



ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ  
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ  
Π.Μ.Σ. «ΠΡΟΗΓΜΕΝΑ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΔΙΚΤΥΑ»

## **ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΑΠΩΛΕΙΩΝ ΠΟΛΥΔΙΑΣΤΑΤΗΣ ΤΥΧΑΙΑΣ  
ΚΙΝΗΣΗΣ ΚΛΗΣΕΩΝ ON-OFF**

Ελευθερία Π. Μάτα

**Επιβλέπων Καθηγητής: Ιωάννης Μοσχολιός**

**ΙΟΥΛΙΟΣ 2012**

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

**ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΠΙΝΑΚΩΝ & ΣΧΗΜΑΤΩΝ / 5**

**ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ / 7**

**ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ/ 8**

**ΕΙΣΑΓΩΓΗ/ 9**

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1**

**1. Μοντέλο απωλειών πολυδιάστατης τηλεπικοινωνιακής κίνησης των**

**Kaufman – Roberts (Erlang Multi-rate Loss Model - EMLM ) / 12**

1.1 Περιγραφή του μοντέλου .....	12
1.2 Ανάλυση του μοντέλου .....	15
1.3 Πιθανότητες καταστάσεων και Πιθανότητες απώλειας κλήσεων .....	18
1.4 Εξίσωση Τοπικής Ισορροπίας και Μερίδιο Εύρους Ζώνης .....	20
1.5 Ανάλυση του αναδρομικού τύπου υπολογισμού πιθανότητας απώλειας κλήσεως των Kaufman - Roberts .....	22

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

### 2. Μοντέλο απωλειών πολυδιάστατης τυχαίας κίνησης κλήσεων ON – OFF

(ON – OFF model) / 24

2.1 Εισαγωγή.....	24
2.2 Περιγραφή του μοντέλου.....	26
2.3 Ανάλυση του μοντέλου.....	29
2.4 Πιθανότητες Καταστάσεων - Εξισώσεις Τοπικής Ισορροπίας.....	34
2.5 Μονάδες Εύρους Ζώνης - Κατειλημμένη Χωρητικότητα Ζεύξης.....	35
2.6 Αναδρομικός Τύπος Υπολογισμού των Πιθανοτήτων $q(\vec{j})$ – Πιθανότητα Απώλειας Κλήσεως (CBP – call blocking probability) .....	36
2.7 Πιθανότητα Απώλειας Ριπής (BBP – burst blocking probability) .....	39
2.8 Συσχέτιση του ON-OFF μοντέλου με το μοντέλο των Kaufman - Roberts.	41

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

### 3. Αριθμητικά Παραδείγματα/ 43

3.1 Εισαγωγή .....	43
3.2 Ταύτιση των μοντέλων - Παράδειγμα 1 .....	44
3.3 Μοντέλο ON–OFF – Παράδειγμα 1.....	45
3.3.1 Παράδειγμα 1.1.....	45
3.3.2 Παράδειγμα 1.2.....	46
3.3.3 Παράδειγμα 1.3.....	47
3.3.4 Συμπεράσματα .....	48
3.4 Μοντέλο ON–OFF – Παράδειγμα 2.....	49

3.4.1	Παράδειγμα 2.1.....	49
3.4.2	Παράδειγμα 2.2.....	50
3.4.3	Παράδειγμα 2.3.....	51
3.4.4	Παράδειγμα 2.4.....	52
3.4.5	Παράδειγμα 2.5.....	53
3.4.6	Συμπεράσματα .....	54
<b>4.</b>	<b>Επίλογος.....</b>	<b>55</b>
	<b>Βιβλιογραφία / 57</b>	
	<b>Παραρτήματα / 58</b>	

## ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΣΧΗΜΑΤΩΝ & ΠΙΝΑΚΩΝ

### ΛΙΣΤΑ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

1.1 Σύστημα εξυπηρέτησης πολυδιάστατης κίνησης $K$ κατηγοριών .....	12
1.2 Σύστημα απωλειών .....	13
1.3 Παράδειγμα μοντέλου εξυπηρέτησης πολυδιάστατης κίνησης με πολιτική πλήρους διάθεσης (Complete Sharing Policy).....	13
1.4 Απεικόνιση του διαγράμματος μεταβάσεων των καταστάσεων .....	15
1.5 Σύνολο $\Omega$ για το σύστημα πλήρους διάθεσης του παραδείγματος 1.1 .....	16
1.6 Σύνολο $\Omega$ για το σύστημα πλήρους διάθεσης του παραδείγματος 1.2 .....	17
1.7 «Οριακές» Καταστάσεις για την Κατηγορία 1 .....	19
1.8 Διάγραμμα απεικόνισης τοπικής εξίσωσης ισορροπίας στο EMLM .....	20
1.9 Πλήρες διάγραμμα καταστάσεων για το παράδειγμα 1.1 .....	21
1.10 Πλήρες διάγραμμα καταστάσεων για το παράδειγμα 1.2 .....	22
2.1 Απεικόνιση μεταβάσεων στο σύστημα ON-OFF .....	26
2.2 Απεικόνιση της εξυπηρέτησης των κλήσεων στο μοντέλο απωλειών πολυδιάστατης τυχαίας κίνησης κλήσεων ON-OFF [3]. .....	28
2.3 Απεικόνιση των μηχανισμών απώλειας κλήσεως και ριπής στο μοντέλο απωλειών πολυδιάστατης τυχαίας κίνησης κλήσεων ON-OFF [3]. .....	28
2.4 Διάγραμμα μεταβάσεων των καταστάσεων του μοντέλου απωλειών πολυδιάστατης τυχαίας κίνησης κλήσεων ON-OFF [3]. .....	32

## ΛΙΣΤΑ ΠΙΝΑΚΩΝ

3.1	Πιθανότητα απώλειας κλήσεως για το μοντέλο ON-OFF και το μοντέλο Kaufman-Roberts όταν $C = C^*$ .....	44
3.2	Πιθανότητα απώλειας κλήσεως για δύο κατηγορίες κίνησης, στο μοντέλο ON-OFF όταν $C = C^* = 6$ .....	45
3.3	Πιθανότητα απώλειας κλήσεως και πιθανότητα απώλειας ριπής στο μοντέλο ON-OFF όταν $C = 6, C^* = 7$ .....	46
3.4	Πιθανότητα απώλειας κλήσεως και πιθανότητα απώλειας ριπής στο μοντέλο ON-OFF όταν $C = 6, C^* = 8$ .....	47
3.5	Πιθανότητα απώλειας κλήσεως για κάθε κατηγορία κίνησης, στο μοντέλο ON-OFF όταν $C = C^* = 80$ .....	49
3.6	Πιθανότητα απώλειας κλήσεως και πιθανότητα απώλειας ριπής, στο μοντέλο ON-OFF όταν $C = 80, C^* = 90$ .....	50
3.7	Πιθανότητα απώλειας κλήσεως και πιθανότητα απώλειας ριπής, στο μοντέλο ON-OFF όταν $C = 80, C^* = 100$ .....	51
3.8	Πιθανότητα απώλειας κλήσεως και πιθανότητα απώλειας ριπής, στο μοντέλο ON-OFF όταν $C = 80, C^* = 110$ .....	52
3.9	Πιθανότητα απώλειας κλήσεως και πιθανότητα απώλειας ριπής, στο μοντέλο ON-OFF όταν $C = 80, C^* = 120$ .....	53

## **ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ**

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια της ολοκλήρωσης των σπουδών μου στο Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών του Τμήματος Επιστήμης και Τεχνολογίας Τηλεπικοινωνιών του Πανεπιστημίου Πελοποννήσου. Με την εργασία αυτή, ένας κύκλος φτάνει στο τέλος του. Η ακαδημαϊκή πορεία ολοκληρώνεται και ξεκινάει μια σελίδα, ένα νέο κεφάλαιο στην ζωή μου.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω και να δείξω την ευγνωμοσύνη μου στον επιβλέπων καθηγητή κ. Ιωάννη Μοσχολιό για την εμπιστοσύνη που έδειξε στο πρόσωπό μου, την υπομονή αλλά πρωτίστως για την σημαντική βοήθεια που μου παρείχε για την εκπόνηση και υλοποίηση της πτυχιακής μου εργασίας. Τον ευχαριστώ θερμά.

## ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ

Αντικείμενο της παρούσας διπλωματικής εργασίας αποτελεί η μελέτη ενός μοντέλου απωλειών πολυδιάστατης τηλεπικοινωνιακής κίνησης κλήσεων ON-OFF. Ουσιαστικά πρόκειται για μια επέκταση του κλασικού μοντέλου των Kaufman-Roberts (γνωστό στην βιβλιογραφία ως Erlang Multirate Loss Model – EMLM), σύμφωνα με την οποία οι κλήσεις που γίνονται δεκτές στο σύστημα μπορούν να εναλλάσσονται μεταξύ περιόδων μετάδοσης (κατάσταση ON) και περιόδων σιγής (κατάσταση OFF). Τέτοιου είδους εναλλαγή δεν υφίσταται στο EMLM, εφόσον οι κλήσεις παραμένουν πάντα στην κατάσταση ON.

Στο μοντέλο ON-OFF, οι κλήσεις εισερχόμενες στο σύστημα βρίσκονται στην κατάσταση ON. Μετά το πέρας μιας περιόδου ON, η κλήση μεταφέρεται στην κατάσταση OFF αποδεσμεύοντας προς όφελος άλλων κλήσεων το εύρος ζώνης που είχε καταλάβει στην κατάσταση ON. Όταν μια κλήση πρόκειται να επιστρέψει από την κατάσταση OFF στην ON, ζητάει εκ νέου το εύρος ζώνης που κατείχε, και αν αυτό είναι διαθέσιμο τότε ξεκινάει μια νέα περίοδος ON, διαφορετικά, η κλήση παραμένει στην κατάσταση OFF. Μια κλήση ολοκληρώνει την εξυπηρέτησή της και αποχωρεί από το σύστημα μόνον από την κατάσταση ON. Οι αφίξεις των κλήσεων και στα δύο μοντέλα (ON-OFF, EMLM) ακολουθούν την διαδικασία Poisson δηλαδή μια τυχαία διαδικασία και έχουν εκθετική κατανομή του χρόνου εξυπηρέτησής τους. Στόχος της διπλωματικής εργασίας είναι ο υπολογισμός βασικών παραμέτρων απόδοσης κάθε μοντέλου. Συγκεκριμένα θα υπολογιστεί η πιθανότητα απώλειας κλήσεων κάθε κατηγορίας κίνησης καθώς και η πιθανότητα αδυναμίας μετάβασης μιας κλήσης από την κατάσταση OFF στην ON. Παράλληλα θα συγκριθεί η απόδοση ενός συστήματος ON-OFF με εκείνη του EMLM.



## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στα σύγχρονα δίκτυα έχουμε εφαρμογές με διαφορετικές απαιτήσεις σε ποιότητα εξυπηρέτησης (Quality-of-Service, QoS), ενώ προσφέρονται στους χρήστες πολλές, διαφορετικές υπηρεσίες ήχου, εικόνων και δεδομένων. Με τον όρο **πολυδιάστατη κίνηση** εννοούμε την κίνηση που προέρχεται από χρήστες που ανήκουν σε διαφορετικές κατηγορίες κίνησης, με διαφορετικές απαιτήσεις σε εύρος ζώνης (πλήθος καναλιών). Προκειμένου να επικοινωνήσει ένας χρήστης, ανάλογα με την υπηρεσία που χρησιμοποιεί (κατηγορία κίνησης), καταλαμβάνει ένα ή περισσότερα κανάλια. Εάν το πλήθος των καναλιών που απαιτείται δεν είναι διαθέσιμο τότε η κλήση απορρίπτεται χάνεται, τότε λέμε πως έχουμε απώλεια κλήσης (call blocking).

Η παρούσα διπλωματική εργασία μελετά συστήματα απωλειών τυχαίας κίνησης. Η ανάλυση των συστημάτων απωλειών κίνησης εξαρτάται κατά κύριο λόγο από τις διαδικασίες άφιξης και εξυπηρέτησης των κλήσεων. Ανάλογα με την διαδικασία άφιξης των κλήσεων στο σύστημα, διακρίνουμε δύο είδη κίνησης: τυχαία κίνηση και ψευδοτυχαία κίνηση. Η τυχαία κίνηση παράγεται όταν η διαδικασία άφιξης των κλήσεων στο σύστημα είναι Poisson, δηλαδή υποθέτουμε ότι το πλήθος πηγών που παράγουν κλήσεις είναι άπειρο [4]. Ενώ η ψευδοτυχαία κίνηση παράγεται όταν το πλήθος των πηγών είναι πεπερασμένο. Επίσης, ανάλογα με τις απαιτήσεις εύρους ζώνης των κλήσεων κατά την άφιξή τους στο σύστημα, οι κλήσεις διακρίνονται σε κλήσεις με σταθερές απαιτήσεις εύρους ζώνης και σε κλήσεις με ελαστικές απαιτήσεις εύρους ζώνης. Ενώ, ανάλογα με την συμπεριφορά τους κατά την παραμονή τους στο σύστημα, οι κλήσεις διακρίνονται σε: σταθερού ρυθμού μετάδοσης, ελαστικού ρυθμού μετάδοσης – οι κλήσεις συνεχώς χρησιμοποιούν το εύρος ζώνης που τους ανατίθεται, αλλά είναι ανεκτικές σε συμπίεση ή και επέκταση του εύρους ζώνης και κλήσεις ON-OFF – οι κλήσεις εναλλάσσονται μεταξύ ενεργών περιόδων μετάδοσης (ON) και περιόδων σιγής (OFF).

Συγκεκριμένα θα μελετηθούν δύο μοντέλα απωλειών τυχαίας κίνησης:

1. Μοντέλο απωλειών πολυδιάστατης τυχαίας κίνησης των Kaufman-Roberts (Erlang Multi-rate Loss Model - EMLM), [1], [2].
2. Μοντέλο απωλειών πολυδιάστατης τυχαίας κίνησης κλήσεων ON-OFF (ON-OFF model) [3], [6].

Για την ανάλυση ενός συστήματος απώλειας κλήσεως πολυδιάστατης τηλεπικοινωνιακής κίνησης όπου υπάρχουν μόνο σταθερές κατηγορίες κίνησης Poisson, ήδη από το 1981 έχει προταθεί το Erlang Multi-rate Loss Model (EMLM). Στο μοντέλο αυτό οι κλήσεις που γίνονται δεκτές από το σύστημα (μία ζεύξη συγκεκριμένης χωρητικότητας ή ένα δίκτυο σταθερής δρομολόγησης αποτελούμενο από διαδοχικές ζεύξεις) δεσμεύουν το εύρος ζώνης που χρειάζονται για όλο τον χρόνο εξυπηρέτησής τους. Έτσι επιτυγχάνεται η μοντελοποίηση, σε επίπεδο κλήσεων. Ο αναδρομικός τύπος υπολογισμού της πιθανότητας να έχουμε  $j$  κατειλημμένες γραμμές στο σύστημα, που είναι γνωστός ως Kaufman-Roberts recursion, επιτρέπει τον ακριβή υπολογισμό των πιθανοτήτων απώλειας κλήσεως (call blocking probabilities) στο EMLM. Το χαρακτηριστικό της αναδρομικότητας προσδίδει μεγάλη αξία στο μοντέλο αυτό γιατί το καθιστά εύκολα υλοποιήσιμο στον υπολογιστή και εφαρμόσιμο σε συστήματα πολύ μεγάλης χωρητικότητας. Η ακρίβεια δε του υπολογισμού βασίζεται στο γεγονός ότι η μαθηματική έκφραση για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων των καταστάσεων του συστήματος έχει την μορφή γινομένου (product form). Είναι σημαντικό να επισημάνουμε πως το μοντέλο EMLM χρησιμοποιείται όταν αναφερόμαστε σε  $K$  κατηγορίες κίνησης με διαφορετικές απαιτήσεις εύρους ζώνης.

Τέλος, στο δεύτερο κεφάλαιο αναλύουμε ένα μοντέλο ON-OFF στο οποίο η άφιξη των κλήσεων ακολουθεί την διαδικασία Poisson, ενώ οι κλήσεις που γίνονται δεκτές στο σύστημα μπορούν να εναλλάσσονται μεταξύ περιόδων που μεταδίδουν και περιόδων «σιγής». Στις περιόδους «σιγής» των κλήσεων το εύρος ζώνης τους μπορεί να χρησιμοποιηθεί από άλλες κλήσεις, αυξάνοντας με τον τρόπο αυτό την εκμετάλλευση του εύρους ζώνης του συστήματος. Προκειμένου να ξεκινήσει μια νέα περίοδος μετάδοσης για μια κλήση που βρίσκεται στην κατάσταση OFF θα πρέπει η κλήση αυτή να ζητήσει εκ νέου το εύρος ζώνης που κατείχε (στην κατάσταση ON). Αν αυτό δεν είναι διαθέσιμο τότε η ριπή απορρίπτεται και η κλήση παραμένει στην κατάσταση OFF για μια ακόμα περίοδο.

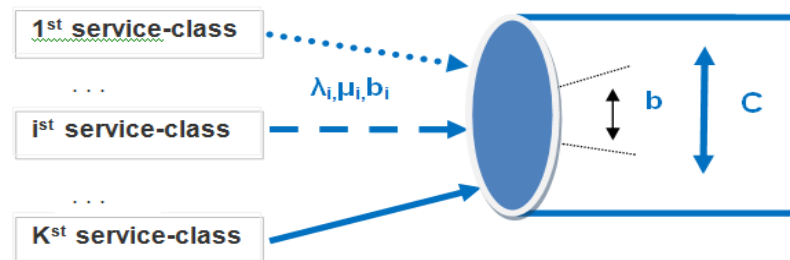
Είναι τελικά φανερό ότι είναι ιδιαίτερα χρήσιμο, από την σκοπιά της ποιότητας εξυπηρέτησης που παρέχει ένα σύστημα, να μπορεί να υπολογιστεί τόσο η πιθανότητα απώλειας κλήσεως (call blocking probability, CBP) όσο και η πιθανότητα απώλειας ριπής (burst blocking probability, BBP). Ο αναδρομικός τύπος του μοντέλου ON-OFF επιτρέπει τον ακριβή υπολογισμό της πιθανότητας απώλειας κλήσεως (call blocking probability). Το χαρακτηριστικό της αναδρομικότητάς του το καθιστά επίσης εύκολα υλοποιήσιμο στον υπολογιστή και εφαρμόσιμο σε συστήματα πολύ μεγάλης χωρητικότητας. Ενώ ο υπολογισμός της πιθανότητας απώλειας ριπής (burst blocking probability) βασίζεται σε έναν προσεγγιστικό τύπο ο οποίος δίνει πολύ καλά αποτελέσματα όταν το σύστημα έχει σχεδιασθεί για χαμηλές τιμές της πιθανότητας αυτής.

