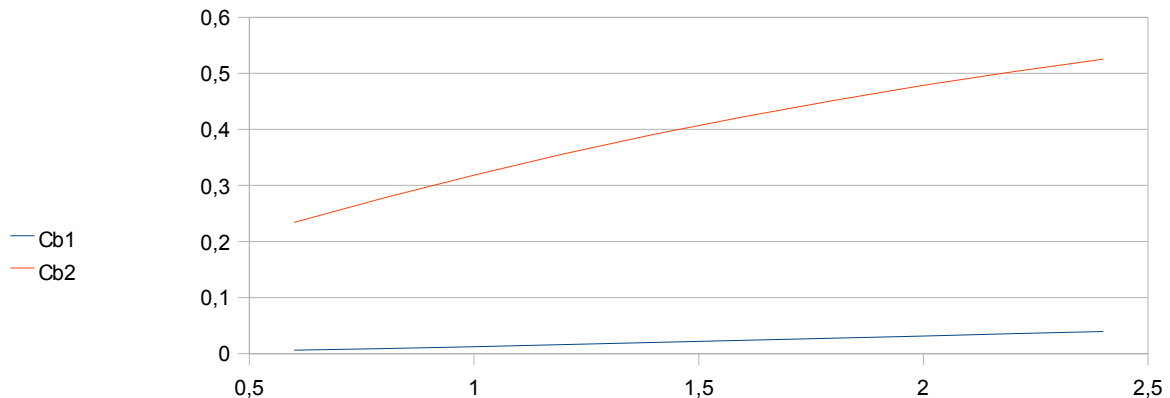
$a_2$	$T_{b1}$	$T_{b2}$	$C_{b1}$	$C_{b2}$	UTILIZATION
0,6	0.00460	0.06159	0.00576	0.23387	23.46
0,8	0.00702	0.08921	0.00879	0.27766	26.25
1	0.00974	0.11793	0.01218	0.31848	28.70
1,2	0.01265	0.14686	0.01581	0.35619	30.84
1,4	0.01570	0.17540	0.01961	0.39085	32.72
1,6	0.01882	0.20317	0.02350	0.42263	34.37
1,8	0.02198	0.22993	0.02743	0.45173	35.84
2	0.02515	0.25556	0.03137	0.47841	37.14
2,2	0.02829	0.28000	0.03528	0.50288	38.30
2,4	0.03140	0.30324	0.03914	0.52536	39.34

**Πίνακας 4.3: Οι πιθανότητες συμφόρησης των κλήσεων, συμφόρησης στον χρόνο, & οι τιμές U για ζεύξη χωρητικότητας  $C=60$ , όταν η διαδικασία άφιξης των κλήσεων είναι batch Poisson.**



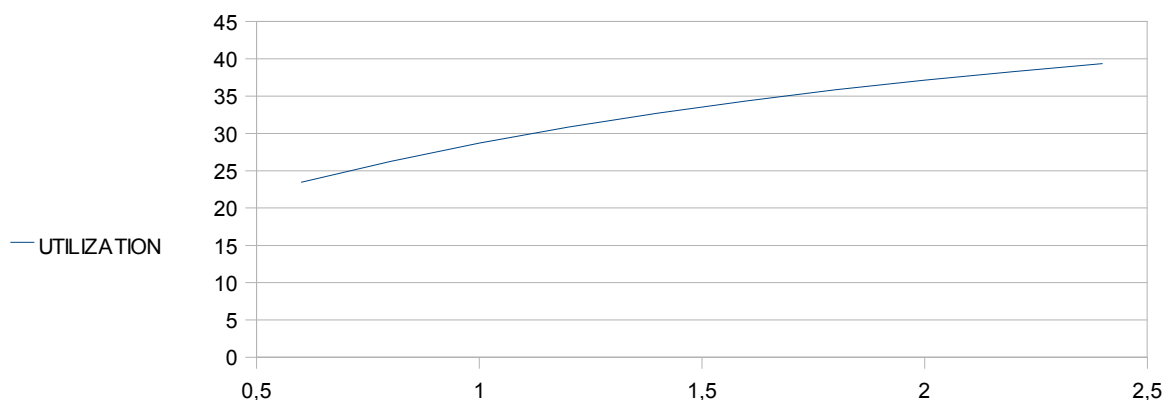
$a_2$

**Σχ.4.6: Σύγκριση των πιθανοτήτων συμφόρησης στον χρόνο, όταν η διαδικασία άφιξης των κλήσεων είναι batch Poisson ( $C=60$ ).**



α2

Σχ.4.7: Σύγκριση των πιθανοτήτων συμφόρησης των κλήσεων, όταν η διαδικασία άφιξης των κλήσεων είναι batch Poisson (C=60).