## 1. Μοντέλο απωλειών πολυδιάστατης τηλεπικοινωνιακής κίνησης των Kaufman-Roberts (Erlang Multi-rate Loss Model - EMLM)

### 1.1 Περιγραφή του μοντέλου

Το μοντέλο EMLM έχει χρησιμοποιηθεί για την ανάλυση απόδοσης ενός τηλεπικοινωνιακού δικτύου σε επίπεδο κλήσεων όπου υπάρχουν μόνο κατηγορίες κίνησης Poisson [1], [2]. Πιο αναλυτικά, στο μοντέλο αυτό οι κλήσεις γίνονται δεκτές από το σύστημα το οποίο αποτελείται μία ζεύξη συγκεκριμένης χωρητικότητας.

Πρόκειται για ένα σύστημα εξυπηρέτησης πολυδιάστατης κίνησης (Σχήμα 1.1), το οποίο μοντελοποιείται ως σύστημα απωλειών (Σχήμα 1.2), το οποίο δέχεται ως είσοδο κίνηση από διάφορες πηγές κίνησης, με διαφορετικές απαιτήσεις εύρους ζώνης ανά κλήση και διαφορετικά χαρακτηριστικά [4].

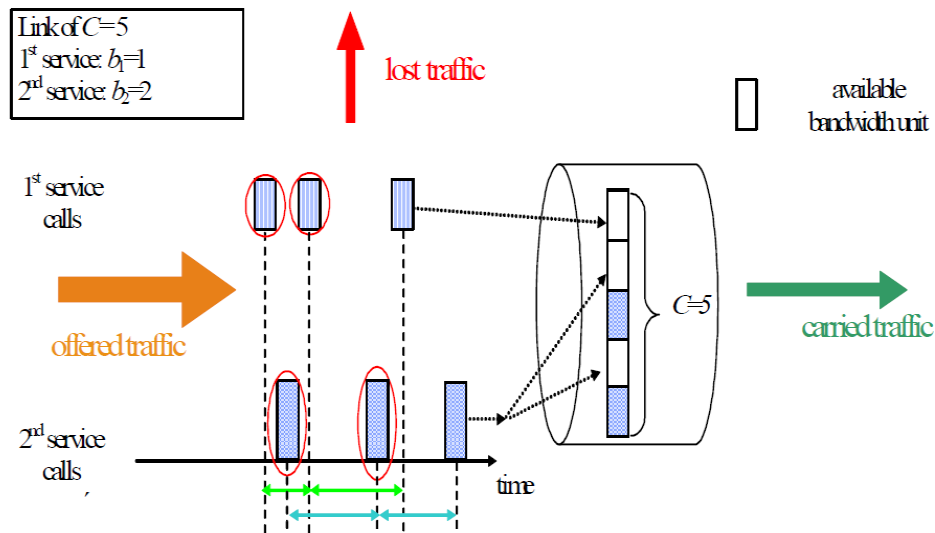


Σχήμα 1.1 Σύστημα εξυπηρέτησης πολυδιάστατης κίνησης K κατηγοριών



Σχήμα 1.2 Σύστημα απωλειών

Η άφιξη των κλήσεων στο σύστημα ακολουθεί μια διαδικασία Poisson. Στο μοντέλο αυτό θεωρούμε ένα σύστημα (ζεύξη) με χωρητικότητα  $C$  μονάδες εύρους ζώνης (bandwidth units – b.u.) στο οποίο καταφθάνουν κλήσεις από  $K$  ανεξάρτητες κατηγορίες κίνησης (υπηρεσίες) σύμφωνα με την διαδικασία Poisson. Όσον αφορά την πολιτική διάθεσης του εύρους ζώνης της ζεύξης θεωρούμε την πολιτική πλήρους διάθεσης (Complete Sharing Policy – CSP) (Σχήμα 1.3) [4].



Σχήμα 1.3 Παράδειγμα μοντέλου εξυπηρέτησης πολυδιάστατης κίνησης με πολιτική πλήρους διάθεσης (Complete Sharing Policy)

Οι κλήσεις ανταγωνίζονται για το διαθέσιμο εύρος ζώνης (bandwidth) σύμφωνα με την πολιτική αυτή. Κάθε κλήση της κατηγορίας  $k$  ( $k=1, \dots, K$ ) κατά την άφιξή της στο σύστημα ζητάει  $b_k$  μονάδες εύρους ζώνης. Εάν οι μονάδες αυτές είναι διαθέσιμες τότε η κλήση γίνεται δεκτή στο σύστημα και καταλαμβάνει τις  $b_k$  μονάδες εύρους ζώνης που είχε ζητήσει, χωρίς να υπάρχει απαίτηση οι μονάδες αυτές να είναι συνεχόμενες, για χρονικό διάστημα ίσο με τον χρόνο εξυπηρέτησής της ο οποίος είναι εκθετικά κατανομημένος με μέση τιμή  $\mu_k^{-1}$ , όπου,  $\mu_k$  είναι ο ρυθμός εξυπηρέτησης των κλήσεων (service rate). Εάν οι μονάδες αυτές δεν είναι διαθέσιμες, τότε η κλήση απορρίπτεται και χάνεται (Call Blocking Probability - CBP).

Μετά την πάροδο του χρόνου εξυπηρέτησής της οι  $b_k$  μονάδες εύρους ζώνης αποδεσμεύονται και είναι διαθέσιμες να χρησιμοποιηθούν από την αμέσως επόμενη κλήση που θα αιτηθεί.

Ο ρυθμός άφιξης των κλήσεων της κατηγορίας  $k$  συμβολίζεται με  $\lambda_k$ . Το προσφερόμενο φορτίο κίνησης (offered traffic-load) των κλήσεων της κατηγορίας  $k$  εκφράζεται από τη σχέση:  $a_k = \lambda_k \mu_k^{-1}$ .

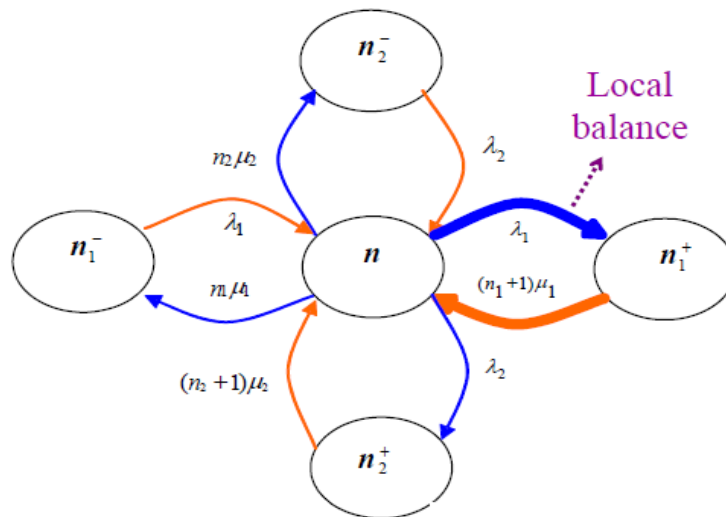
Το EMLM έχει χρησιμοποιηθεί ευρέως για την ανάλυση παραδοσιακών ενσύρματων τηλεπικοινωνιακών δικτύων που υποστηρίζουν σταθερή (stream) κίνηση.

Για να κατανοήσουμε καλύτερα την έννοια της σταθερής κίνησης θα αναφέρουμε ένα μικρό παράδειγμα όπου εάν ορίσουμε μια μονάδα εύρους ζώνης να είναι ίση με τον ρυθμό μετάδοσης των 64 Kbps, τότε μια ζεύξη των 1.28 Mbps αποτελείται από  $C=20$  μονάδες εύρους ζώνης. Μια κλήση ήχου (voice) των  $R_1=64$  Kbps θα απαιτεί  $b_1=1$  μονάδα εύρους ζώνης, ενώ μια κλήση βίντεο (video) των  $R_2=256$  Kbps θα απαιτεί  $b_2=4$  μονάδες εύρους ζώνης [5].

## 1.2 Ανάλυση του μοντέλου

Προκειμένου να περιγράψουμε το μοντέλο απωλειών πολυδιάστατης τυχαίας κίνησης κλήσεων EMLM στην μόνιμη κατάσταση με  $n_k$  συμβολίζουμε το πλήθος των κλήσεων της κατηγορίας  $k$  στο σύστημα. Το διάνυσμα μόνιμης - οριακής κατάστασης συμβολίζεται με το διάνυσμα  $\vec{n} = (n_1, n_2, \dots, n_K)$ .

Αναλυτικότερα με  $n_k$  ορίζεται η κατάσταση ισορροπίας (local balance) στην οποία υπάρχουν στο σύστημα  $n_1$  κλήσεις τύπου 1,  $n_2$  κλήσεις τύπου 2, ...,  $n_k$  κλήσεις τύπου  $k$ . Συμβολίζουμε επίσης με  $n_k^+$  το διάνυσμα οριακής κατάστασης που εκφράζει την περίπτωση να αυξηθεί κατά μια κλήση ο αριθμός των κλήσεων τύπου  $k$  που βρίσκονται στο σύστημα, δηλαδή:  $n_k^+ = (n_1, \dots, n_{k-1}, n_k+1, n_{k+1}, \dots, n_K)$ . Ομοίως συμβολίζουμε επίσης με  $n_k^-$  το διάνυσμα οριακής κατάστασης που εκφράζει την περίπτωση να μειωθεί κατά μια κλήση ο αριθμός των κλήσεων τύπου  $k$  που βρίσκονται στο σύστημα, άρα:  $n_k^- = (n_1, \dots, n_{k-1}, n_k-1, n_{k+1}, \dots, n_K)$  [5].



Σχήμα 1.4 Απεικόνιση του διαγράμματος μεταβάσεων των καταστάσεων

Το σύνολο όλων των δυνατών καταστάσεων συμβολίζεται με  $\Omega$ . Στην περίπτωση της πολιτικής πλήρους διάθεσης των πόρων του συστήματος (CSP), όπου μια κλήση που χρειάζεται  $b_k$  μονάδες εύρους ζώνης για να διεκπεραιωθεί φράσσεται αν και μόνο αν λιγότερες από  $b_k$  μονάδες εύρους ζώνης από τις  $C$  είναι διαθέσιμες, το σύνολο  $\Omega$  ορίζεται ως εξής:

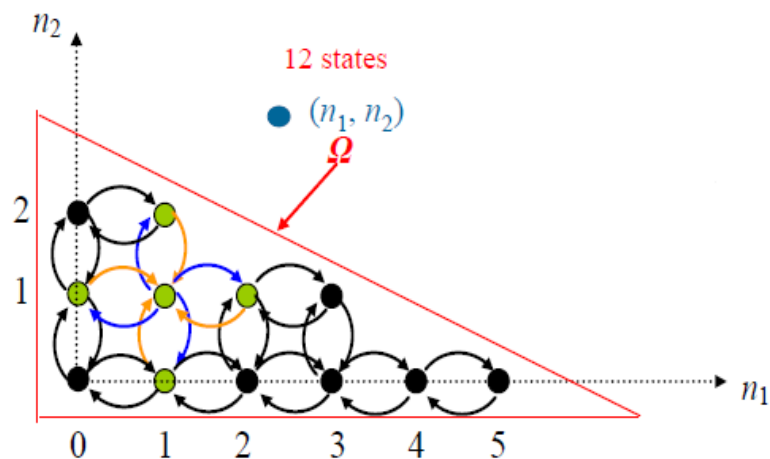
$$\Omega = \{ \vec{n} : \mathbf{0} \leq \mathbf{n} \mathbf{b} \leq \mathbf{C} \}, \text{ όπου } \mathbf{n} \mathbf{b} = \sum_{k=1}^K n_k \mathbf{b}_k \quad (1.1)$$

Είναι χρήσιμο στο σημείο αυτό να αναφέρουμε δύο παραδείγματα παράστασης του χώρου  $\Omega$ , ώστε, να μπορέσουμε να δούμε την εξάρτηση του συνόλου των δυνατών καταστάσεων  $\Omega$  στην πολιτική πλήρους διάθεσης που εφαρμόζεται στο σύστημά μας.

**Παράδειγμα 1.1:** Θεωρούμε δύο υπηρεσίες, οι κλήσεις των οποίων απαιτούν  $b_1 = 1$  και  $b_2 = 2$ , αντιστοίχως, και μια ζεύξη χωρητικότητας 5 μονάδων εύρους ζώνης.

Μέσω της σχέσης (1.1) η οποία περιγράφει το σύνολο  $\Omega$  στο σύστημά μας, στο παράδειγμά μας θα πρέπει να ισχύει:  $n_1 b_1 + n_2 b_2 \leq C \Rightarrow n_1 + 2n_2 \leq 5$ .

Κάθε δυνατή κατάσταση του συνόλου  $\Omega$  προκύπτει από τη σχέση  $n_1 + 2n_2 \leq 5$  και συμβολίζεται με  $\bullet$ . Τα ακραία σημεία 2 και 5 που βρίσκονται πάνω στους άξονες  $n_2$  και  $n_1$  αντίστοιχα προκύπτουν από τις εκφράσεις  $\lfloor \frac{C}{b_2} \rfloor$  και  $\lfloor \frac{C}{b_1} \rfloor$  όπου  $\lfloor x \rfloor$  είναι ακέραιος αριθμός.



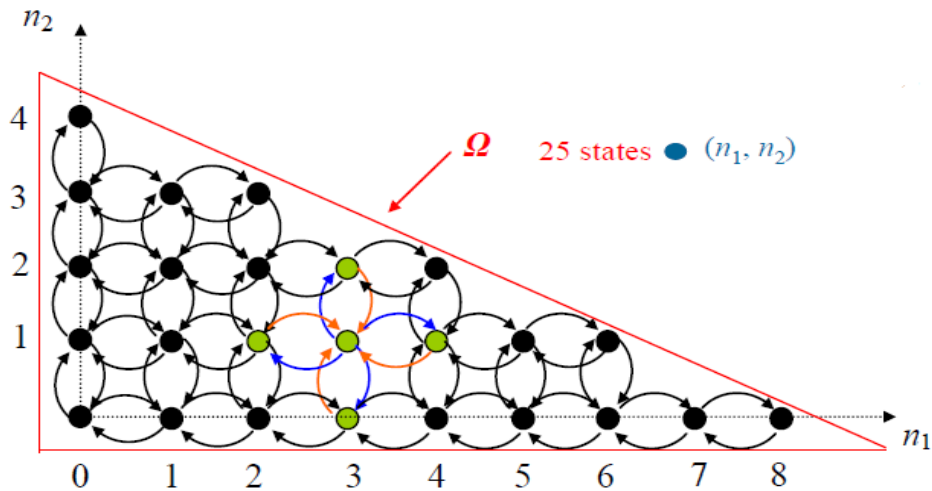
Σχήμα 1.5. Σύνολο  $\Omega$  για το σύστημα πλήρους διάθεσης του παραδείγματος 1.1



**Παράδειγμα 1.2:** Θεωρούμε δύο υπηρεσίες, οι κλήσεις των οποίων απαιτούν  $b_1 = 1$  και  $b_2 = 2$ , αντιστοίχως, και μια ζεύξη χωρητικότητας 8 μονάδων εύρους ζώνης [5].

Βάση της σχέσης (1.1) η οποία περιγράφει το σύνολο  $\Omega$  στο σύστημά μας, στο παράδειγμά μας θα πρέπει να ισχύει:  $n_1 b_1 + n_2 b_2 \leq C \Rightarrow n_1 + 2n_2 \leq 8$ .

Κάθε δυνατή κατάσταση του συνόλου  $\Omega$  προκύπτει από τη σχέση  $n_1 + 2n_2 \leq 8$  και συμβολίζεται με  $\bullet$ . Τα ακραία σημεία 4 και 8 που βρίσκονται πάνω στους άξονες  $n_2$  και  $n_1$  αντίστοιχα προκύπτουν από τις εκφράσεις  $\lfloor \frac{C}{b_2} \rfloor$  και  $\lfloor \frac{C}{b_1} \rfloor$  όπου  $\lfloor x \rfloor$  είναι ακέραιος αριθμός.



Σχήμα 1.6. Σύνολο  $\Omega$  για το σύστημα πλήρους διάθεσης του παραδείγματος 1.2

### 1.3 Πιθανότητες Καταστάσεων και Πιθανότητες Απώλειας Κλήσεων

Η πιθανότητα το σύστημα να είναι στην κατάσταση  $n$  συμβολίζεται με  $P(n)$ . Οι πιθανότητες των μονίμων καταστάσεων,  $P(n)$ , υπολογίζονται από τον παρακάτω τύπο μορφής γινομένου [1]:

$$P(n) = \frac{\prod_{k=1}^K \frac{a_k^{n_k}}{n_k!}}{\sum_{n \in \Omega} \left( \prod_{k=1}^K \frac{a_k^{n_k}}{n_k!} \right)} \quad (1.2)$$

Η σχέση (1.2) για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων καταστάσεων δεν είναι εύχρηστη επειδή περιλαμβάνει υπολογισμό δυνάμεων και παραγοντικών.

Θα ήταν χρήσιμο στο σημείο αυτό να αναφέρουμε ένα παράδειγμα πρακτικής εφαρμογής της παραπάνω σχέσης :

**Παράδειγμα 1.3:** Θεωρούμε δύο υπηρεσίες, οι κλήσεις των οποίων απαιτούν  $b_1 = 1$  και  $b_2 = 1$ , αντιστοίχως, και μια ζεύξη χωρητικότητας 2 μονάδων εύρους ζώνης και ότι στην κατάσταση ισορροπίας  $n_1=1$ ,  $n_2 = 1$ . Τότε ζητούμε να βρούμε την πιθανότητα  $P(n)$ , όπου  $n = \{n_1 = 1, n_2 = 1\}$ .

Βάσει της σχέσης  $\Omega = \{\vec{n} : \mathbf{0} \leq \mathbf{nb} \leq \mathbf{C}\}$ , όπου  $\mathbf{nb} = \sum_{k=1}^K \mathbf{n}_k \mathbf{b}_k$  θα πρέπει να ισχύει γενικά:

$$n_1 + n_2 \leq C \Rightarrow n_1 + n_2 \leq 2.$$

Από την ανίσωση αυτή το σύνολο  $\Omega$  θα περιέχει τις καταστάσεις:

$$(n_1 = 0, n_2 = 0), (n_1 = 0, n_2 = 1), (n_1 = 0, n_2 = 2),$$

$$(n_1 = 1, n_2 = 0), (n_1 = 1, n_2 = 1), (n_1 = 2, n_2 = 0).$$

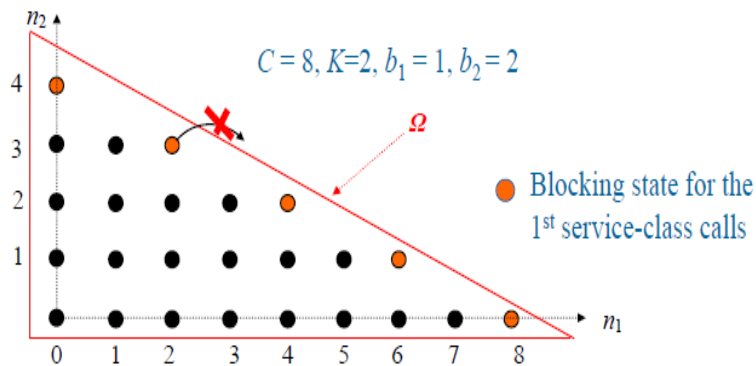
Έτσι λοιπόν θα ισχύει:

$$P(n) = \frac{\frac{a_1^{n_1=1}}{1!} \frac{a_2^{n_2=1}}{1!}}{\frac{a_1^0 a_2^0}{0! 0!} + \frac{a_1^0 a_2^1}{0! 1!} + \frac{a_1^0 a_2^2}{0! 2!} + \frac{a_1^1 a_2^0}{1! 0!} + \frac{a_1^1 a_2^1}{1! 1!} + \frac{a_1^2 a_2^0}{2! 0!}}$$

Αν γνωρίζαμε τις τιμές των φορτίων κίνησης  $a_1$  και  $a_2$ , θα τις αντικαθιστούσαμε στην σχέση αυτή για να υπολογίσουμε την πιθανότητα  $P(n)$ .

Η πιθανότητα απώλειας μιας κλήσης της κάθε κατηγορίας θα ισούται με την πιθανότητα να βρισκόμαστε σε μια από της «οριακές καταστάσεις», δηλαδή σε μια κατάσταση τέτοια ώστε να είναι αδύνατη η μετάβαση στην  $n_k^+$ .

Ας θεωρήσουμε τα δεδομένα του παραδείγματος (1.2) : στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι «οριακές» καταστάσεις για την κατηγορία 1, με πορτοκαλί χρώμα.



Σχήμα 1.7 «Οριακές» Καταστάσεις για την Κατηγορία 1

Η πιθανότητα απώλειας μιας κλήσης της κατηγορίας 1 θα ισούται με την πιθανότητα να βρισκόμαστε σε μια από τις «οριακές καταστάσεις» του σχήματος 1.7, δηλαδή σε μια κατάσταση τέτοια ώστε να είναι αδύνατη η μετάβαση στην  $n_1^+$ .

Άρα η πιθανότητα απώλειας για την κατηγορία 1 θα είναι το άθροισμα των πιθανοτήτων να βρεθούμε στις καταστάσεις αυτές, διότι πρόκειται για ανεξάρτητα μεταξύ τους γεγονότα.

Η παραπάνω μέθοδος που είναι μορφής γινομένου, είναι ακριβής αλλά δύσκολη όταν εφαρμόζεται, κυρίως λόγω της ύπαρξης των παραγοντικών. Όταν μιλάμε για ρεαλιστικά συστήματα, με μεγάλη χωρητικότητα σε εύρος ζώνης, χρησιμοποιούμε τον ακριβή αναδρομικό τύπο των Kaufman – Roberts ο οποίος θα αναλυθεί παρακάτω.

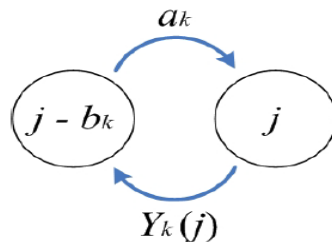
## 1.4 Εξίσωση Τοπικής Ισορροπίας και Μερίδιο Εύρους Ζώνης

Στο EMLM μεταξύ των γειτονικών καταστάσεων ισχύει η ακόλουθη *εξίσωση τοπικής ισορροπίας* (local balance equation):

$$a_k q(j - b_k) = Y_k(j) q(j) \quad \text{για } j = 1, \dots, C \quad (1.3)$$

Με  $Y_k(j)$  συμβολίζουμε το μέσο πλήθος των κλήσεων της κατηγορίας  $k$  στην κατάσταση  $j$ . Η εξίσωση τοπικής ισορροπίας δείχνει τον ρυθμό με τον οποίο το σύστημα μεταβαίνει από μια κατάσταση σε μια άλλη (Σχήμα 1.8).

Δηλαδή ο ρυθμός με τον οποίο το σύστημα μεταβαίνει από την κατάσταση  $j - b_k$  στην κατάσταση  $j$  είναι ίσος με τον ρυθμό με τον οποίο το σύστημα επιστρέφει από την κατάσταση  $j$  στην κατάσταση  $j - b_k$ . Έτσι η (1.3) ονομάζεται και «ρυθμός ανόδου = ρυθμός καθόδου» («rate\_up = rate\_down»).



Σχήμα 1.8 Διάγραμμα απεικόνισης τοπικής εξίσωσης ισορροπίας στο EMLM

Ως μερίδιο εύρους ζώνης (bandwidth share) μιας κατηγορίας κίνησης ορίζουμε το ποσοστό του συνολικού κατειλημμένου εύρους ζώνης  $j$  που αντιστοιχεί σε κλήσεις της συγκεκριμένης αυτής κατηγορίας στην κατάσταση  $j$  ( $j > 0$ ). Το μερίδιο εύρους ζώνης της κατηγορίας  $k$  στην κατάσταση  $j$  συμβολίζεται με  $P_k(j)$  και ορίζεται ως:

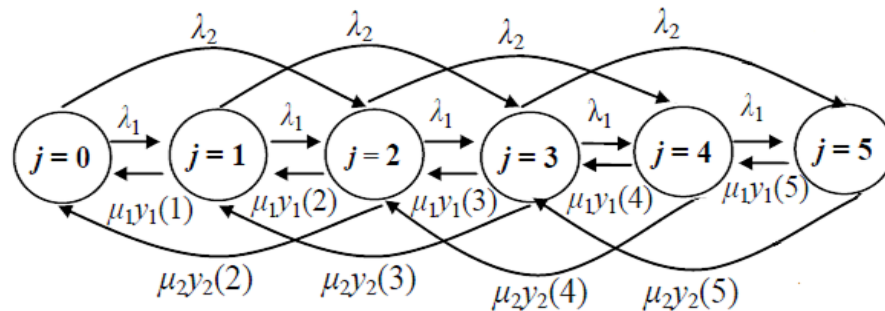
$$P_k(j) = \frac{Y_k(j) b_k}{j} \quad (1.4)$$

Για να υπολογίσουμε το  $P_k(j)$  ξεκινάμε από την (1.3) πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με  $b_k$  και διαιρώντας με  $j q(j)$ . Οπότε προκύπτει:

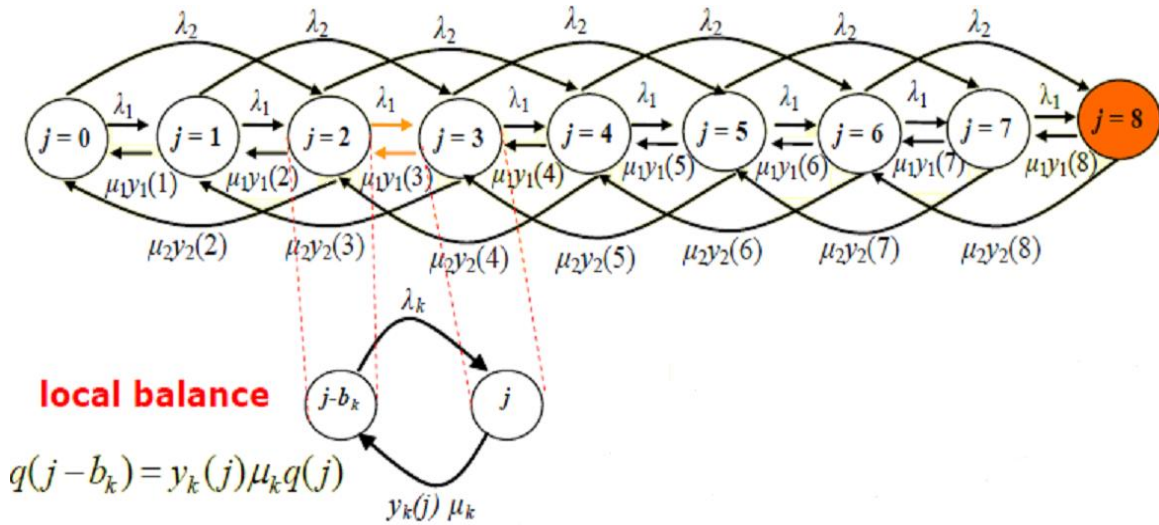
$$\frac{a_k b_k q(j - b_k)}{j q(j)} = \frac{Y_k(j) b_k}{j} \quad (1.5)$$

Επομένως καταλήγουμε σε:

$$P_k(j) = \frac{a_k b_k q(j - b_k)}{j q(j)} \quad (1.6)$$



Σχήμα 1.9 Πλήρες διάγραμμα καταστάσεων για το παράδειγμα 1.1



Σχήμα 1.10 Πλήρες διάγραμμα καταστάσεων για το παράδειγμα 1.2

## 1.5 Ανάλυση του αναδρομικού τύπου υπολογισμού πιθανότητας απώλειας κλήσεως των Kaufman – Roberts

Ο αναδρομικός τύπος των Kaufman-Roberts, επιτρέπει τον ακριβή υπολογισμό των πιθανοτήτων απώλειας κλήσεων στο EMLM. Το χαρακτηριστικό της αναδρομικότητας προσδίδει μεγάλη αξία στο μοντέλο αυτό γιατί το καθιστά εύκολα υλοποιήσιμο στον υπολογιστή και εφαρμόσιμο σε συστήματα πολύ μεγάλης χωρητικότητας.

Όπως έχουμε αναφέρει το σύστημα μας χρησιμοποιεί πολιτική πλήρους διάθεσης των πόρων. Υπενθυμίζουμε πως στο σύστημα πλήρους διάθεσης το σύνολο  $\Omega$  ορίζεται ως:  $\Omega = \{ \vec{n} : \mathbf{0} \leq \mathbf{nb} \leq \mathbf{C} \}$ , όπου  $\mathbf{nb} = \sum_{k=1}^K n_k \mathbf{b}_k$ .

Θεωρούμε λοιπόν αρχικά το σύνολο των καταστάσεων  $\Omega_j = \{ \vec{n} \in \Omega_j : \mathbf{nb} = \mathbf{j} \}$ . Από τον ορισμό αυτό φαίνεται ότι το  $\Omega_j$  είναι το σύνολο εκείνο στο οποίο ακριβώς  $j$  γραμμές είναι κατειλημμένες.

Πιο αναλυτικά, η (μακρο-)κατάσταση  $j$  ( $j=0, \dots, C$ ) του συστήματος ορίζεται ως το συνολικό πλήθος των κατειλημμένων μονάδων εύρους ζώνης. Μια κατάσταση,  $j$ , συνδυάζει ένα ή περισσότερα διανύσματα μόνιμης κατάστασης  $n$ , στα οποία το συνολικό πλήθος των κατειλημμένων πόρων από όλες τις κατηγορίες είναι ίσο με  $j$ . Η πιθανότητα το σύστημα να είναι στην κατάσταση  $j$  συμβολίζεται με  $q(j)$ .

Η πιθανότητα να έχουμε  $j$  κατειλημμένες γραμμές στην κατάσταση ισορροπίας δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$q(j) = \sum_{n \in \Omega_j} P(n) \quad (1.7)$$

Ενώ η πιθανότητα απώλειας κλήσεως  $Pb_k$  μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$Pb_k = \sum_{\{n: nb > C - b_k\}} P(n) \quad (1.8)$$

Παρατηρούμε τελικά ότι ο υπολογισμός της πιθανότητας  $Pb_k$  έγκειται στην εύρεση ενός αναδρομικού τύπου για τον υπολογισμό του  $q(j)$ .

**Οι πιθανότητες καταστάσεων,  $q(j)$ , υπολογίζονται από τον γνωστό αναδρομικό τύπο [1], [2]:**

$$q(j) \begin{cases} 1 & \text{για } j = 0 \\ \frac{1}{j} \sum_{k=1}^K a_k b_k q(j - b_k) & \text{για } j = 1, \dots, C \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \quad (1.9)$$

Η σχέση (1.9) αναφέρεται στον γνωστό αναδρομικό τύπο των Kaufman – Roberts και υπολογίζει με μεγάλη ακρίβεια τις τιμές των  $q(j)$ . Οι οποίες θα πρέπει να κανονικοποιηθούν με βάση το  $\sum q(j)$  προκειμένου να χρησιμοποιηθούν στην συνέχεια για τον υπολογισμό της πιθανότητας απώλειας κλήσεως.

Για την καλύτερη κατανόηση του αναδρομικού τύπου (1.9) οι συμβολισμοί του αναφέρονται παρακάτω ως εξής:

$q(j)$ : Η μη κανονικοποιημένη πιθανότητα να υπάρχουν  $j$  κατειλημμένες γραμμές (αριθμός κατειλημμένων εξυπηρετητών στο σύστημα).

$K$  : Το πλήθος των διαφορετικών υπηρεσιών που εξυπηρετεί το σύστημα.

$a_k$  : Το φορτίο κίνησης κάθε κατηγορίας ( $k$ ), για  $k = 1, \dots, K$ .

$b_k$  : Το απαιτούμενο εύρος ζώνης για την εξυπηρέτηση κάθε κατηγορίας κίνησης (πιο συγκεκριμένα, ορίζεται, ως ο απαιτούμενος αριθμός εξυπηρετητών που απαιτεί κάθε κλήση για την εξυπηρέτησή της).

$C$  : Η συνολική χωρητικότητα του συστήματος η οποία εκφράζεται σε μονάδες εύρους ζώνης (συνολικός αριθμός εξυπηρετητών του συστήματος).

Όταν το κατειλημμένο εύρος ζώνης της ζεύξης είναι  $j = nb > C - b_k$  τότε έχουμε απώλεια των κλήσεων της κατηγορίας  $k$ . Επομένως η πιθανότητα  $Pb_k$  εκφράζεται ως το άθροισμα των πιθανοτήτων  $q(j)$  όπου  $j > C - b_k$ .

Άρα μια κλήση που φτάνει στο σύστημα με απαίτηση  $b_k$  μονάδων εύρους ζώνης γίνεται δεκτή αν και μόνο αν  $j \leq C - b_k$ . Επομένως, για την κατηγορία  $k$  οι καταστάσεις  $j = C - b_k + 1, \dots, C$  είναι καταστάσεις απώλειας, ενώ οι καταστάσεις  $j = 0, 1, \dots, C - b_k$  είναι καταστάσεις μη - απώλειας. Η πιθανότητα απώλειας κλήσεων (call blocking probability, CBP) της κατηγορίας  $k$  υπολογίζεται προσθέτοντας τις πιθανότητες όλων των καταστάσεων απώλειας.

Άρα στην περίπτωση αυτή θα έχουμε [5]:

$$Pb_k = \sum_{j=C-b_k+1}^C q(j) = \sum_{j=0}^{b_k-1} q(C-j) \quad (1.10)$$



## 2. Μοντέλο απωλειών πολυδιάστατης τυχαίας κίνησης κλήσεων ON-OFF (ON-OFF model)

### 2.1. Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζεται το μοντέλο ON-OFF όπου οι κλήσεις κάθε κατηγορίας κίνησης γίνονται δεκτές στην κατάσταση ON και είτε εναλλάσσονται μεταξύ των καταστάσεων ON και OFF είτε παραμένουν συνεχώς στην κατάσταση ON. Όταν μια κλήση μεταφέρεται στην κατάσταση OFF απελευθερώνει το εύρος ζώνης που είχε στην κατάσταση ON, το οποίο γίνεται διαθέσιμο για άλλες κλήσεις. Όταν προσπαθεί να επιστρέψει στην κατάσταση ON ζητάει εκ νέου το εύρος ζώνης που κατείχε, και αν αυτό είναι διαθέσιμο τότε ξεκινάει μια νέα περίοδος ON. Στην αντίθετη περίπτωση υπάρχει αδυναμία μετάβασης από την κατάσταση OFF στην ON (απώλεια ριπής) και η κλήση παραμένει στην κατάσταση OFF. Όσον αφορά στην πολιτική διάθεσης του εύρους ζώνης, χρησιμοποιείται η πολιτική πλήρους διάθεσης.

Το μοντέλο αυτό έχει λύση μορφής γινομένου. Έτσι ο υπολογισμός της πιθανότητας απώλειας των κλήσεων βασίζεται σε έναν ακριβή και αναδρομικό τύπο, ενώ ο υπολογισμός της πιθανότητας απώλειας ριπής (πιθανότητα αδυναμίας μετάβασης από την κατάσταση OFF στην ON) βασίζεται σε έναν προσεγγιστικό τύπο ο οποίος δίνει πολύ καλά αποτελέσματα όταν το σύστημα έχει σχεδιασθεί για χαμηλές τιμές της πιθανότητας αυτής. Επειδή η ανάλυση του μοντέλου αυτού βασίζεται στο μοντέλο απωλειών πολυδιάστατης κίνησης το ονομάζουμε μοντέλο απωλειών πολυδιάστατης τυχαίας κίνησης κλήσεων ON-OFF (ON-OFF model) [3], [6].

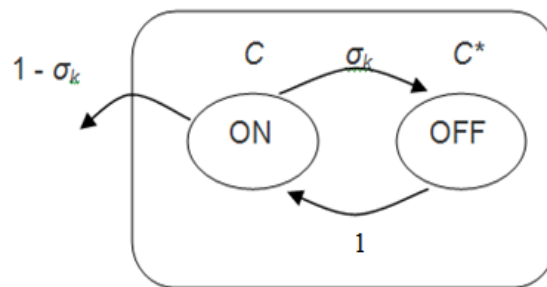
## 2.2 Περιγραφή του μοντέλου

Για την ανάλυση του μοντέλου θεωρούμε μια ζεύξη χωρητικότητας  $C$  μονάδων εύρους ζώνης η οποία εξυπηρετεί  $K$  κατηγορίες κίνησης. Οι αφίξεις των κλήσεων της κατηγορίας κίνησης  $k$  ( $k=1, \dots, K$ ) ακολουθούν την διαδικασία Poisson με ρυθμό  $\lambda_k$  και απαιτούν  $b_k$  μονάδες εύρους ζώνης.

Ως πολιτική διάθεσης του εύρους ζώνης θεωρούμε την πολιτική πλήρους διάθεσης. Μια νέα κλήση γίνεται δεκτή στο σύστημα στην κατάσταση ON και το εύρος ζώνης που καταλαμβάνει χαρακτηρίζεται «πραγματικό». Με τον όρο «πραγματική» χαρακτηρίζουμε και την ζεύξη χωρητικότητας  $C$ .