α2

Σχ.4.8: Διάγραμμα της εκμετάλλευσης (utilization) της χωρητικότητας του συστήματος όταν η διαδικασία άφιξης των κλήσεων είναι batch Poisson (C=60).

- Αύξηση της χωρητικότητας του συστήματος από C=50 σε C=60, οδηγεί σε μείωση του **blocking**, όπως φαίνεται στο Σχ.4.7 σε σχέση με το Σχ.4.4 του 2ου παραδείγματος.
- Σε αντίθεση με τις τιμές **blocking**, αύξηση του **capacity** του συστήματος οδηγεί σε αύξηση του **Utilization**, όπως φαίνεται στο Σχ.4.8 σε σχέση με το Σχ.4.5. Παρουσιάζεται λοιπόν αύξηση, στην **εκμετάλλευση** της χωρητικότητας της ζεύξης.

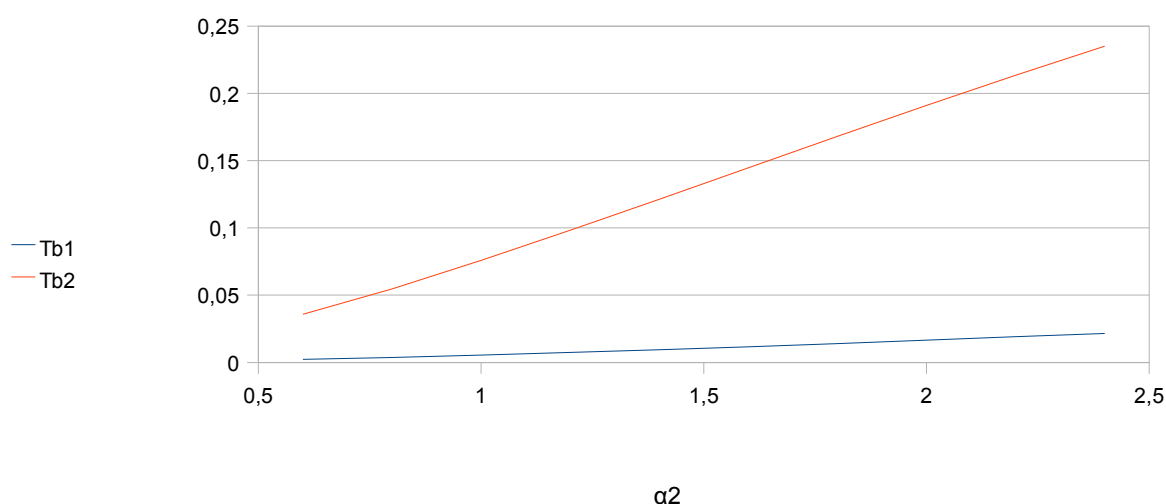
### Παράδειγμα 4

Έστω σύστημα χωρητικότητας  $C=70$ , το οποίο εξυπηρετεί  $K=2$  κατηγορίες κίνησης, οι κλήσεις των οποίων έχουν απαίτηση σε μονάδες εύρους ζώνης  $b_1=1$  και  $b_2=12$ , αντιστοίχως. Το φορτίο κίνησης της 1ης κατηγορίας παραμένει σταθερό  $a_1=10$  erl, ενώ της 2ης κατηγορίας παίρνει διάφορες τιμές από,  $a_2=0.6-2.4$  erl.

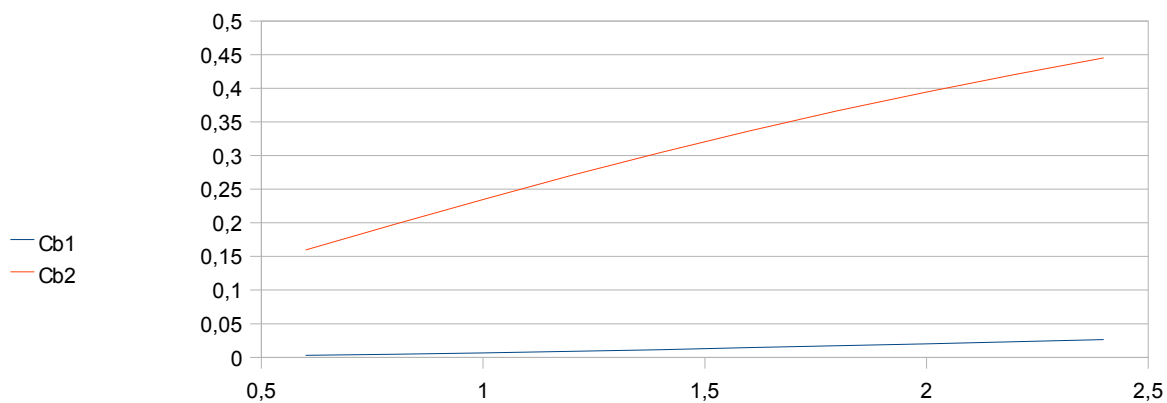
Η παράμετρος της γεωμετρικής κατανομής στην 1η κατηγορία ισούται με  $z_1=1.25$ , ενώ στην 2η ισούται με  $z_2=2$ .

$a_2$	$Tb_1$	$Tb_2$	$Cb_1$	$Cb_2$	UTILIZATION
0,6	0.00230	0.03570	0.00284	0.15980	24.56
0,8	0.00371	0.05467	0.00457	0.19772	27.84
1	0.00540	0.07575	0.00663	0.23485	30.78
1,2	0.00731	0.09818	0.00897	0.27057	33.39
1,4	0.00941	0.12134	0.01153	0.30453	35.72
1,6	0.01166	0.14476	0.01428	0.33654	37.79
1,8	0.01403	0.16808	0.01717	0.36655	39.65
2	0.01649	0.19103	0.02016	0.39459	41.30
2,2	0.01902	0.21344	0.02322	0.42074	42.79
2,4	0.02158	0.23519	0.02634	0.44509	44.13

**Πίνακας 4.4: Οι πιθανότητες συμφόρησης των κλήσεων, συμφόρησης στον χρόνο, & οι τιμές U για ζεύξη χωρητικότητας  $C=70$ , όταν η διαδικασία άφιξης των κλήσεων είναι batch Poisson.**

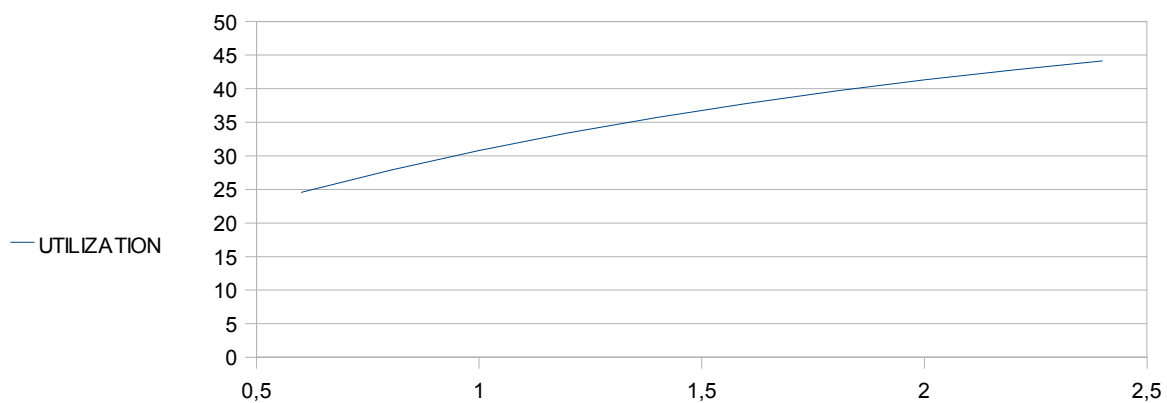


**Σχ.4.9: Σύγκριση των πιθανοτήτων συμφόρησης στον χρόνο, όταν η διαδικασία άφιξης των κλήσεων είναι batch Poisson ( $C=70$ ).**



$\alpha_2$

Σχ.4.10: Σύγκριση των πιθανοτήτων συμφόρησης των κλήσεων, όταν η διαδικασία άφιξης των κλήσεων είναι batch Poisson ( $C=70$ ).



$\alpha_2$

Σχ.4.11: Διάγραμμα της εκμετάλλευσης (utilization) της χωρητικότητας του συστήματος όταν η διαδικασία άφιξης των κλήσεων είναι batch Poisson ( $C=70$ ).

#### Γενικό συμπέρασμα:

Στα παραδείγματα 2, 3 και 4 η παράμετρος της γεωμετρικής κατανομής και των δύο κατηγοριών κίνησης είναι μεγαλύτερη από την μονάδα ( $z_1=1.25$ ,  $z_2=2$ ) άρα η άφιξη των κλήσεων ακολουθεί την κατανομή **Batch Poisson**. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα όπως φαίνεται από τους πίνακες τιμών, το **call congestion** της κάθε κατηγορίας, να είναι μεγαλύτερο από το **time congestion** της αντίστοιχης ( $C_{b1} > T_{b1}$  και  $C_{b2} > T_{b2}$ ). Ένα άλλο στοιχείο το οποίο παρατηρούμε από τους πίνακες μετρήσεων αλλά και τις γραφικές παραστάσεις στα τρία αυτά παραδείγματα, είναι πως, καθώς η τιμή της χωρητικότητας  $C$  του συστήματος αυξάνει, οι τιμές των **call congestion** και **time congestion** μειώνονται.