Με το πέρας μιας περιόδου ON η κλήση της κατηγορίας κίνησης  $k$  απελευθερώνει το εύρος ζώνης που είχε και είτε ξεκινάει μια περίοδο OFF με πιθανότητα  $\sigma_k$ , είτε αναχωρεί από το σύστημα με πιθανότητα  $1 - \sigma_k$ , (σχήμα 2.1).

Αν βρεθεί στην κατάσταση OFF τότε θεωρούμε ότι καταλαμβάνει κάποιο «φανταστικό» εύρος ζώνης  $b_k$  μονάδων από κάποια «φανταστική» ζεύξη χωρητικότητας  $C^*$  μονάδων εύρους ζώνης. Όταν η περίοδος OFF τελειώσει η κλήση της κατηγορίας κίνησης  $k$  επιστρέφει στην κατάσταση ON με πιθανότητα 1 (σχήμα 2.2). Αυτό ουσιαστικά σημαίνει ότι η κλήση δεν μπορεί να αναχωρήσει από το σύστημα μέσω της κατάστασης OFF.



Σχήμα 2.1 Απεικόνιση μεταβάσεων στο σύστημα ON-OFF

Κατά την μετάβαση από την κατάσταση OFF στην ON, η κλήση γίνεται δεκτή στην κατάσταση ON όταν υπάρχουν διαθέσιμες οι  $b_k$  μονάδες εύρους ζώνης. Εάν ισχύει  $C = C^*$ , τότε το εύρος ζώνης είναι πάντοτε διαθέσιμο και η μετάβαση πάντοτε δυνατή (άρα δεν εμφανίζεται απώλεια ριπής). Εάν πάλι ισχύει  $C < C^*$ , τότε εάν υπάρχουν διαθέσιμες οι  $b_k$  μονάδες εύρους ζώνης στην «πραγματική» ζεύξη, δηλαδή όταν  $j_1 + b_k \leq C$ , (όπου με  $j_1$  συμβολίζουμε την κατειλημμένη χωρητικότητα της «πραγματικής» ζεύξης) τότε η κλήση θα επιστρέψει στην κατάσταση ON και μια νέα ριπή θα ξεκινήσει. Διαφορετικά η ριπή θα απορριφθεί και η κλήση θα παραμείνει στην κατάσταση OFF για μια ακόμα περίοδο (σχήμα 2.3).

Μια νέα (εξωτερική) κλήση της κατηγορίας κίνησης  $k$  θα γίνει δεκτή στο σύστημα με  $b_k$  μονάδες εύρους ζώνης όταν ικανοποιούνται οι εξής περιορισμοί:

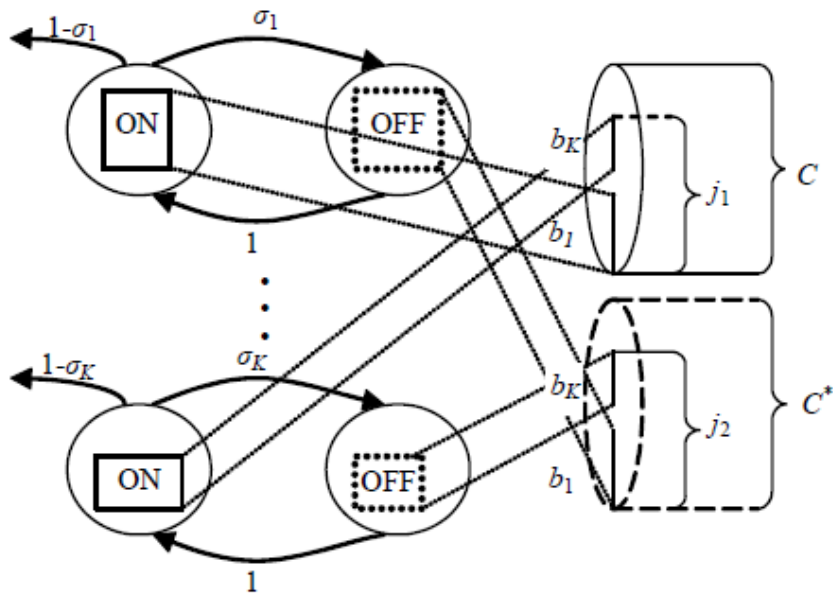
$$j_1 + b_k \leq C \quad (2.1)$$

$$j_1 + j_2 + b_k \leq C^* \quad (2.2)$$

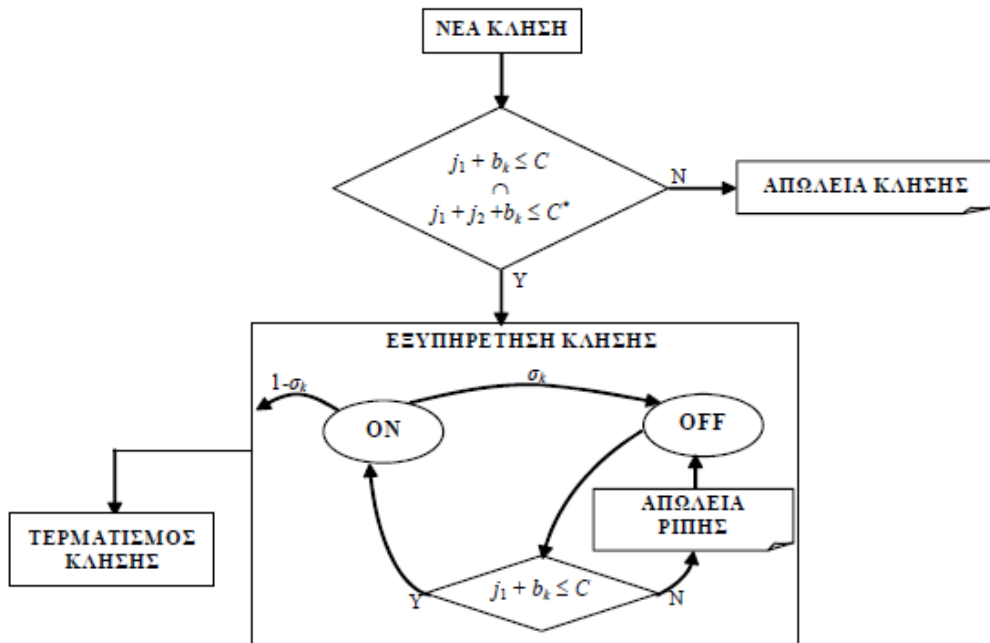
όπου με  $j_2$  συμβολίζουμε την κατειλημμένη χωρητικότητα της «φανταστικής» ζεύξης.

Η πρώτη σχέση μας εξασφαλίζει ότι το κατειλημμένο εύρος ζώνης όλων των κλήσεων της κατάστασης ON μαζί με το εύρος ζώνης της νέας κλήσης δεν θα ξεπεράσει την χωρητικότητα της «πραγματικής» ζεύξης,

Ενώ η δεύτερη σχέση αποτρέπει το ενδεχόμενο να γίνονται δεκτές στο σύστημα νέες κλήσεις όταν οι περισσότερες από τις κλήσεις του συστήματος βρίσκονται στην κατάσταση OFF (οπότε υπάρχει ο κίνδυνος να μην μπορούν να επιστρέψουν στην κατάσταση ON) .



Σχήμα 2.2 Απεικόνιση της εξυπηρέτησης των κλήσεων στο μοντέλο απωλειών πολυδιάστατης τυχαίας κίνησης κλήσεων ON-OFF [3].



Σχήμα 2.3 Απεικόνιση των μηχανισμών απώλειας κλήσεως και ριπής στο μοντέλο απωλειών πολυδιάστατης τυχαίας κίνησης κλήσεων ON-OFF [3].

### 2.3 Ανάλυση του μοντέλου

Προκειμένου να περιγράψουμε το μοντέλο απωλειών πολυδιάστατης τυχαίας κίνησης κλήσεων ON-OFF στην μόνιμη κατάσταση ορίζουμε ως  $n^i_k$  τον αριθμό των κλήσεων της κατηγορίας κίνησης  $k$  που βρίσκονται στην κατάσταση  $i$ .

Όπου με  $i=1$  συμβολίζουμε την κατάσταση ON και με  $i=2$  την κατάσταση OFF.

Επιπρόσθετα ορίζουμε τα εξής:

$$\begin{aligned} n^i &= (n^i_1, \dots, n^i_k, \dots, n^i_K), \quad \bar{n} = (n^1, n^2), \quad n^i_{k+} = (n^i_1, \dots, n^i_k + 1, \dots, n^i_K), \quad n^i_{k-} = (n^i_1, \dots, n^i_k - 1, \dots, n^i_K), \\ \bar{n}^1_{k+} &= (n^1_{k+}, n^2), \quad \bar{n}^2_{k+} = (n^1, n^2_{k+}), \quad \bar{n}^1_{k-} = (n^1_{k-}, n^2), \quad \bar{n}^2_{k-} = (n^1, n^2_{k-}), \\ \bar{n}^1_{k+-} &= (n^1_{k+}, n^2_{k-}), \quad \bar{n}^2_{k-+} = (n^1_{k-}, n^2_{k+}), \end{aligned}$$

Περαιτέρω ανάλυση των παραπάνω καταστάσεων:

Ορίζουμε το διάνυσμα  $\bar{n} = (n^1, n^2)$  ως μόνιμη κατάσταση του συστήματος, με  $n^i = (n^i_1, \dots, n^i_k, \dots, n^i_K)$  ως το διάνυσμα οριακής κατάστασης στην κατάσταση ισορροπίας για τις καταστάσεις ON, OFF (με  $i=1$  συμβολίζουμε την κατάσταση ON και με  $i=2$  την κατάσταση OFF) για  $k$  κατηγορίες κίνησης, όπου  $k = 1, \dots, K$ .

Το διάνυσμα  $n^i_{k+} = (n^i_1, \dots, n^i_{k+1}, \dots, n^i_K)$ , αποτελεί το διάνυσμα οριακής κατάστασης το οποίο εκφράζει την πιθανότητα να αυξηθεί κατά μια κλήση ο αριθμός των κλήσεων τύπου  $k$ , που βρίσκονται στο σύστημα, είτε στην κατάσταση ON, είτε στην OFF.

Ομοίως το  $n^i_{k-} = (n^i_1, \dots, n^i_{k-1}, \dots, n^i_K)$ , εκφράζει την πιθανότητα να μειωθεί κατά μια κλήση ο αριθμός των κλήσεων τύπου  $k$ , που βρίσκονται στο σύστημα, είτε στην κατάσταση ON, είτε στην OFF.

Το διάνυσμα  $\bar{n}^1_{k+} = (n^1_{k+}, n^2)$  εκφράζει την πιθανότητα να αυξηθεί κατά μια κλήση ο αριθμός των κλήσεων τύπου  $k$ , που βρίσκονται στο σύστημα, στην κατάσταση ON.

Ενώ το διάνυσμα  $\vec{n}_{k-}^1 = (n_{k-}^1, n^2)$  εκφράζει την πιθανότητα να μειωθεί κατά μια κλήση ο αριθμός των κλήσεων τύπου  $k$ , που βρίσκονται στο σύστημα, στην κατάσταση ON.

Επιπλέον το  $\vec{n}_{k+}^2 = (n^1, n_{k+}^2)$  εκφράζει την πιθανότητα να αυξηθεί κατά μια κλήση ο αριθμός των κλήσεων τύπου  $k$ , που βρίσκονται στο σύστημα, στην κατάσταση OFF.

Στον αντίποδα, το διάνυσμα  $\vec{n}_{k-}^2 = (n^1, n_{k-}^2)$  εκφράζει την πιθανότητα να μειωθεί κατά μια κλήση ο αριθμός των κλήσεων τύπου  $k$ , που βρίσκονται στο σύστημα, στην κατάσταση OFF.

Ακόμα, το διάνυσμα  $\vec{n}_{k+-} = (n_{k+}^1, n_{k-}^2)$  εκφράζει την πιθανότητα να αυξηθεί κατά μια κλήση ο αριθμός των κλήσεων τύπου  $k$ , που βρίσκονται στο σύστημα, στην κατάσταση ON ενώ μπορεί να μειωθεί κατά μια κλήση ο αριθμός των κλήσεων τύπου  $k$ , που βρίσκονται στο σύστημα, στην κατάσταση OFF.

Τέλος το διάνυσμα  $\vec{n}_{k-+} = (n_{k-}^1, n_{k+}^2)$  εκφράζει την πιθανότητα να μειωθεί κατά μια κλήση ο αριθμός των κλήσεων τύπου  $k$ , που βρίσκονται στο σύστημα, στην κατάσταση ON ενώ μπορεί να αυξηθεί κατά μια κλήση ο αριθμός των κλήσεων τύπου  $k$ , που βρίσκονται στο σύστημα, στην κατάσταση OFF.

### **Ορίζουμε ακόμα τα εξής:**

Ο ρυθμός  $\gamma_{ik}$  εκφράζει τον εξωτερικό ρυθμό άφιξης των κλήσεων της κατηγορίας κίνησης  $k$  στην κατάσταση  $i$ , και δίνεται από την σχέση [6]:

$$\gamma_{ik} = \begin{cases} \lambda_k, & i = 1 \\ 0, & i = 2 \end{cases} \quad (2.3)$$

για  $k=1, \dots, K$  και  $i=1$  (ON),  $i=2$  (OFF).

Μια κλήση λοιπόν έρχεται στο σύστημα με ρυθμό  $\lambda_k$ , όταν το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση ON.

Θέτουμε επίσης  $r_{ij}(k)$  ως την πιθανότητα η επόμενη κατάσταση να είναι  $j$  δεδομένου ότι η παρούσα κατάσταση είναι η  $i$  ενώ πρόκειται για κλήση της κατηγορίας  $k$ . Βάσει αυτών η σχέση υπολογίζεται ως εξής [6]:

$$r_{1j}(k) = \begin{cases} 0, & \text{για } j = 1 \\ \sigma_k, & \text{για } j = 2 \end{cases} \quad (2.4.1)$$

$$r_{2j}(k) = \begin{cases} 1, & \text{για } j = 1 \\ 0, & \text{για } j = 2 \end{cases} \quad (2.4.2)$$

Βάσει των σχέσεων (2.3), (2.4.1) & (2.4.2) έχουμε την δυνατότητα να υπολογίσουμε τον συνολικό ρυθμό άφιξης των κλήσεων  $e_{ik}$ , της κατηγορίας κίνησης  $k$  στην κατάσταση  $i$ , ο οποίος δίνεται από τη σχέση:

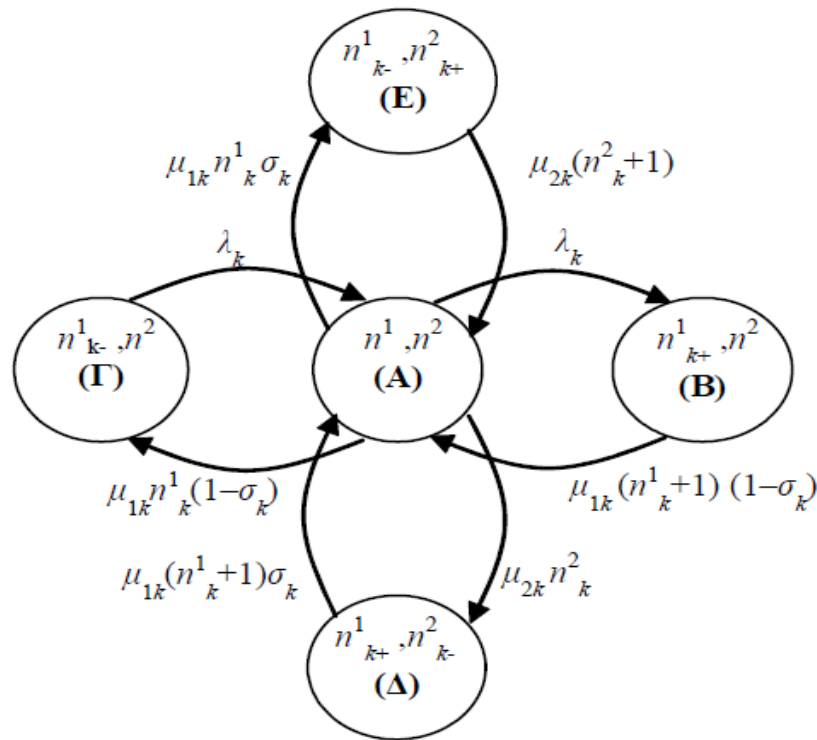
$$e_{ik} = \gamma_{ik} + \sum_{j=1}^2 e_{jk} r_{ji}(k) \quad (2.5)$$

βάσει των παραπάνω μπορεί επίσης να εκφραστεί και ως:

$$e_{ik} = \begin{cases} \frac{\lambda_k}{1-\sigma_k}, & \text{για } i = 1 \\ \frac{\lambda_k \sigma_k}{1-\sigma_k}, & \text{για } i = 2 \end{cases} \quad (2.6)$$

Ως  $\frac{1}{\mu_{ik}}$  ορίζεται η μέση τιμή του εκθετικά κατανομημένου χρόνου εξυπηρέτησης των κλήσεων της κατηγορίας κίνησης  $k$  στην κατάσταση  $i$ , ή  $\mu_{ik}^{-1}$ .

Θεωρώντας πια γνωστές της παραπάνω σχέσεις και εφόσον έχουμε ορίσει ως  $\vec{n} = (n^1, n^2)$  την μόνιμη κατάσταση του συστήματος, έχουμε την δυνατότητα να προχωρήσουμε στην απεικόνιση των πιθανών μεταβάσεων από και προς την κατάσταση  $\vec{n}$ .



**Σχήμα 2.4** Διάγραμμα μεταβάσεων των καταστάσεων του μοντέλου απωλειών πολυδιάστατης τυχαίας κίνησης κλήσεων ON-OFF [3].

Ο οριζόντιος νοητός άξονας του διαγράμματος καταστάσεων του σχήματος 2.4 απεικονίζει νέες (εξωτερικές) αφίξεις κλήσεων στο σύστημα καθώς και τερματισμούς κλήσεων.

Πιο συγκεκριμένα, όταν το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση (A) και έχουμε άφιξη μιας εξωτερικής κλήσης της κατηγορίας κίνησης  $k$ , τότε έχουμε μετάβαση στην κατάσταση (B). Όπως επίσης, όταν το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση (Γ) και έχουμε άφιξη μιας εξωτερικής κλήσης της κατηγορίας κίνησης  $k$ , τότε έχουμε μετάβαση στην κατάσταση (A).

Από την κατάσταση (B), με πιθανότητα  $(1 - \sigma_k)$ , μια από τις  $(n_k^1 + 1)$  κλήσεις της κατηγορίας κίνησης  $k$  αναχωρεί από το σύστημα οπότε έχουμε μετάβαση στην κατάσταση (A).



Συναφές με το παραπάνω ισχύει ότι από την κατάσταση (A), με πιθανότητα  $(1-\sigma_k)$ , μια από τις  $(n_k^1+1)$  κλήσεις της κατηγορίας κίνησης  $k$  αναχωρεί από το σύστημα οπότε έχουμε μετάβαση στην κατάσταση (Γ).