### Παράδειγμα 5

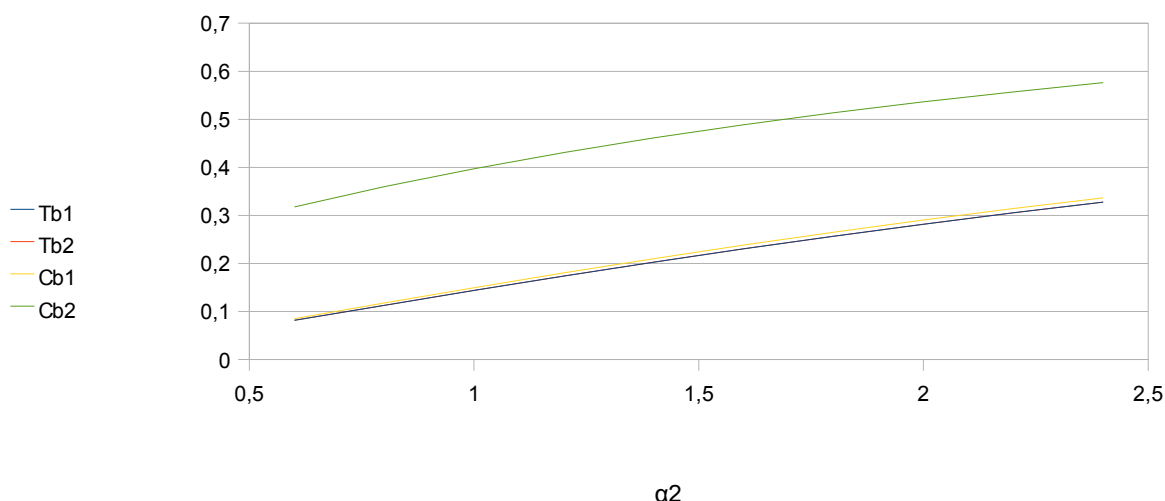
Έστω σύστημα χωρητικότητας  $C=50$ , το οποίο εξυπηρετεί  $K=2$  κατηγορίες κίνησης, οι κλήσεις των οποίων έχουν απαίτηση σε μονάδες εύρους ζώνης  $b_1=1$  και  $b_2=12$ , αντιστοίχως. Το φορτίο κίνησης της 1ης κατηγορίας παραμένει σταθερό  $a_1=10$  erl, ενώ της 2ης κατηγορίας παίρνει διάφορες τιμές από,  $a_2=0.6-2.4$  erl.

Η παράμετρος της γεωμετρικής κατανομής στην 1η κατηγορία ισούται με  $z_1=1.25$ , ενώ στην 2η ισούται με  $z_2=2$ .

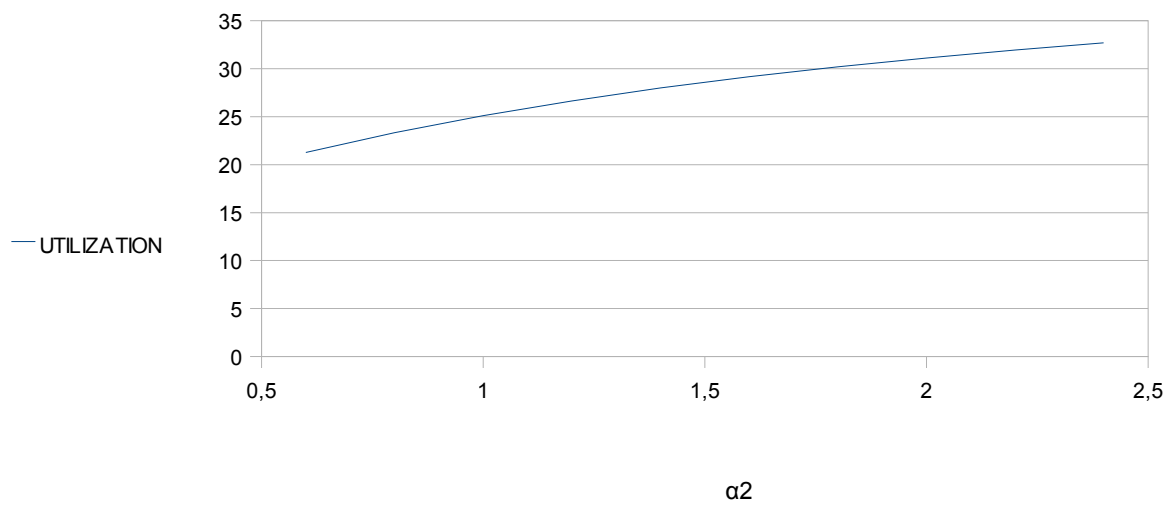
Επιπλέον στο σύστημα εφαρμόζεται η πολιτική δέσμευσης εύρους ζώνης με παραμέτρους,  $t_1=11$  και  $t_2=0$ . Η επιλογή αυτών των παραμέτρων οδηγεί σε εξισορρόπηση των τιμών της πιθανότητας συμφόρησης στον χρόνο ( $T_{b1} = T_{b2}$ ).

$a_2$	$T_{b1}$	$T_{b2}$	$C_{b1}$	$C_{b2}$	UTILIZATION
0,6	0.08136	0.08136	0.08516	0.31768	21.26
0,8	0.11251	0.11251	0.11739	0.35952	23.32
1	0.14344	0.14344	0.14925	0.39705	25,1
1,2	0.17357	0.17357	0.18015	0.43078	26.64
1,4	0.20257	0.20257	0.20981	0.46118	27.98
1,6	0.23028	0.23028	0.23805	0.48867	29.15
1,8	0.25663	0.25663	0.26484	0.51363	30.20
2	0.28163	0.28163	0.29019	0.53636	31,12
2,2	0.30528	0.30528	0.31413	0.55713	31.95
2,4	0.32766	0.32766	0.33673	0.57617	32.70

**Πίνακας 4.5: Οι πιθανότητες συμφόρησης των κλήσεων, συμφόρησης στον χρόνο, & οι τιμές U για ζεύξη χωρητικότητας  $C=50$ , όταν η διαδικασία άφιξης των κλήσεων είναι batch Poisson και στο σύστημα εφαρμόζεται η πολιτική δέσμευσης εύρους ζώνης.**



**Σχ.4.12: Σύγκριση των πιθανοτήτων συμφόρησης στον χρόνο & συμφόρησης των κλήσεων, όταν η διαδικασία άφιξης των κλήσεων είναι batch Poisson και στο σύστημα εφαρμόζεται η πολιτική δέσμευσης εύρους ζώνης ( $C=50$ ).**



**Σχ.4.13: Διάγραμμα της εκμετάλλευσης (utilization) της χωρητικότητας του συστήματος όταν η διαδικασία άφιξης των κλήσεων είναι batch Poisson και στο σύστημα εφαρμόζεται η πολιτική δέσμευσης εύρους ζώνης ( $C=50$ ).**

### Παράδειγμα 6

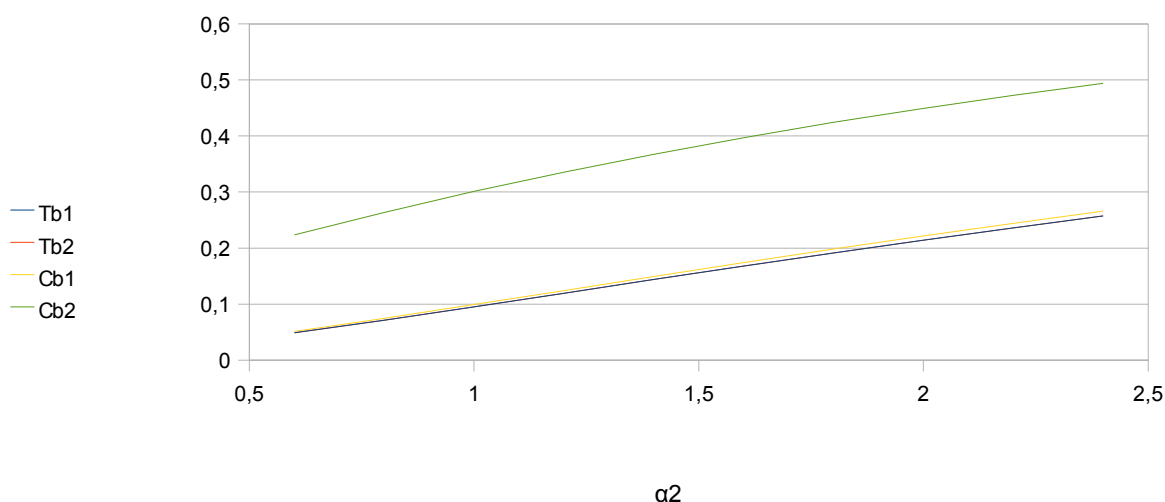
Έστω σύστημα χωρητικότητας  $C=60$ , το οποίο εξυπηρετεί  $K=2$  κατηγορίες κίνησης, οι κλήσεις των οποίων έχουν απαίτηση σε μονάδες εύρους ζώνης  $b_1=1$  και  $b_2=12$ , αντιστοίχως. Το φορτίο κίνησης της 1ης κατηγορίας παραμένει σταθερό  $a_1=10$  erl, ενώ της 2ης κατηγορίας παίρνει διάφορες τιμές από,  $a_2=0.6-2.4$  erl.