Ο κάθετος νοητός άξονας του διαγράμματος καταστάσεων του σχήματος 2.4 εκφράζει μεταβάσεις από την κατάσταση OFF στην ON και το αντίστροφο. Πιο αναλυτικά, αν το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση (A) και αναχωρήσει μία εκ των  $n_k^2$  κλήσεων της κατηγορίας κίνησης  $k$  με πιθανότητα 1 τότε το σύστημα πραγματοποιεί μετάβαση στην κατάσταση (Δ). Επί της ουσίας πρόκειται για μια μετάβαση από την OFF κατάσταση στην ON. Επίσης, αν το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση (E) και αναχωρήσει μία εκ των  $n_k^2$  κλήσεων της κατηγορίας κίνησης  $k$  με πιθανότητα 1 τότε το σύστημα πραγματοποιεί μετάβαση στην κατάσταση (A), έχουμε μεταβολή από την OFF κατάσταση στην ON.

Αν όμως το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση (Δ) και αναχωρήσει μια εκ των  $(n_k^1+1)$  κλήσεων της κατηγορίας  $k$  με πιθανότητα  $\sigma_k$  τότε το σύστημα θα βρεθεί στην κατάσταση (A). Ουσιαστικά πρόκειται για μια μετάβαση από την κατάσταση ON του συστήματος στην OFF. Ακόμα αν, το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση (A) και αναχωρήσει μια εκ των  $(n_k^1+1)$  κλήσεων της κατηγορίας  $k$  με πιθανότητα  $\sigma_k$  τότε το σύστημα θα βρεθεί στην κατάσταση (E). Στην περίπτωση αυτή πραγματοποιείται επίσης μετάβαση από την κατάσταση ON του συστήματος στην OFF.

## 2.4 Πιθανότητες Καταστάσεων - Εξισώσεις Τοπικής Ισορροπίας

Αν ορίσουμε ως  $P(\vec{n})$  την πιθανότητα μόνιμης κατάστασης και υποθέσουμε ότι στο σύστημά μας εφαρμόζεται η τοπική ισορροπία μεταξύ των διαδοχικών καταστάσεων τότε προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις τοπικής ισορροπίας [6]:

$$n_k^1 \mu_{1k} \sigma_k P(\vec{n}) = \mu_{2k} (n_k^2 + 1) P(\vec{n}_{k-+}) \quad (2.7.1)$$

$$n_k^1 \mu_{1k} (1 - \sigma_k) P(\vec{n}) = \lambda_k P(\vec{n}_{k-}) \quad (2.7.2)$$

$$\lambda_k P(\vec{n}) = \mu_{1k} (n_k^1 + 1) (1 - \sigma_k) P(\vec{n}_{k+}^1) \quad (2.7.3)$$

$$\mu_{21} n_k^2 P(\vec{n}) = \mu_{1k} (n_k^1 + 1) \sigma_k P(\vec{n}_{k+-}^1) \quad (2.7.4)$$

Οι πιθανότητες των καταστάσεων,  $P(\vec{n})$ , υπολογίζονται από τον παρακάτω τύπο λύσης μορφής γινομένου:

$$P(\vec{n}) = \frac{1}{G} \prod_{i=1}^2 \prod_{k=1}^K \frac{p_{ik}^{n_k^i}}{n_k^i!} \quad (2.8)$$

$$\theta\acute{\epsilon}\tau\omicron\upsilon\mu\epsilon \ G = e^p, \quad p = \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^K p_{ik} \quad \kappa\alpha\iota \quad p_{ik} \frac{e_{ik}}{\mu_{ik}} = \begin{cases} \frac{\lambda_k}{(1-\sigma_k)\mu_{1k}} & \gamma\iota\alpha \ i = 1 \\ \frac{\lambda}{(1-\sigma_k)\mu_{2k}} & \gamma\iota\alpha \ i = 2 \end{cases}$$

η παραπάνω σχέση ικανοποιεί όλες τις εξισώσεις του συστήματος.

## 2.5 Μονάδες Εύρους Ζώνης - Κατειλημμένη Χωρητικότητα Ζεύξης

Οι μονάδες εύρους ζώνης που απαιτεί μια κλήση της κατηγορίας  $k$  όταν βρίσκεται στην κατάσταση  $i$  ορίζονται ως  $b_{i,k,s}$ :

$$\text{Όπου, } b_{i,k,s} = \begin{cases} b_k & \text{όταν } s = i \\ 0 & \text{όταν } s \neq i \end{cases}$$

για  $i=1$  αναφερόμαστε στην κατάσταση ON του συστήματος,

ενώ  $i=2$  αναφερόμαστε στην κατάσταση OFF του συστήματος,

για  $s=1$  αναφερόμαστε στην «πραγματική ζεύξη», χωρητικότητας ( $C$ ),

ενώ  $s=2$  αναφερόμαστε στην «φανταστική ζεύξη», χωρητικότητας ( $C^*$ ).

Θέτουμε τον πίνακα  $B$ , ο οποίος περιέχει στοιχεία της μορφής  $b_{i,k,s}$ .

Υποθέτουμε πως έχουμε δύο κατηγορίες κίνησης, για  $K=2$ , ο πίνακας  $B$  θα έχει γραμμές  $B_{ik} = (b_{i,k,1} \ b_{i,k,2})$  και απαιτήσεις σε εύρος ζώνης  $b_1, b_2$  αντίστοιχα.

Η μορφή του πίνακα  $B$  θα είναι η εξής:

$$B = \begin{bmatrix} b_{1,1,1} & b_{1,1,2} \\ b_{2,1,1} & b_{2,1,2} \\ b_{1,2,1} & b_{1,2,2} \\ b_{2,2,1} & b_{2,2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_1 \\ b_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}$$

Άρα η κατειλημμένη χωρητικότητα  $j_s$  της ζεύξης  $s$  όπου ( $s=1 \Rightarrow$  πραγματική ζεύξη, ενώ  $s=2 \Rightarrow$  φανταστική ζεύξη) υπολογίζεται από τη παρακάτω σχέση:

$$j_s = \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^K n_{ik} b_{i,k,s} \quad (2.9)$$

Ενώ η κατάσταση  $\vec{j} = (j_1, j_2)$  ορίζεται και ως  $\vec{j} = \vec{n} B$ .

## 2.6 Αναδρομικός Τύπος Υπολογισμού των Πιθανοτήτων $q(\vec{j})$ - Πιθανότητα Απώλειας κλήσεως (CBP - call blocking probability)

Όπως έχει αναφερθεί, στην περίπτωση που οι χωρητικότητες της «πραγματικής» και της «φανταστικής» ζεύξης είναι πεπερασμένες, η αποδοχή μιας κλήσης θα εξαρτάται από το αν ικανοποιούνται οι περιορισμοί (2.1) και (2.2).

Έτσι, το σύνολο  $\Omega$  των δυνατών καταστάσεων  $j$  θα δίνεται από την σχέση:

$$\vec{j} \in \Omega \Leftrightarrow \left\{ (j_1 \leq C \cap (\sum_{s=1}^2 j_s \leq C^*)) \right\} \quad (2.10)$$

Έστω  $q(\vec{j})$  η πιθανότητα το σύστημα να βρίσκεται στην κατάσταση  $\vec{j} = (j_1, j_2)$ , αν το κατειλημμένο εύρος ζώνης της «πραγματικής» ζεύξης είναι  $j_1$  και το κατειλημμένο εύρος ζώνης της «φανταστικής» ζεύξης είναι  $j_2$  μπορούμε να υπολογίσουμε τις πιθανότητες  $q(\vec{j})$  μέσω του αναδρομικού τύπου.

Προκύπτει ότι η πιθανότητα  $P(\vec{n}_{k-}^i)$  βάσει της σχέσεως (2.8) μπορεί να εκφραστεί ως

$$n_k^i P(\vec{n}) = p_{ik} P(\vec{n}_{k-}^i) \quad (2.11)$$

Η πιθανότητα  $q(\vec{j})$  δίνεται από την σχέση :

$$q(\vec{j}) = P_r(\vec{j} = \vec{n} \cdot B) = \sum_{\vec{n} \in \Omega_j} P(\vec{n}) \quad (2.12)$$

όπου  $\Omega_j = \{ \vec{n} \in \Omega_j : \vec{n}B = \vec{j}, n_k^i \geq 0, k = 1, \dots, K \}$ .

Πολλαπλασιάζοντας το αριστερό και το δεξί μέλος της σχέσης (2.11) με  $b_{i,k,s}$  και αθροίζοντας ως προς  $i$  και  $k$  προκύπτει η έκφραση:

$$P(\vec{n}) \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^K b_{i,k,s} n_k^i = \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^K b_{i,k,s} p_{ik} P(\vec{n}_{k-}^i) \quad (2.13)$$

ενώ λόγω της σχέσης (2.9) δημιουργείται η σχέση:

$$P(\vec{n})j_s = \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^K b_{i,k,s} p_{ik} P(\vec{n}_{k-}^i) \quad (2.14)$$

Αθροίζοντας το αριστερό και το δεξί μέλος της σχέσης (2.14) ως προς τις καταστάσεις του συνόλου  $\Omega_j = \{\vec{n} \in \Omega_j : \vec{n}B = \vec{j}, n_k^i \geq 0, k = 1, \dots, K\}$  και εναλλάσσοντας την σειρά των αθροισμάτων προκύπτει η εξίσωση:

$$j_s \sum_{\vec{n} \in \Omega_j} P(\vec{n}) = \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^K b_{i,k,s} p_{ik} \sum_{\vec{n} \in \Omega_j} P(\vec{n}_{k-}^i) \quad (2.15)$$

Η σχέση (2.12) γράφεται και ως εξής:

$$q(\vec{j} - B_{i,k}) = \sum_{\vec{n} \in \Omega_j} P(\vec{n}_{k-}^i) \quad (2.16)$$

Αντικαθιστώντας τις (2.12), (2.16) στην εξίσωση (2.15) προκύπτει ο παρακάτω αναδρομικός τύπος υπολογισμού των  $q(\vec{j})$  πιθανοτήτων [6]:

$$q(\vec{j}) = \begin{cases} 1 & \text{για } \vec{j} = 0 \\ \frac{1}{j_s} \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^K b_{i,k,s} p_{ik} q(\vec{j} - B_{i,k}) & \text{για } j_1 = 1, \dots, C \text{ (αν } s=1) \text{ ή για } j_2 = 1, \dots, C^* - j_1 \text{ (αν } s=2) \\ 0 & \text{αλλιού} \end{cases} \quad (2.17)$$

Η σχέση (2.17) αναφέρεται σε έναν ακριβή αναδρομικό τύπο ο οποίος σχετίζεται σε μεγάλο βαθμό με τον γνωστό αναδρομικό τύπο των Kaufman – Roberts, καθιστώντας την διαδικασία υπολογισμού των πιθανοτήτων εύκολα υλοποιήσιμη και στον υπολογιστή.

Οι τιμές που προκύπτουν από την (2.17) θα πρέπει να κανονικοποιηθούν με βάση το  $\sum q(\vec{j})$  προκειμένου να χρησιμοποιηθούν στην συνέχεια για τον υπολογισμό της πιθανότητας απώλειας κλήσεως.

Για την καλύτερη κατανόηση του αναδρομικού τύπου (2.17) οι συμβολισμοί του αναλύονται παρακάτω ως εξής:

$q(\vec{j})$  : Η μη κανονικοποιημένη πιθανότητα να υπάρχουν  $\vec{j}$  κατειλημμένες γραμμές στο σύστημα.

$K$  : Το πλήθος των διαφορετικών υπηρεσιών που εξυπηρετεί το σύστημα.

$i$  : Εκφράζει τις καταστάσεις του συστήματος ( $i=1 \Rightarrow$  κατάσταση ON «πραγματική» ζεύξης,  $i=2 \Rightarrow$  κατάσταση OFF «φανταστική» ζεύξης).

$p_{ik}$  : Το φορτίο κίνησης ( $k$ ) κατηγορίας όπου  $k = 1, \dots, K$ , «πραγματικής» ζεύξης για  $i=1$  & «φανταστικής» ζεύξης για  $i=2$ .

$b_{i,k,s}$  : Το απαιτούμενο εύρος ζώνης για την εξυπηρέτηση κάθε κατηγορίας κίνησης, «πραγματικής» ζεύξης & «φανταστικής» ζεύξης.

$C$  : Η συνολική χωρητικότητα «πραγματικής» ζεύξης του συστήματος.

$C^*$  : Η συνολική χωρητικότητα «φανταστικής» ζεύξης του συστήματος.

Η πιθανότητα απώλειας κλήσεως  $P_{bk}$  (call blocking probability, CBP) της κατηγορίας κίνησης  $k$  υπολογίζεται προσθέτοντας τις κανονικοποιημένες πιθανότητες  $q(\vec{j})$  όλων των καταστάσεων απώλειας.

Άρα προκύπτει από τον τύπο υπολογισμού  $P_{bk}$  ότι [6]:

$$P_{b_k} = \frac{\sum G^{-1} q(\vec{j})}{\left\{ \vec{j} \mid [(b_{1,k,1} + j_1) > C] \cup [(b_{1,k,1} + j_1 + j_2) > C^*] \right\}} \quad (2.18)$$

όπου έχουμε για  $\{\Omega = (j_1 > C - b_k) \cup (j_1 + j_2 > C^* - b_k)\}$ :

$$G = \sum_{\vec{j} \in \Omega} q(\vec{j})$$

## 2.7 Πιθανότητα Απώλειας Ριπής (BBP – burst blocking probability)

Στόχος της παραγράφου αυτής είναι η παρουσίαση ενός προσεγγιστικού τύπου ο οποίος υπολογίζει την πιθανότητα αδυναμίας μετάβασης κλήσεως από την κατάσταση OFF στην ON, η διαφορετικά την πιθανότητα απώλειας ριπής (burst blocking probability - BBP).

Απώλεια ριπής στο μοντέλο ON- OFF έχουμε στην περίπτωση που η πραγματική χωρητικότητα της ζεύξης του συστήματος είναι μικρότερη από την χωρητικότητα της φανταστικής ζεύξης, δηλαδή  $C < C^*$ .

Ο υπολογισμός της αδυναμίας μετάβασης κλήσεως από την κατάσταση OFF στην ON,  $B_{bk}$ , της κατηγορίας  $k$ , υπολογίζεται από τον προσεγγιστικό τύπο [3]:

$$B_{bk} = \frac{\sum_{(\vec{j} \in \Omega^*)} Y_{2k}(\vec{j}) q(\vec{j}) \mu_{2k}}{\sum_{(\vec{j} \in \Omega)} Y_{2k}(\vec{j}) q(\vec{j}) \mu_{2k}} \quad (2.19)$$

όπου:  $(\vec{j} \in \Omega) \Leftrightarrow \{(j_1 \leq C) \cap (j_1 + j_2 \leq C^*)\}$ ,

$(\vec{j} \in \Omega^*) \Leftrightarrow \{(C - b_k + 1 \leq j_1 \leq C) \cap (j_1 + j_2 \leq C^*)\}$ .

ενώ,  $\vec{j} \Rightarrow j_s = \begin{cases} s = 1, & \text{ON} \\ s = 2, & \text{OFF} \end{cases}$

Στον αριθμητή του κλάσματος υπολογίζεται ο ρυθμός των OFF κλήσεων της κατηγορίας  $k$  με τον οποίο θα αναχωρήσουν οι κλήσεις από μια κατάσταση απώλειας ριπής, ενώ στον παρονομαστή υπολογίζεται ο συνολικός ρυθμός αναχώρησης όλων των OFF κλήσεων της κατηγορίας  $k$ .

Ενώ οι  $Y_{2k}(\vec{j})$ , OFF κλήσεις της κατηγορίας κίνησης  $k$  στην κατάσταση  $\vec{j}$ , υπολογίζονται από την σχέση:

$$Y_{2k}(\vec{j}) = \frac{p_{2k} q(\vec{j} - B_{2,k})}{q(\vec{j})} \quad (2.20)$$

Όπου:

$Y_{2k}(\vec{j})$  = μέση τιμή των κλήσεων OFF στο σύστημα.

Υπενθυμίζουμε ότι το φορτίο κίνησης  $p_{ik}$ , για  $i=2 \Rightarrow \text{OFF}$  και  $k$  κατηγορίες κίνησης, υπολογίζετε από την έκφραση:

$$p_{ik} = \frac{e_{ik}}{\mu_{ik}} = \begin{cases} \frac{\lambda_k}{(1 - \sigma_k)\mu_{1k}} & \text{για } i = 1 \\ \frac{\lambda}{(1 - \sigma_k)\mu_{2k}} & \text{για } i = 2 \end{cases}$$

Προκειμένου να υπολογίσουμε την πιθανότητα απώλειας ριπής μιας κλήσης της κατηγορίας  $k$ , χρησιμοποιούμε την σχέση (2.20) ώστε να φτιάξουμε έναν πίνακα ο οποίος θα είναι της μορφής  $Y_{2k}(\vec{j})$  για  $k = 1, \dots, K$ .

Για να λάβουμε σωστά αποτελέσματα από τον πίνακα  $Y_{2k}(\vec{j})$  θα πρέπει να ισχύει:

$$j_2 = \sum Y_{2k}(\vec{j}) b_k$$

Αξίζει στο σημείο αυτό να τονίσουμε πως μπορούμε να εξαιρέσουμε τις καταστάσεις για  $j_2=0$ , επειδή τότε προκύπτει:  $Y_{2k}(\vec{j}) = 0$ .



## 2.8 Συσχέτιση του ON-OFF μοντέλου με το μοντέλο των Kaufman -Roberts

Στη παράγραφο αυτή θα αναλύσουμε την σχέση η οποία συνδέει το μοντέλο πολυδιάστατης τυχαίας κίνησης ON-OFF με το μοντέλο πολυδιάστατης τυχαίας κίνησης EMLM των Kaufman - Roberts.

Προκύπτει ότι τα δύο μοντέλα ταυτίζονται όταν [6]:

- η πιθανότητα μετάβασης στην κατάσταση OFF,  $\sigma_k$  είναι μηδέν για κάθε κατηγορία κίνησης,  $k$ , αυτό συνεπάγεται πως δεν υπάρχει κατάσταση OFF.
- παράλληλα τα δύο μοντέλα ταυτίζονται και στην περίπτωση που  $C = C^*$ , δηλαδή η χωρητικότητα της «πραγματικής» ζεύξης ( $C$ ) του συστήματος είναι ίδια με την αυτή της «φανταστικής» ζεύξης ( $C^*$ ).