Η παράμετρος της γεωμετρικής κατανομής στην 1η κατηγορία ισούται με  $z_1=1.25$ , ενώ στην 2η ισούται με  $z_2=2$ .

Επιπλέον στο σύστημα εφαρμόζεται η πολιτική δέσμευσης εύρους ζώνης με παραμέτρους,  $t_1=11$  και  $t_2=0$ .

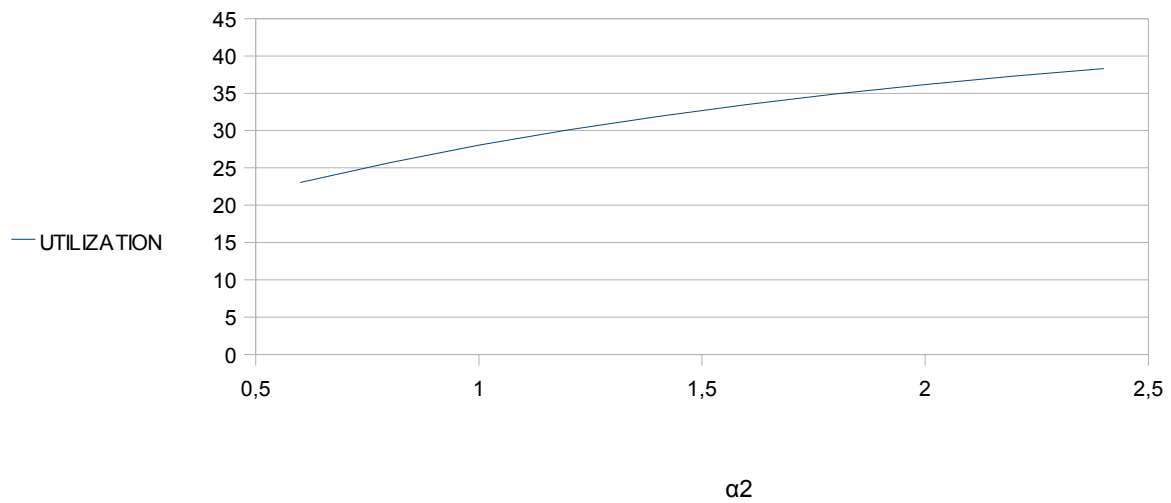
$a_2$	$T_{b1}$	$T_{b2}$	$C_{b1}$	$C_{b2}$	UTILIZATION
0,6	0.04883	0.04883	0.05106	0.22345	23,04
0,8	0.07133	0.07133	0.07444	0.26348	25,71
1	0.09509	0.09509	0.09908	0.30083	28,04
1,2	0.11939	0.11939	0.12421	0.33546	30,08
1,4	0.14373	0.14373	0.14932	0.36745	31,88
1,6	0.16775	0.16775	0.17406	0.39696	33,48
1,8	0.19123	0.19123	0.19818	0.42418	34,89
2	0.21401	0.21401	0.22155	0.44930	36,16
2,2	0.23600	0.23600	0.24406	0.47250	37,3
2,4	0.25717	0.25717	0.26569	0.49397	38,32

Πίνακας 4.6: Οι πιθανότητες συμφόρησης των κλήσεων, συμφόρησης στον χρόνο, & οι τιμές  $U$  για ζεύξη χωρητικότητας  $C=60$ , όταν η διαδικασία άφιξης των κλήσεων είναι batch Poisson και στο σύστημα εφαρμόζεται η πολιτική δέσμευσης εύρους ζώνης.



Σχ.4.14: Σύγκριση των πιθανοτήτων συμφόρησης στον χρόνο & συμφόρησης των κλήσεων, όταν η διαδικασία άφιξης των κλήσεων είναι batch Poisson και στο σύστημα εφαρμόζεται η πολιτική δέσμευσης εύρους ζώνης ( $C=60$ ).





**Σχ.4.15: Διάγραμμα της εκμετάλλευσης (utilization) της χωρητικότητας του συστήματος όταν η διαδικασία άφιξης των κλήσεων είναι batch Poisson και στο σύστημα εφαρμόζεται η πολιτική δέσμευσης εύρους ζώνης ( $C=60$ ).**

### Παράδειγμα 7

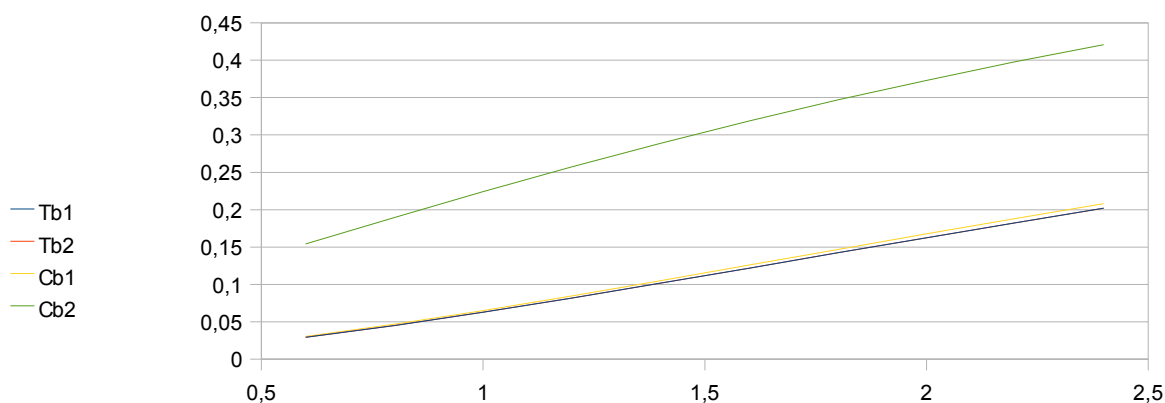
Έστω σύστημα χωρητικότητας  $C=70$ , το οποίο εξυπηρετεί  $K=2$  κατηγορίες κίνησης, οι κλήσεις των οποίων έχουν απαίτηση σε μονάδες εύρους ζώνης  $b_1=1$  και  $b_2=12$ , αντιστοίχως. Το φορτίο κίνησης της 1ης κατηγορίας παραμένει σταθερό  $a_1=10$  erl, ενώ της 2ης κατηγορίας παίρνει διάφορες τιμές από,  $a_2=0.6-2.4$  erl.

Η παράμετρος της γεωμετρικής κατανομής στην 1η κατηγορία ισούται με  $z_1=1.25$ , ενώ στην 2η ισούται με  $z_2=2$ .

Επιπλέον στο σύστημα εφαρμόζεται η πολιτική δέσμευσης εύρους ζώνης με παραμέτρους,  $t_1=11$  και  $t_2=0$ .

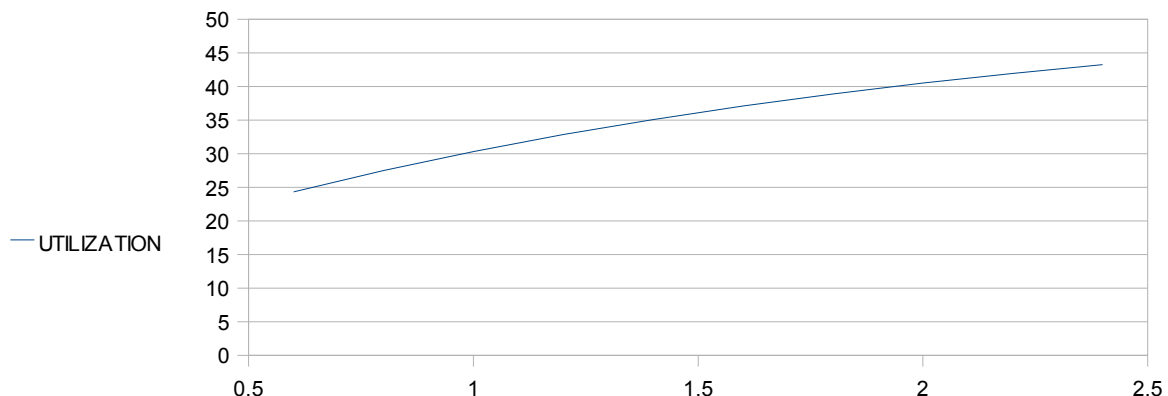
$a_2$	$T_{b1}$	$T_{b2}$	$C_{b1}$	$C_{b2}$	UTILIZATION
0,6	0.02925	0.02925	0.03035	0.15418	24.30
0,8	0.04501	0.04501	0.04665	0.18952	27.47
1	0.06269	0.06269	0.06492	0.22404	30.31
1,2	0.08169	0.08169	0.08453	0.25724	32.83
1,4	0.10151	0.10151	0.10495	0.28883	35.08
1,6	0.12175	0.12175	0.12579	0.31869	37.08
1,8	0.14211	0.14211	0.14673	0.34678	38.88
2	0.16236	0.16236	0.16753	0.37313	40.49
2,2	0.18231	0.18231	0.18801	0.39782	41.94
2,4	0.20187	0.20187	0.20805	0.42092	43.25