Τότε το άθροισμα  $j_1 + j_2$  θα είναι μικρότερο ή ίσο της χωρητικότητας  $C$  της «πραγματικής» ζεύξης, γεγονός που εξασφαλίζει ότι δεν θα εμφανίζεται απώλεια ριπής κατά την μετάβαση από την κατάσταση OFF στην κατάσταση ON.

Επειδή έχουμε υποθέσει ότι η κατανομή του χρόνου εξυπηρέτησης των κλήσεων στις δύο καταστάσεις είναι η εκθετική, ο συνολικός χρόνος παραμονής μιας κλήσης της κατηγορίας κίνησης  $k$ ,  $\mu_k^{-1}$ , στο σύστημα θα δίνεται από τον τύπο:

$$\mu_k^{-1} = \frac{\sigma_k}{(1-\sigma_k)} (\mu_{1k}^{-1} + \mu_{2k}^{-1}) + \mu_{1k}^{-1} \quad (2.21)$$

Άρα, το  $\left\{ \frac{\sigma_k}{(1-\sigma_k)} (\mu_{1k}^{-1} + \mu_{2k}^{-1}) \right\}$ , είναι ο μέσος χρόνος όπου μια κλήση εναλλάσσετε μεταξύ των καταστάσεων ON-OFF του συστήματος. Αν προσθέσουμε και τον χρόνο εξυπηρέτησης  $\mu_{1k}^{-1}$  της κλήσεως στην κατάσταση ON, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τον συνολικό χρόνο παραμονής μιας κλήσης της κατηγορίας κίνησης  $k$  στο σύστημα.

Όπου το άθροισμα  $(\mu_{1k}^{-1} + \mu_{2k}^{-1})$  είναι δυνατό να γραφτεί λόγω της εκθετικής κατανομής του χρόνου εξυπηρέτησης, ενώ ο λόγος  $\frac{\sigma_k}{(1-\sigma_k)}$  εκφράζει την μέση τιμή του αριθμού των μεταβάσεων στην κατάσταση OFF μια κλήσης κατηγορίας  $k$  καθ' όλη τη διάρκεια παραμονής της στο σύστημα.

Άρα το μοντέλο πολυδιάστατης τυχαίας κίνησης ON-OFF με το μοντέλο πολυδιάστατης τυχαίας κίνησης EMLM των Kaufman – Roberts είναι ισοδύναμα όταν οι κλήσεις κατηγορίας  $k$  έχουν χαρακτηριστικά  $\lambda_k$ ,  $b_k$  και  $\mu_k^{-1}$  υπολογισμένο από τον τύπο (2.21).

Σημείωση: Επειδή κάθε κλήση μεταβαίνει στην κατάσταση OFF με πιθανότητα  $\sigma_k$ , (σχήμα 2.3). Αυτό σημαίνει ότι η πιθανότητα να μεταβεί για πρώτη φορά στην κατάσταση OFF θα είναι  $\sigma_k^1$ , για δεύτερη φορά  $\sigma_k^2$ , για τρίτη φορά  $\sigma_k^3$  κτλ.

Δημιουργείται έτσι η σειρά:  $\sigma_k^1 + \sigma_k^2 + \sigma_k^3 + \dots$ , από την οποία προκύπτει ο μέσος όρος  $\frac{\sigma_k}{(1-\sigma_k)}$ , για  $0 < \sigma_k < 1$  [3].

### 3 Αριθμητικά Παραδείγματα

#### 3.1 Εισαγωγή

Στόχος του κεφαλαίου αυτού είναι η παρουσίαση παραδειγμάτων στα οποία μελετάτε η απόδοση του συστήματος σε επίπεδο κλήσεων για το μοντέλο απωλειών πολυδιάστατης τυχαίας κίνησης των Kaufman-Roberts (Erlang Multi-rate Loss Model - EMLM) καθώς και το μοντέλο απωλειών πολυδιάστατης τυχαίας κίνησης κλήσεων ON-OFF (ON-OFF model).

Όπως έχει αναφερθεί οι σχέσεις (1.9) & (2.17) αναφέρονται σε δύο ακριβείς αναδρομικούς τύπους οι οποίοι καθιστούν την διαδικασία υπολογισμού των πιθανοτήτων  $q(\vec{j})$  εύκολα υλοποιήσιμη στον υπολογιστή και υπολογίζουν με μεγάλη ακρίβεια τις τιμές των  $q(\vec{j})$ . Αυτό μας έδωσε την δυνατότητα μέσω του προγραμματισμού των τύπων αυτών, να υπολογίζουμε την πιθανότητα απώλειας κλήσεως με μεγάλη ακρίβεια και για τα δύο συστήματα, καθώς και την πιθανότητα απώλειας ριπής για το μοντέλο ON-OFF μέσω του προσεγγιστικού τύπου (2.19), ο οποίος δίνει πολύ καλά αποτελέσματα όταν το σύστημα έχει σχεδιαστεί για χαμηλές τιμές της πιθανότητας αυτής.

Γνωρίζουμε πως το μοντέλο απωλειών πολυδιάστατης τυχαίας κίνησης των Kaufman-Roberts ταυτίζεται με το μοντέλο απωλειών πολυδιάστατης τυχαίας κίνησης κλήσεων ON-OFF, όταν η χωρητικότητα της «πραγματικής» ζεύξης  $C$  του μοντέλου ON-OFF είναι ίση με την χωρητικότητα της «φανταστικής» ζεύξης  $C^*$ . Τότε το άθροισμα  $j_1 + j_2$  θα είναι μικρότερο ή ίσο της χωρητικότητας  $C$  της «πραγματικής» ζεύξης, γεγονός που εξασφαλίζει ότι δεν θα εμφανίζεται απώλεια ριπής κατά την μετάβαση από την κατάσταση OFF στην κατάσταση ON. Είναι τελικά φανερό ότι τα δύο αυτά μοντέλα θα δώσουν ίδια πιθανότητα απώλειας κλήσεως, εφόσον έχουμε εξασφαλίσει την εισαγωγή των κατάλληλων φορτίων κίνησης  $\alpha_k$  στο μοντέλο των Kaufman-Roberts.

### 3.2 Ταύτιση των μοντέλων - Παράδειγμα 1

**Δεδομένα παραδείγματος για το μοντέλο απωλειών πολυδιάστατης τυχαίας κίνησης κλήσεων ON-OFF (ON-OFF model):**

Θεωρούμε τρεις υπηρεσίες,  $K=3$ , οι κλήσεις των οποίων απαιτούν  $b_1 = 12$ ,  $b_2 = 8$  και  $b_3 = 6$  μονάδες εύρους ζώνης αντιστοίχως, η χωρητικότητα του συστήματος της «πραγματικής» ζεύξης είναι ίδια με τη χωρητικότητα της «φανταστικής» ζεύξης,  $C=C^*=80$ ,

ενώ  $\sigma_1=0.85$ ,  $\sigma_2=0.9$ ,  $\sigma_3=0.95$ ,  $\lambda_1=0.05$ ,  $\lambda_2=0.06$ ,  $\lambda_3=0.09$ ,

$\mu_{1ON}^{-1}=0.5$ ,  $\mu_{2ON}^{-1}=1.0$ ,  $\mu_{3ON}^{-1}=1.2$ ,  $\mu_{1OFF}^{-1}=0.8$ ,  $\mu_{2OFF}^{-1}=1.9$ ,  $\mu_{3OFF}^{-1}=0.9$

**Δεδομένα παραδείγματος για το μοντέλο απωλειών πολυδιάστατης τυχαίας κίνησης των Kaufman-Roberts (Erlang Multi-rate Loss Model - EMLM):**

Θεωρούμε τρεις υπηρεσίες,  $K=3$ , οι κλήσεις των οποίων απαιτούν  $b_1 = 12$ ,  $b_2 = 8$  και  $b_3 = 6$  μονάδες εύρους ζώνης αντιστοίχως, η χωρητικότητα του συστήματος  $C=80$ , ενώ  $a_1 = 0,3933334$ ,  $a_2 = 1,6259994$  και  $a_3 = 3,6989991$

	$Pb_1$	$Pb_2$	$Pb_3$
<b>Πρόγραμμα ON-OFF</b>	0.0407652	0.022041	0.0149781
<b>Πρόγραμμα Kaufman-Roberts</b>	0.0407651	0.022041	0.0149781

**Πίνακας 3.1:** Πιθανότητα απώλειας κλήσεως για το μοντέλο ON-OFF και το μοντέλο Kaufman-Roberts όταν  $C=C^*$ .

Εισάγοντας τα δεδομένα στα υλοποιημένα προγράμματά μας και αντικαθιστώντας τα κατάλληλα φορτία κίνησης στο μοντέλο των Kaufman-Roberts, διεξάγουμε τα παραπάνω αποτελέσματα του πίνακα 3.1, είναι φανερό πως τα δύο συστήματα αυτά συμπίπτουν και έχουν ίδιες πιθανότητες απώλειας κλήσεως για κάθε κατηγορία κίνησης  $k$ , όταν στο ON-OFF μοντέλο ισχύει  $C=C^*$ .

### 3.3 Μοντέλο ON-OFF - Παράδειγμα 1

#### 3.3.1 Παράδειγμα 1.1

Δεδομένα :  $C=6$ ,  $C^*=6$ ,  $b_1 = 2$ ,  $b_2 = 1$ ,  $\sigma_1=\sigma_2=0.9$ , και όλοι οι χρόνοι εξυπηρέτησης  $\mu_{1ON}^{-1} = \mu_{2ON}^{-1} = \mu_{1OFF}^{-1} = \mu_{2OFF}^{-1} = 1$ .

Παίρνουμε μετρήσεις αυξάνοντας το  $\lambda_2$  κατά 0.05, άρα :

1<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.1$ ,  $\lambda_2 = 0.1$ , 2<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.1$ ,  $\lambda_2 = 0.15$ , 3<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.1$ ,  $\lambda_2 = 0.20$

4<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.1$ ,  $\lambda_2 = 0.25$ , 5<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.1$ ,  $\lambda_2 = 0.30$ , 6<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.1$ ,  $\lambda_2 = 0.35$

7<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.1$ ,  $\lambda_2 = 0.40$ , 8<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.1$ ,  $\lambda_2 = 0.45$ , 9<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.1$ ,  $\lambda_2 = 0.50$

10<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.1$ ,  $\lambda_2 = 0.55$ .

C = C* = 6		
$(\lambda_1, \lambda_2)$	$Pb_1$	$Pb_2$
(0.1, 0.1)	0.397517	0.193316
(0.1, 0.15)	0.476001	0.241337
(0.1, 0.20)	0.546615	0.290056
(0.1, 0.25)	0.608702	0.337073
(0.1, 0.30)	0.662227	0.381349
(0.1, 0.35)	0.70778	0.422388
(0.1, 0.40)	0.746273	0.46003
(0.1, 0.45)	0.778704	0.494331
(0.1, 0.50)	0.806028	0.525474
(0.1, 0.55)	0.829096	0.553704

**Πίνακας 3.2:** Πιθανότητα απώλειας κλήσεως για δύο κατηγορίες κίνησης, στο μοντέλο ON-OFF όταν  $C = C^* = 6$ .

### 3.3.2 Παράδειγμα 1.2

Δεδομένα :  $C=6, C^*=7, b_1 = 2, b_2 = 1, \sigma_1=\sigma_2=0.9$ , και όλοι οι χρόνοι εξυπηρέτησης

$$\mu_{1ON}^{-1} = \mu_{2ON}^{-1} = \mu_{1OFF}^{-1} = \mu_{2OFF}^{-1} = 1.$$

Παίρνουμε μετρήσεις αυξάνοντας το  $\lambda_2$  κατά 0.05, άρα :

1<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.1, \lambda_2 = 0.1$ , 2<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.1, \lambda_2 = 0.15$ , 3<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.1, \lambda_2 = 0.20$

4<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.1, \lambda_2 = 0.25$ , 5<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.1, \lambda_2 = 0.30$ , 6<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.1, \lambda_2 = 0.35$

7<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.1, \lambda_2 = 0.40$ , 8<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.1, \lambda_2 = 0.45$ , 9<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.1, \lambda_2 = 0.50$

10<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.1, \lambda_2 = 0.55$

<b>C = 6, C* = 7</b>				
$(\lambda_1, \lambda_2)$	<b>Pb<sub>1</sub></b>	<b>Pb<sub>2</sub></b>	<b>Bb<sub>1</sub></b>	<b>Bb<sub>2</sub></b>
(0.1, 0.1)	0.32167	0.147628	0.0294201	0.0161636
(0.1, 0.15)	0.394836	0.19054	0.0303059	0.0159753
(0.1, 0.20)	0.464758	0.234821	0.0304683	0.015992
(0.1, 0.25)	0.529053	0.278967	0.0305234	0.0160209
(0.1, 0.30)	0.586604	0.321749	0.0305984	0.01605
(0.1, 0.35)	0.637174	0.362372	0.0307157	0.0160872
(0.1, 0.40)	0.681083	0.4004	0.0308728	0.0161374
(0.1, 0.45)	0.718939	0.435656	0.0310614	0.0162014
(0.1, 0.50)	0.751464	0.468137	0.0312726	0.0162777
(0.1, 0.55)	0.779383	0.497947	0.0314984	0.0163642

**Πίνακας 3.3:** Πιθανότητα απώλειας κλήσεως και πιθανότητα απώλειας ριπής, στο μοντέλο ON-OFF όταν  $C = 6, C^* = 7$ .

### 3.3.3 Παράδειγμα 1.3

Δεδομένα :  $C=6$ ,  $C^*=8$ ,  $b_1 = 2$ ,  $b_2 = 1$ ,  $\sigma_1=\sigma_2=0.9$ , και όλοι οι χρόνοι εξυπηρέτησης

$$\mu_{1ON}^{-1} = \mu_{2ON}^{-1} = \mu_{1OFF}^{-1} = \mu_{2OFF}^{-1} = 1.$$

Παίρνουμε μετρήσεις αυξάνοντας το  $\lambda_2$  κατά 0.05, άρα :

1<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.1$ ,  $\lambda_2 = 0.1$ , 2<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.1$ ,  $\lambda_2 = 0.15$ , 3<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.1$ ,  $\lambda_2 = 0.20$

4<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.1$ ,  $\lambda_2 = 0.25$ , 5<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.1$ ,  $\lambda_2 = 0.30$ , 6<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.1$ ,  $\lambda_2 = 0.35$

7<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.1$ ,  $\lambda_2 = 0.40$ , 8<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.1$ ,  $\lambda_2 = 0.45$ , 9<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.1$ ,  $\lambda_2 = 0.50$

10<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.1$ ,  $\lambda_2 = 0.55$

<b>C = 6, C* = 8</b>				
$(\lambda_1, \lambda_2)$	<b>Pb<sub>1</sub></b>	<b>Pb<sub>2</sub></b>	<b>Bb<sub>1</sub></b>	<b>Bb<sub>2</sub></b>
(0.1, 0.1)	0.261698	0.116373	0.0612558	0.0266072
(0.1, 0.15)	0.331575	0.153241	0.0700064	0.0308821
(0.1, 0.20)	0.399846	0.193328	0.0765583	0.0348197
(0.1, 0.25)	0.464493	0.23448	0.0817839	0.0381538
(0.1, 0.30)	0.523993	0.27533	0.08609	0.0409349
(0.1, 0.35)	0.577593	0.31493	0.0897155	0.0432654
(0.1, 0.40)	0.625151	0.352662	0.0928211	0.0452396
(0.1, 0.45)	0.666928	0.388178	0.0955206	0.0469332
(0.1, 0.50)	0.703402	0.421323	0.0978959	0.0484043
(0.1, 0.55)	0.735144	0.45208	0.100007	0.0496967

**Πίνακας 3.4:** Πιθανότητα απώλειας κλήσεως και πιθανότητα απώλειας ριπής, στο μοντέλο ON-OFF όταν  $C = 6$ ,  $C^* = 8$ .

### 3.3.4 Συμπεράσματα

Μελετώντας τα αποτελέσματα των παραδειγμάτων (1.1), (1.2), (1.3) στο μοντέλο απωλειών πολυδιάστατης τυχαίας κίνησης κλήσεων ON-OFF παρατηρούμε τα εξής:

Για  $C = C^* = 6$ , δεν εμφανίζεται απώλεια ριπής, ενώ η πιθανότητα απώλειας κλήσεως για την πρώτη κατηγορία κίνησης είναι μεγαλύτερη από την πιθανότητα απώλειας κλήσεως της δεύτερης κατηγορίας κίνησης, αυτό συμβαίνει επειδή η πρώτη κατηγορία καταλαμβάνει 2 μονάδες εύρους ζώνης προς την εξυπηρέτησή της σε αντίθεση με την δεύτερη κατηγορία η οποία καταλαμβάνει 1 μονάδα εύρους ζώνης.

Αυξάνοντας την χωρητικότητα της «φανταστικής» ζεύξης του συστήματος, αρχικά για  $C = 6$ ,  $C^* = 7$  και έπειτα για  $C = 6$ ,  $C^* = 8$  παρατηρούμε πως η πιθανότητα απώλειας κλήσεως για κάθε κατηγορία κίνησης μειώνεται, ενώ αυξάνεται η πιθανότητα απώλειας ριπής του συστήματος.