**Πίνακας 4.7:** Οι πιθανότητες συμφόρησης των κλήσεων, συμφόρησης στον χρόνο, & οι τιμές  $U$  για ζεύξη χωρητικότητας  $C=70$ , όταν η διαδικασία άφιξης των κλήσεων είναι batch Poisson και στο σύστημα εφαρμόζεται η πολιτική δέσμευσης εύρους ζώνης.



$a_2$

**Σχ.4.16:** Σύγκριση των πιθανοτήτων συμφόρησης στον χρόνο & συμφόρησης των κλήσεων, όταν η διαδικασία άφιξης των κλήσεων είναι batch Poisson και στο σύστημα εφαρμόζεται η πολιτική δέσμευσης εύρους ζώνης ( $C=70$ ).



$\alpha_2$

**Σχ.4.17:** Διάγραμμα της εκμετάλλευσης (utilization) της χωρητικότητας του συστήματος όταν η διαδικασία άφιξης των κλήσεων είναι batch Poisson και στο σύστημα εφαρμόζεται η πολιτική δέσμευσης εύρους ζώνης ( $C=70$ ).

### Γενικό συμπέρασμα

Στα παραδείγματα 5, 6 και 7, όπως και στα προηγούμενα (2, 3 και 4), η παράμετρος της γεωμετρικής κατανομής και των δύο κατηγοριών κίνησης είναι μεγαλύτερη από την μονάδα, με αποτέλεσμα, το **call congestion** της κάθε κατηγορίας να είναι μεγαλύτερο από το **time congestion** της αντίστοιχης ( $Cb_1 > Tb_1$  και  $Cb_2 > Tb_2$ ). Επομένως, η άφιξη των κλήσεων ακολουθεί την κατανομή **Batch Poisson**.

Επίσης, καθώς η τιμή της χωρητικότητας  $C$  του συστήματος αυξάνει, οι τιμές των **call congestion** και **time congestion** μειώνονται.

Τέλος, επειδή στα συστήματα αυτά εφαρμόζεται η **πολιτική δέσμευσης του εύρους ζώνης**, με σκοπό να εξισορροπήσουμε την πιθανότητα απώλειας κλήσεως των διαφορετικών υπηρεσιών, παρατηρούμε από τους πίνακες τιμών και τις γραφικές παραστάσεις, πως το **time congestion** της 1ης κατηγορίας ισούται πάντοτε με αυτό της 2ης ( $Tb_1 = Tb_2$ ).

## **ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ**

- [1] Μ. Λογοθέτης, Θεωρία τηλεπικοινωνιακής κίνησης, Εκδόσεις Παπασωτηρίου, 2001.
- [2] J. S. Kaufman, “Blocking in a shared resource environment”, IEEE Trans. Commun. Vol. 29, No. 10, pp. 1474-1481, October 1981.
- [3] J. W. Roberts, “A service system with heterogeneous user requirements”, in: G. Pujolle (Ed.), Performance of Data Communications systems and their applications, North Holland, Amsterdam, pp.423-431, 1981.
- [4] J. W. Roberts, “Teletraffic models for the Telecom 1 Integrated Services Network”, *Proc. 10<sup>th</sup> Int. Teletraffic Congress*, paper 1.1-2, Montreal 1983.
- [5] J. S. Kaufman and K. M. Rege, “Blocking in a shared resource environment with batched Poisson arrival processes”, *Performance Evaluation*, Vol. 24, Issue 4, pp. 249-263, February 1996.
- [6] L.E.N. Delbrouck, On the steady state distribution in a service facility with different peakedness factors and capacity requirements, IEEE Trans. Commun., Vol. 31, No. 11, pp. 1209-1211, November 1983.
- [7] I. D. Moscholios and M. D. Logothetis, “QoS Guarantee in a Multirate Loss Model of Batched Poisson Arrival Processes”, *Computer Communications*, Vol. 33, Supplement 1, November 2010, pp. S167-S179.