### 3.4 Μοντέλο ON-OFF - Παράδειγμα 2

#### 3.4.1 Παράδειγμα 2.1

Δεδομένα :  $C=C^*=80$ ,  $k=3$ ,  $b_1=12$ ,  $b_2=8$ ,  $b_3=6$ ,  $\sigma_1=0.85$ ,  $\sigma_2=0.9$ ,  $\sigma_3=0.9$ ,

$$\mu_{1ON}^{-1}=0.5, \mu_{2ON}^{-1}=1.0, \mu_{3ON}^{-1}=1.2, \mu_{1OFF}^{-1}=0.8, \mu_{2OFF}^{-1}=1.9, \mu_{3OFF}^{-1}=0.9$$

Παίρνουμε μετρήσεις αυξάνοντας το  $\lambda_2$  κατά 0.05, άρα :

1<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.05$ ,  $\lambda_2 = 0.06$ ,  $\lambda_3 = 0.09$ , 2<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.05$ ,  $\lambda_2 = 0.06$ ,  $\lambda_3 = 0.12$

3<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.05$ ,  $\lambda_2 = 0.06$ ,  $\lambda_3 = 0.15$ , 4<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.05$ ,  $\lambda_2 = 0.06$ ,  $\lambda_3 = 0.18$

5<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.05$ ,  $\lambda_2 = 0.06$ ,  $\lambda_3 = 0.21$ , 6<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.05$ ,  $\lambda_2 = 0.06$ ,  $\lambda_3 = 0.24$

7<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.05$ ,  $\lambda_2 = 0.06$ ,  $\lambda_3 = 0.27$ , 8<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.05$ ,  $\lambda_2 = 0.06$ ,  $\lambda_3 = 0.30$

9<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.05$ ,  $\lambda_2 = 0.06$ ,  $\lambda_3 = 0.33$ , 10<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.05$ ,  $\lambda_2 = 0.06$ ,  $\lambda_3 = 0.36$

<b>C = 80 C* = 80</b>			
<b><math>(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)</math></b>	<b><math>Pb_1</math></b>	<b><math>Pb_2</math></b>	<b><math>Pb_3</math></b>
(0.05, 0.06, 0.09)	0.0407652	0.022041	0.0149781
(0.05, 0.06, 0.12)	0.0833546	0.0475158	0.0330521
(0.05, 0.06, 0.15)	0.141298	0.0851137	0.0599375
(0.05, 0.06, 0.18)	0.208788	0.13265	0.0939289
(0.05, 0.06, 0.21)	0.279645	0.186264	0.132417
(0.05, 0.06, 0.24)	0.349204	0.241942	0.172969
(0.05, 0.06, 0.27)	0.414607	0.296498	0.213748
(0.05, 0.06, 0.30)	0.474425	0.347859	0.253533
(0.05, 0.06, 0.33)	0.528179	0.394941	0.291584
(0.05, 0.06, 0.36)	0.575955	0.437378	0.327502

**Πίνακας 3.5:** Πιθανότητα απώλειας κλήσεως για κάθε κατηγορία κίνησης, στο μοντέλο ON-OFF όταν  $C=C^*=80$ .

### 3.4.2 Παράδειγμα 2.2

Δεδομένα :  $C=80, C^*=90, k=3, b_1=12, b_2=8, b_3=6, \sigma_1=0.85, \sigma_2=0.9, \sigma_3=0.9,$

$$\mu_{1ON}^{-1}=0.5, \mu_{2ON}^{-1}=1.0, \mu_{3ON}^{-1}=1.2, \mu_{1OFF}^{-1}=0.8, \mu_{2OFF}^{-1}=1.9, \mu_{3OFF}^{-1}=0.9$$

Παίρνουμε μετρήσεις αυξάνοντας το  $\lambda_2$  κατά 0.05, άρα :

1<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.05, \lambda_2 = 0.06, \lambda_3 = 0.09,$  2<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.05, \lambda_2 = 0.06, \lambda_3 = 0.12$

3<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.05, \lambda_2 = 0.06, \lambda_3 = 0.15,$  4<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.05, \lambda_2 = 0.06, \lambda_3 = 0.18$

5<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.05, \lambda_2 = 0.06, \lambda_3 = 0.21,$  6<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.05, \lambda_2 = 0.06, \lambda_3 = 0.24$

7<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.05, \lambda_2 = 0.06, \lambda_3 = 0.27,$  8<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.05, \lambda_2 = 0.06, \lambda_3 = 0.30$

9<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.05, \lambda_2 = 0.06, \lambda_3 = 0.33,$  10<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.05, \lambda_2 = 0.06, \lambda_3 = 0.36$

<b>C = 80 C* = 90</b>						
<b><math>(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)</math></b>	<b><math>Pb_1</math></b>	<b><math>Pb_2</math></b>	<b><math>Pb_3</math></b>	<b><math>Bb_1</math></b>	<b><math>Bb_2</math></b>	<b><math>Bb_3</math></b>
<b>(0.05, 0.06, 0.09)</b>	0.0153153	0.00799981	0.00530253	0.00007340	0.00003393	0.000022005
<b>(0.05, 0.06, 0.12)</b>	0.0375084	0.02005719	0.0139931	0.000169404	0.00008779	0.00005721
<b>(0.05, 0.06, 0.15)</b>	0.0744977	0.0424549	0.0297039	0.000314071	0.000182038	0.000117185
<b>(0.05, 0.06, 0.18)</b>	0.125587	0.0739749	0.0531618	0.00049846	0.000316528	0.00020104
<b>(0.05, 0.06, 0.21)</b>	0.186644	0.113535	0.0833797	0.000711036	0.000480494	0.000303921
<b>(0.05, 0.06, 0.24)</b>	0.252285	0.158635	0.118283	0.000943072	0.000658485	0.000420489
<b>(0.05, 0.06, 0.27)</b>	0.317852	0.206801	0.155606	0.00118914	0.00083637	0.000546697
<b>(0.05, 0.06, 0.30)</b>	0.380221	0.25603	0.193476	0.00144571	0.00100419	0.000679858
<b>(0.05, 0.06, 0.33)</b>	0.437732	0.304861	0.230592	0.00170985	0.00115632	0.000818102
<b>(0.05, 0.06, 0.36)</b>	0.489767	0.3523	0.266171	0.00197872	0.00129049	0.000959909

**Πίνακας 3.6:** Πιθανότητα απώλειας κλήσεως και πιθανότητα απώλειας ριπής, στο μοντέλο ON-OFF όταν  $C = 80, C^* = 90.$

### 3.4.3 Παράδειγμα 2.3

Δεδομένα :  $C=80, C^*=100, k=3, b_1=12, b_2=8, b_3=6, \sigma_1=0.85, \sigma_2=0.9, \sigma_3=0.9,$

$$\mu_{1ON}^{-1} = 0.5, \mu_{2ON}^{-1} = 1.0, \mu_{3ON}^{-1} = 1.2, \mu_{1OFF}^{-1} = 0.8, \mu_{2OFF}^{-1} = 1.9, \mu_{3OFF}^{-1} = 0.9$$

Παίρνουμε μετρήσεις αυξάνοντας το  $\lambda_2$  κατά 0.05, άρα :

1<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.05, \lambda_2 = 0.06, \lambda_3 = 0.09,$  2<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.05, \lambda_2 = 0.06, \lambda_3 = 0.12$

3<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.05, \lambda_2 = 0.06, \lambda_3 = 0.15,$  4<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.05, \lambda_2 = 0.06, \lambda_3 = 0.18$

5<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.05, \lambda_2 = 0.06, \lambda_3 = 0.21,$  6<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.05, \lambda_2 = 0.06, \lambda_3 = 0.24$

7<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.05, \lambda_2 = 0.06, \lambda_3 = 0.27,$  8<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.05, \lambda_2 = 0.06, \lambda_3 = 0.30$

9<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.05, \lambda_2 = 0.06, \lambda_3 = 0.33,$  10<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.05, \lambda_2 = 0.06, \lambda_3 = 0.36$

<b>C = 80 C* = 100</b>						
$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$	$Pb_1$	$Pb_2$	$Pb_3$	$Bb_1$	$Bb_2$	$Bb_3$
(0.05, 0.06, 0.09)	0.00520141	0.00259578	0.00169226	0.000217283	0.000096636	0.00006020
(0.05, 0.06, 0.12)	0.0152124	0.00802499	0.00534583	0.000581776	0.000286671	0.000180735
(0.05, 0.06, 0.15)	0.0351983	0.0195572	0.0132514	0.00123197	0.000672888	0.000423134
(0.05, 0.06, 0.18)	0.0675867	0.0392711	0.0270496	0.00217769	0.00130976	0.000814306
(0.05, 0.06, 0.21)	0.112155	0.0675325	0.0473981	0.00335857	0.00220112	0.00134688
(0.05, 0.06, 0.24)	0.166246	0.102846	0.0737767	0.00467913	0.00330209	0.0019854
(0.05, 0.06, 0.27)	0.225991	0.142653	0.104824	0.0060465	0.00454078	0.00268355
(0.05, 0.06, 0.30)	0.28758	0.184315	0.138864	0.00739071	0.00584165	0.00339908
(0.05, 0.06, 0.33)	0.348008	0.22573	0.174324	0.00866817	0.00714062	0.00410076
(0.05, 0.06, 0.36)	0.405285	0.265502	0.209948	0.00985672	0.00839087	0.00476906

**Πίνακας 3.7:** Πιθανότητα απώλειας κλήσεως και πιθανότητα απώλειας ριπής, στο μοντέλο ON-OFF όταν  $C = 80, C^* = 100.$

### 3.4.4 Παράδειγμα 2.4

Δεδομένα :  $C=80, C^*=110, k=3, b_1=12, b_2=8, b_3=6, \sigma_1=0.85, \sigma_2=0.9, \sigma_3=0.9,$

$$\mu_{1ON}^{-1} = 0.5, \mu_{2ON}^{-1} = 1.0, \mu_{3ON}^{-1} = 1.2, \mu_{1OFF}^{-1} = 0.8, \mu_{2OFF}^{-1} = 1.9, \mu_{3OFF}^{-1} = 0.9$$

Παίρνουμε μετρήσεις αυξάνοντας το  $\lambda_2$  κατά 0.05, άρα :

1<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.05, \lambda_2 = 0.06, \lambda_3 = 0.09,$  2<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.05, \lambda_2 = 0.06, \lambda_3 = 0.12$

3<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.05, \lambda_2 = 0.06, \lambda_3 = 0.15,$  4<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.05, \lambda_2 = 0.06, \lambda_3 = 0.18$

5<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.05, \lambda_2 = 0.06, \lambda_3 = 0.21,$  6<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.05, \lambda_2 = 0.06, \lambda_3 = 0.24$

7<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.05, \lambda_2 = 0.06, \lambda_3 = 0.27,$  8<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.05, \lambda_2 = 0.06, \lambda_3 = 0.30$

9<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.05, \lambda_2 = 0.06, \lambda_3 = 0.33,$  10<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.05, \lambda_2 = 0.06, \lambda_3 = 0.36$

<b>C = 80 C* = 110</b>						
<b><math>(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)</math></b>	<b><math>Pb_1</math></b>	<b><math>Pb_2</math></b>	<b><math>Pb_3</math></b>	<b><math>Bb_1</math></b>	<b><math>Bb_2</math></b>	<b><math>Bb_3</math></b>
<b>(0.05, 0.06, 0.09)</b>	0.00179717	0.000849212	0.000539354	0.000374861	0.000161339	0.000098148
<b>(0.05, 0.06, 0.12)</b>	0.00612658	0.0030744	0.00199915	0.00112114	0.00053131	0.000328058
<b>(0.05, 0.06, 0.15)</b>	0.0163436	0.00865328	0.00574661	0.00262685	0.00136729	0.00084946
<b>(0.05, 0.06, 0.18)</b>	0.0356228	0.0198007	0.0133877	0.0050847	0.00286722	0.00179239
<b>(0.05, 0.06, 0.21)</b>	0.0658531	0.0382907	0.0262609	0.00850254	0.00509491	0.0032208
<b>(0.05, 0.06, 0.24)</b>	0.106696	0.0646894	0.0448575	0.012726	0.0079478	0.00511172
<b>(0.05, 0.06, 0.27)</b>	0.15585	0.0981847	0.0686921	0.0175172	0.0112168	0.00737616
<b>(0.05, 0.06, 0.30)</b>	0.210089	0.136998	0.0966081	0.022629	0.0146735	0.00989608
<b>(0.05, 0.06, 0.33)</b>	0.266272	0.179	0.127217	0.0278475	0.0181294	0.0125549
<b>(0.05, 0.06, 0.36)</b>	0.321904	0.222204	0.159227	0.0330088	0.0214555	0.0152542

**Πίνακας 3.8:** Πιθανότητα απώλειας κλήσεως και πιθανότητα απώλειας ριπής, στο μοντέλο ON-OFF όταν  $C = 80, C^* = 110.$

### 3.4.5 Παράδειγμα 2.5

Δεδομένα :  $C=80, C^*=120, k=3, b_1=12, b_2=8, b_3=6, \sigma_1=0.85, \sigma_2=0.9, \sigma_3=0.9,$

$$\mu_{1ON}^{-1} = 0.5, \mu_{2ON}^{-1} = 1.0, \mu_{3ON}^{-1} = 1.2, \mu_{1OFF}^{-1} = 0.8, \mu_{2OFF}^{-1} = 1.9, \mu_{3OFF}^{-1} = 0.9$$

Παίρνουμε μετρήσεις αυξάνοντας το  $\lambda_2$  κατά 0.05, άρα :

1<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.05, \lambda_2 = 0.06, \lambda_3 = 0.09,$  2<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.05, \lambda_2 = 0.06, \lambda_3 = 0.12$

3<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.05, \lambda_2 = 0.06, \lambda_3 = 0.15,$  4<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.05, \lambda_2 = 0.06, \lambda_3 = 0.18$

5<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.05, \lambda_2 = 0.06, \lambda_3 = 0.21,$  6<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.05, \lambda_2 = 0.06, \lambda_3 = 0.24$

7<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.05, \lambda_2 = 0.06, \lambda_3 = 0.27,$  8<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.05, \lambda_2 = 0.06, \lambda_3 = 0.30$

9<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.05, \lambda_2 = 0.06, \lambda_3 = 0.33,$  10<sup>η</sup> μέτρηση:  $\lambda_1 = 0.05, \lambda_2 = 0.06, \lambda_3 = 0.36$

<b>C = 80 C* = 120</b>						
<b><math>(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)</math></b>	<b><math>Pb_1</math></b>	<b><math>Pb_2</math></b>	<b><math>Pb_3</math></b>	<b><math>Bb_1</math></b>	<b><math>Bb_2</math></b>	<b><math>Bb_3</math></b>
<b>(0.05, 0.06, 0.09)</b>	0.000827971	0.000365219	0.000224536	0.000470893	0.000198815	0.000119574
<b>(0.05, 0.06, 0.12)</b>	0.00300723	0.00143248	0.00089859	0.00151371	0.000700788	0.000426714
<b>(0.05, 0.06, 0.15)</b>	0.00862011	0.00439899	0.00280513	0.00382219	0.00193931	0.00118526
<b>(0.05, 0.06, 0.18)</b>	0.0203043	0.0109712	0.00711925	0.00794238	0.00437757	0.0026816
<b>(0.05, 0.06, 0.21)</b>	0.0406202	0.0229706	0.0152079	0.0141244	0.0083454	0.00513668
<b>(0.05, 0.06, 0.24)</b>	0.070969	0.0416145	0.0281602	0.0222147	0.138667	0.00860786
<b>(0.05, 0.06, 0.27)</b>	0.110945	0.0670325	0.0463682	0.0317555	0.2006469	0.0129737
<b>(0.05, 0.06, 0.30)</b>	0.158526	0.098311	0.0694175	0.0421812	0.0282043	0.0179972
<b>(0.05, 0.06, 0.33)</b>	0.210855	0.133927	0.0963014	0.0529791	0.0360352	0.0234128
<b>(0.05, 0.06, 0.36)</b>	0.265069	0.172237	0.125768	0.0637621	0.0437264	0.0289876

**Πίνακας 3.9:** Πιθανότητα απώλειας κλήσεως και πιθανότητα απώλειας ριπής, στο μοντέλο ON-OFF όταν  $C = 80, C^* = 120.$

### 3.4.6 Συμπεράσματα

Μελετώντας τα αποτελέσματα των παραδειγμάτων (2.1), (2.2), (2.3), (2.4), (2.5) στο μοντέλο απωλειών πολυδιάστατης τυχαίας κίνησης κλήσεων ON-OFF παρατηρούμε τα εξής:

Για  $C = C^* = 80$ , δεν εμφανίζεται απώλεια ριπής, ενώ η πιθανότητα απώλειας κλήσεως για κάθε κατηγορία κίνησης αυξάνεται ανάλογα με τις μονάδες εύρους ζώνης που καταλαμβάνουν προς την εξυπηρέτησή τους. Είναι φανερό πως η πρώτη κατηγορία κίνησης η οποία απαιτεί 12 μονάδες εύρους ζώνης για να εξυπηρετηθεί έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να αποκλειστεί σε σχέση με την δεύτερη κατηγορία η οποία απαιτεί 8 μονάδες εύρους ζώνης. Το ίδιο ισχύει και για την τρίτη κατηγορία κίνησης η οποία απαιτεί 6 μονάδες εύρους ζώνης, άρα έχει λιγότερες πιθανότητες να αποκλειστεί σε σχέση με τις δύο προηγούμενες κατηγορίες κίνησης.

Αυξάνοντας την χωρητικότητα της «φανταστικής» ζεύξης του συστήματος, αρχικά για  $(C=80, C^*=90)$ ,  $(C=80, C^*=100)$ ,  $(C=80, C^*=110)$ ,  $(C=80, C^*=120)$ , παρατηρούμε πως η πιθανότητα απώλειας κλήσεως για κάθε κατηγορία κίνησης μειώνεται, ενώ αυξάνεται η πιθανότητα απώλειας ριπής του συστήματος.

## 4 Επίλογος

Η παρούσα εργασία αποσκοπεί στην προσπάθεια ανάλυσης και σύγκρισης 2 μοντέλων απωλειών πολυδιάστατης τυχαίας κίνησης με εκθετικά κατανομημένους χρόνους εξυπηρέτησης των κλήσεων, ενώ η άφιξη τους στο σύστημα ακολουθεί την διαδικασία Poisson, αυτό σημαίνει πως εξετάζουμε συστήματα για άπειρες πηγές εισόδου. Ακόμα, ως πολιτική διάθεσης του εύρους ζώνης του συστήματος θεωρούμε την πολιτική πλήρους διάθεσης. Τα μοντέλα τα οποία αναλύσαμε είναι τα ακόλουθα:

- a. Μοντέλο απωλειών πολυδιάστατης τηλεπικοινωνιακής κίνησης των Kaufman – Roberts (Erlang Multi-rate Loss Model - EMLM ).
- b. Μοντέλο απωλειών πολυδιάστατης τυχαίας κίνησης κλήσεων ON – OFF (ON – OFF model).

Η ανάλυση επικεντρώνεται στον υπολογισμό των πιθανοτήτων απώλειας κλήσεως μέσω δύο αναδρομικών τύπων και στον υπολογισμό της πιθανότητας απώλειας ριπής μέσω ενός προσεγγιστικού τύπου, για κάθε υπηρεσία. Και τα δύο μοντέλα ακολουθούν την μαρκοβιανή αλυσίδα, έχουν λύση μορφής γινομένου η οποία είναι δύστροπη λόγω της ύπαρξης των παραγοντικών για ρεαλιστικά μεγέθους συστήματα, γι αυτό και δεν εφαρμόζεται. Η ύπαρξη της όμως έδωσε την δυνατότητα δημιουργίας των αναδρομικών τύπων οι οποίοι είναι εύκολα υλοποιήσιμοι στον υπολογιστή και δίνουν πολύ καλά αποτελέσματα των πιθανοτήτων αυτών.

Αρχικά δημιουργήθηκε ο αναδρομικός τύπος των Kaufman – Roberts από το μοντέλο απωλειών πολυδιάστατης τηλεπικοινωνιακής κίνησης EMLM, έπειτα, ως επέκταση του μοντέλου EMLM, δημιουργήθηκε το ON-OFF μοντέλο στο οποίο οι κλήσεις εναλλάσσονται μεταξύ των περιόδων ON – OFF και ελευθερώνουν το εύρος ζώνης ώστε να χρησιμοποιηθεί από άλλες κλήσεις, αυξάνοντας με τον τρόπο αυτό την χωρητικότητα του συστήματος.

Επειδή όπως αναφέραμε, η λύση μορφής γινομένου είναι πρακτικά ανέφικτη, προγραμματίσαμε τους αναδρομικούς τύπους των μοντέλων και καταφέραμε να διεξάγουμε με ακριβή τρόπο τα ζητούμενα αποτελέσματα των πιθανοτήτων απώλειας κλήσεων και για τα δύο μοντέλα.

Ακόμα, προγραμματίσαμε τον προσεγγιστικό τύπο πιθανότητας απώλειας ριπής που αφορά το μοντέλο ON-OFF, ο οποίος δίνει αρκετά καλά αποτελέσματα της πιθανότητας αυτής.

Συμπερασματικά, βλέπουμε πόσο χρήσιμοι είναι οι αναδρομικοί τύποι, μας επιτρέπουν να ελέγχουμε την ποιότητα εξυπηρέτησης σε επίπεδο κλήσεων για ένα τηλεπικοινωνιακό σύστημα, με εύκολο και ακριβή τρόπο.

Έπειτα από μελέτη των αποτελεσμάτων παρατηρήσαμε πως όταν η χωρητικότητα της «πραγματικής» ζεύξης είναι ίδια με αυτή της «φανταστικής», δηλαδή όταν  $C=C^*$  στο σύστημα ON-OFF, τότε προκύπτει πως τα αποτελέσματα του συμπίπτουν και είναι ίδια με τα αποτελέσματα που διεξάγει το μοντέλο των Kaufman – Roberts. Και δεν εμφανίζεται απώλεια ριπής.

Ακόμα, συμπεράναμε πως όσο αυξάνεται η χωρητικότητα της «φανταστικής» ζεύξης στο μοντέλο ON-OFF, μειώνεται μεν η πιθανότητα απώλειας κλήσεως για κάθε κατηγορία κίνησης, αλλά αυξάνεται παράλληλα η πιθανότητα απώλειας ριπής, με κίνδυνο οι κλήσεις να μην μπορούν να επιστρέψουν στην κατάσταση ON.



## **ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ** **(Bibliography)**

- [1] J. S. Kaufman, "Blocking in a shared resource environment", IEEE Trans. Commun. Vol. 29, No.10, pp. 1474-1481, October 1981.
- [2] J. W. Roberts, "A service system with heterogeneous user requirements", in: G. Pujolle (Ed.), Performance of Data Communications systems and their applications, North Holland, Amsterdam, pp.423-431, 1981.
- [3] Ι. Δ. Μοσχολιός, «Μοντέλα απωλειών κλήσεων πολυδιάστατης τηλεπικοινωνιακής κίνησης – Μοντέλα Κατωφλίων, Κλήσεων ON-OFF, Ομαδικών Κλήσεων», Διδακτορική διατριβή, Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Τεχνολογίας Υπολογιστών, Πανεπιστήμιο Πατρών, Δεκέμβριος 2004.
- [4] Ι. Δ. Μοσχολιός, Σημειώσεις Μεταπτυχιακού Μαθήματος «Προχωρημένα Θέματα Δικτύων» Τμήμα Επιστήμης & Τεχνολογίας Τηλεπικοινωνιών, Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου, Ακαδημαϊκό Έτος 2010 -2011.
- [5] Μ. Λογοθέτης, Θεωρία Τηλεπικοινωνιακής Κινήσεως και Εφαρμογές, Εκδόσεις Παπασωτηρίου 2001.
- [6] M. Mehmet – Ali Asrin, "Call – Burst blocking and call admision control in a broadband network with bursty sources", Performance Evaluation, vol. 38, pp. 1-19, 1999.

# ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

## Παράρτημα 1:

### Υλοποίηση - Προγραμματισμός του Αναδρομικού Τύπου των Kaufman – Roberts σε γλώσσα προγραμματισμού C++.

```
#include <iostream.h>

#include <cstdlib>

#include <fstream>

using namespace std;

void dose_ta_b(unsigned int* b,int sz)
{
    for (int i = 0; i < sz; i++){
        cout<<"b"<<(i+1)<<" = ";
        cin >> b[i]; }//for
}// dose_ta_b

void dose_ta_a(double* a,int sz)
{
    for (int i = 0; i < sz; i++){
        cout<<"a"<<(i+1)<<" = ";
        cin >> a[i]; }//for
}// dose_ta_a

double sum_q(const double *q,int sz)
{
    double sum(0);
    for (int i=0; i<=sz; i++ )
        sum+=q[i];
    return sum;
}//sum_q

void ypologise_neo_q(ofstream &out,double *q,double *Q,int sz,double G)
{
    for(int i=0; i<=sz; i++){
        Q[i]=q[i]/G;
        out<<"q'["<<i<<" ] = "<<Q[i]<<endl;
    }//for
}//ypologise_neo_q

int ypologise_j(const unsigned int* b,int c,int k)
{
    int j;
    j=c-b[k]+1;
    return j;
}//ypologise_j
```

```

void ypologise_Pbk(ofstream &out, const double* Q, const unsigned int* b,
                  int c, int sz, double* Pbk)
{
    int j, fv;

    for(int k=0; k<sz; k++)
    {
        fv=ypologise_j(b,c,k);

        for(j=fv; j<=c; j++)
            Pbk[k]+= Q[j];

        out.setf(ios::fixed, ios::floatfield);
        out.precision(5);
        out<<"Pb["<<(k+1)<<" ] = "<<Pbk[k]<<endl;

    }//for
    out.setf(0, ios::floatfield); out.precision(6); //epanafora
}// ypologise_Pbk

main() {

    int c;           //xoritikotita
    unsigned int* b; //pinakas gia ta b
    double* a;       //pinakas gia ta a
    double* q;       //pinakas gia ta prota q
    int sz;          //katigories kinisis

    cout<<endl;
    cout <<"C = "; cin>>c; cout<<endl;

    cout << "Poses kathgories kinisis exoume : ";
    cin >> sz; cout<<endl;

    b = new unsigned int [sz];
    dose_ta_b(b,sz); //dino ta b
    cout<<endl;
    a = new double [sz];
    dose_ta_a(a,sz); //dino ta a

    ofstream of;
    of.open("APOTELESMATA.txt");
    of<<"INPUT DATA:"<<endl;
    of<<"-----"<<endl;
    of<<"C = "<<<<endl;
    for (int i = 0; i < sz; i++)
        of<<"b"<<(i+1)<<" = "<< b[i] << " ";
    of<<endl;
    for (int i = 0; i < sz; i++)
        of<<"a"<<(i+1)<<" = "<< a[i] << " ";

    q = new double [c+1];

```

```

q[0]=1; //to q(0)==1
of<<endl;
of<<"===== "
<<endl<<endl;
of<<"OUTPUT DATA:"<<endl;
of<<"-----"<<endl;
of<<"q[0] = "<<q[0]<<endl;

double sum;
double qk[2]; //voithitikos pinakas poy kratao ta q[j-bk]
int orosq=0; // metavliti poy kratao to j-bk

for(int j=1; j<=c; j++)
{
    sum=0;
    for(int k=1; k<=sz; k++)
    {
        orosq=(j-b[k-1]);

        if(orosq<0) qk[k-1]=0;
        else if (orosq==0) qk[k-1]=1;
        else qk[k-1]=q[orosq];

        sum+=a[k-1]*b[k-1]*qk[k-1];
    }//for k

    q[j]=(1./ j )*sum;
    of<<"q["<<j<<" ] = "<<q[j]<<endl;

} //for j

double g;
g=sum_q(q,c+1);
of<<endl;
of<<"G = "<<g<<endl<<endl;

delete [] a;

double* Q;
Q=new double[c+1];

of<<"Ta nea q pou prokryptoun:"<<endl;
of<<"-----"<<endl;
ypologise_neo_q(of,q,Q,c,g);

double G;
G=sum_q(Q,c+1);
of<<endl;
of<<"G' = "<<G<<endl<<endl;

delete [] q;

double* Pbk;
Pbk = new double[sz];

of<<"H Pithanotita Apoleias Klisis gia kathe kathgoria : "<<endl;
of<<"-----"<<endl;

```

```

ypologise_Pbk(of,Q,b,c,sz,Pbk);

delete [] b;
delete [] Q;
delete [] Pbk;
of.close();

int delay; cin >> delay;
}

```

## Παράρτημα 2:

### Υλοποίηση - Προγραμματισμός του Αναδρομικού Τύπου ON-OFF.

```

#include <iostream>
#include <stdio.h>
#include <fstream>
using namespace std;
int main(int argc, char *argv[])
{
    int creal,cfic,N,j1,j2,cnt1,cnt2;
    double sum,qin,sum_total;
    double* L;
    double* vars;
    double** mean;
    double** p;
    int* b;
    double* pb;
    double* pbfict;
    int** Bs1;
    int** Bs2;
    double*** Y2k;

```

```

double** q;

//***** Δημιουργία αρχείου*****
ofstream out0("results.txt");

//N=2;creal=50;cfic=50;
cout << "Give C : ";
cin >> creal;
cout << "Give C* : ";
cin >> cfic;
cout << "Give traffic categories ";
cin >> N;
cout<<endl;
L=new double[N+1];
vars=new double[N+1];
pb=new double[N+1];
pbfict=new double[N+1];
mean = new double*[N+1];
for(int i = 0; i <= N; i++)
    mean[i] = new double[3];

p = new double*[N+1];
for(int i = 1; i <= N; i++)
    p[i] = new double[3];

b = new int[N+1];
Bs1 = new int*[N+1];
for(int i = 1; i <=N; i++)
    Bs1[i] = new int[3];

Bs2 = new int*[N+1];

```

```

for(int i = 1; i <=N; i++)
    Bs2[i] = new int[3];

q = new double*[creal+1];
for(int i = 0; i <=creal; i++)
    q[i] = new double[cfic+1];
for(int i=0;i<=creal;i++)
    for(int j=0;j<=cfic;j++)
        q[i][j]=0.;

Y2k = new double**[creal+1];
for(int i = 0; i <=creal; i++)
{
    Y2k[i] = new double*[cfic+1];
    for(int j=0;j<=cfic;j++)
        Y2k[i][j] = new double[N+1];
}

for(int i=0;i<=creal;i++)
    for(int j=0;j<=cfic;j++)
        for(int k = 0; i <=N; i++)
            Y2k[i][j][k] = 0.;

for(int i=1;i<=N;i++)
{
    cout << "Give L("<<i<<") ";
    cin >> L[i];
}

for(int i=1;i<=N;i++)
{
    cout << "Give Var("<<i<<") ";

```

```

        cin >> vars[i];
    }

    /******* Ταυτόχρονα με τη εισαγωγή των δεδομένων του μέσου  $\mu(i,j)$  υπολογίζουμε και
    τις πιθανότητες  $p(i,j)$ 
    for(int i=1;i<=2;i++)
        for(int k=1;k<=N;k++)
            {
                cout << "Give m["<<i<<"]["<<k<<"] ";
                cin >> mean[i][k];
                if(i==1)
                    p[i][k]=L[k]/((1-vars[k])*mean[i][k]);
                else
                    p[i][k]=L[k]*vars[k]/((1-vars[k])*mean[i][k]);
            }

    /******* Εδώ δίνουμε τα b(k)
    for(int k=1;k<=N;k++)
        {
            cout << "Give b["<<k<<"] ";
            cin >> b[k];
        }

    /***Κατασκευάζω τον πίνακα B(i,k) σαν δύο πίνακες στήλη. Ο Bs1 αποτελεί την πρώτη
    στήλη του B και ο BS2 την 2η
    for(int i=1;i<=2;i++)
        for(int k=1;k<=N;k++)
            {
                if(i==1)
                    Bs1[i][k]=b[k];
                else
                    Bs1[i][k]=0;

                if(i==2)

```



```

        Bs2[i][k]=b[k];

    else

        Bs2[i][k]=0;

    }

    /***Εκτυπώνω τον πίνακα B
    for(int k=1;k<=N;k++)
        for(int i=1;i<=2;i++)
            {
                cout << "B("<<i<<","<<k<<","<<1) = "<<Bs1[i][k]<< "
B("<<i<<","<<k<<","<<2)"<<Bs2[i][k]<< endl; /******* Όπου στη συνέχεια έχει "cout" σημαίνει
εκτύπωση στην οθόνη

                out0 << "B("<<i<<","<<k<<","<<1) = "<<Bs1[i][k]<< "
B("<<i<<","<<k<<","<<2)"<<Bs2[i][k]<< endl; /******* Όπου στη συνέχεια έχει "out0" σημαίνει
γράψιμο στο αρχείο
            }

    /***Εκτυπώνω τον πίνακα των πιθανοτήτων p(i,k)
    for(int i=1;i<=2;i++)
        for(int k=1;k<=N;k++)
            {
                cout << "p("<<i<<","<<k<<") = "<<p[i][k]<< " ";
                out0 << "p("<<i<<","<<k<<") = "<<p[i][k]<< " ";
            }
        cout << endl;
        out0<<endl;

    /******* Υπολογίζω το q(j1,θ)
    q[0][0]=1;
    int cnt;
    for(j1=1;j1<=creal;j1++)
    {
        sum=0;
        for(int i=1;i<=2;i++)
            for(int k=1;k<=N;k++)

```

```

        {
            cnt=j1-Bs1[i][k];
            if(cnt<0)
                qin=0;
            else
            {
                qin=q[cnt][0];
            }
            sum+=Bs1[i][k]*p[i][k]*qin;
        }
        q[j1][0]=sum/j1;
    }

```

//\*\*\*\*\* Υπολογισμός του  $q(\theta, j_2)$

```

for(j2=1; j2<=cfic; j2++)
{
    sum=0;
    for(int i=1; i<=2; i++)
        for(int k=1; k<=N; k++)
        {
            cnt=j2-Bs2[i][k];
            if(cnt<0)
                qin=0;
            else
            {
                qin=q[0][cnt];
            }
            sum+=Bs2[i][k]*p[i][k]*qin;
        }
    q[0][j2]=sum/j2;
}

```

```

}
//***** Υπολογισμός του q(j1,j2)
for(j1=1;j1<=creal;j1++)
    for(j2=1;j2<=cfic-j1;j2++)
        {
            sum=0;
            for(int i=1;i<=2;i++)
                for(int k=1;k<=N;k++)
                    {
                        cnt=j1-Bs1[i][k];
                        if(cnt<0)
                            qin=0;
                        else
                            {
                                qin=q[cnt][j2];
                            }
                        sum+=Bs1[i][k]*p[i][k]*qin;
                    }
            q[j1][j2]=sum/j1;
        }
cout<<endl;
out0<<endl;
//***** Εκτυπώνω τα q(j1,j2)
for(j1=0;j1<=creal;j1++)
    for(j2=0;j2<=cfic-j1;j2++)
        {
            cout << "q("<<j1<<","<<j2<<") = "<<q[j1][j2]<< endl;
            out0 << "q("<<j1<<","<<j2<<") = "<<q[j1][j2]<< endl;
        }
cout<<endl;

```

```

out0<<endl;
//*****Υπολογίζω το άθροισμα G
sum_total=0.;
for(j1=0;j1<=creal;j1++)
    for(j2=0;j2<=cfic-j1;j2++)
        sum_total+=q[j1][j2];
cout<<sum_total<<endl;
out0<<sum_total<<endl;
//***** Υπολογίζω τα q(j1,j2)/G
for(j1=0;j1<=creal;j1++)
    for(j2=0;j2<=cfic-j1;j2++)
        q[j1][j2]=q[j1][j2]/sum_total;
sum=0;

//***** Υπολογίζω τα Pb(k)
for(int k=1;k<=N;k++)
{
    for(j1=0;j1<=creal;j1++)
        for(j2=0;j2<=cfic-j1;j2++)
        {
            if(j1>creal-Bs1[1][k])
                sum+=q[j1][j2];
            if((((j1+j2)>cfic-Bs1[1][k])&&!(j1>creal-Bs1[1][k])))
                sum+=q[j1][j2];
        }
    pb[k]=sum;
    sum=0;
}

cout<<endl;

```

```

out0<<endl;

for(int i=1;i<=N;i++)
{
    cout<< "Pb["<<i<<"]= "<<pb[i]<<endl;
    out0<< "Pb["<<i<<"]= "<<pb[i]<<endl;
}

//***** Υπολογίζω τον τρισδιάστατο πίνακα Y2k(j1,j2,k)
for(int k=1;k<=N;k++)
{
    for(j1=0;j1<=creal;j1++)
        for(j2=0;j2<=cfic-j1;j2++)
            {
                cnt1=j1-Bs1[2][k];
                cnt2=j2-Bs2[2][k];
                if((cnt1<0)|| (cnt2<0))
                    qin=0;
                else
                {
                    qin=q[cnt1][cnt2];
                }
                if(q[j1][j2]>0)
                    Y2k[j1][j2][k]=p[2][k]*qin/q[j1][j2];
                else
                    Y2k[j1][j2][k]=0;
            }
}

cout<<endl;
out0<<endl;

```

```

//***** Εκτυπώνω τις τιμές του Y2k
for(j1=0;j1<=creal;j1++)
    for(j2=0;j2<=cfic-j1;j2++)
    {
        cout << "Y2k("<<j1<<","<<j2<<","1) = "<< Y2k[j1][j2][1]<< "
Y2k("<<j1<<","<<j2<<","2) = "<< Y2k[j1][j2][2]<< endl;
        out0 << "Y2k("<<j1<<","<<j2<<","1) = "<< Y2k[j1][j2][1]<< "
Y2k("<<j1<<","<<j2<<","2) = "<< Y2k[j1][j2][2]<< endl;
    }

//***** Υπολογίζω τις τιμές του Pbfiction(k)
double sum1=0.;
double sum2=0.;
for(int k=1;k<=N;k++)
{
    for(j1=0;j1<=creal;j1++)
    {
        for(j2=0;j2<=cfic-j1;j2++)
        {
            if((((j1+j2)<=cfic)&&(j1>=creal-Bs1[1][k]+1)))
            {
                sum1+=Y2k[j1][j2][k]*q[j1][j2]*mean[2][k];
            }

            if((j1+j2)<=cfic)
            {
                sum2+=Y2k[j1][j2][k]*q[j1][j2]*mean[2][k];
            }
        }
    }
    pbfict[k]=sum1/sum2;
    sum1=sum2=0;
}

```

```

}
//***** Εκτυπώνω τις τιμές του Pbfiction(k)
cout<<endl;
out0<<endl;
for(int i=1;i<=N;i++)
{
    cout<< "Pbfict["<<i<<"]="<<pbfict[i]<<endl;
    out0<< "Pbfict["<<i<<"]="<<pbfict[i]<<endl;
}
out0.close();
system("PAUSE");
delete [] L;
delete [] vars;
delete [] mean;
delete [] pb;
delete [] q;
delete [] b;
delete [] Bs1;
delete [] Bs2;
delete [] pbfict;
delete [] Y2k;
}

```