Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου
Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας
Τμήμα Επιστήμης και Τεχνολογίας Υπολογιστών

Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία

Αλγόριθμοι Κατασκευής Ημιομάδων με Συγκεκριμένες Ιδιότητες

Σπυρόπουλος Γεώργιος [Α.Μ. 2011023]

Επιβλέπων:
Λέπουρας Γεώργιος

Τρίπολη, Φεβρουάριος 2013

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<u>ΑΦΙΕΡΩΝΕΤΑΙ</u>

Η παρούσα εργασία αφιερώνεται σε αυτούς που δίνουν νόημα στη ζωή μου:

στους δύο γιούς μου

Θεόδωρο & Χρήστο

καθώς και στην σύζυγό μου

Γιώτα

<u>ευχόμενος να είναι πάντα καλά και υγιείς!</u>

«Εάν θέλεις να φτάσεις έως το άπειρο,
γνώρισε το πεπερασμένο σε όλες τις εκφράσεις του»

Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή

<u>Ευχαριστίες</u>

- ✓ Προς το Τμήμα Επιστήμης και Τεχνολογίας του Πανεπιστημίου Πελοποννήσου, που μου έδωσε την δυνατότητα να παρακολουθήσω και να ολοκληρώσω το Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών του στην Κατεύθυνση: Συστημάτων Λογισμικού.
- ✓ Προς όλους τους καθηγητές μου στο Π.Μ.Σ., ειδικότερα όμως τον Αναπληρωτή Καθηγητή κ. **Γιώργο Λέπουρα** ο οποίος είχε και την επίβλεψη της παρούσας Διπλωματικής.
- ✓ Τέλος, προς τους συναδέλφους μου (συνοδοιπόρους συμφοιτητές) που Π.Μ.Σ. της Κατεύθυνσης Συστημάτων Λογισμικού, ειδικότερα τους: Αλεξόπουλο Δημήτρη & Δημόπουλο Τάσο για την άψογη συνεργασία που αναπτύξαμε!

<u>Περίληψη</u>

Η εργασία αυτή έχει ως στόχο τη δημιουργία ενός **(μη αναδρομικού**) αλγόριθμου, που να κατασκευάζει όλες τις δυνατές ημιομάδες με n-στοιχεία και στις οποίες να μπορούμε [θέτοντας κατάλληλα «φίλτρα»] να προσδώσουμε διάφορες επιθυμητές & συγκεκριμένες ιδιότητες (ως τέτοιες επιλέξαμε την συμμετρική ιδιότητα και την ιδιότητα του ταυτοδύναμου).
Η εργασία χωρίζεται σε δύο μέρη.
Στο πρώτο μέρος γίνεται η περιγραφή του απαραίτητου θεωρητικού πλαισίου, που περιλαμβάνει ορισμούς, ιδιότητες και εφαρμογές σχετικά με έννοιες όπως: διμελής πράξη, ημιομάδα, ομάδα, πίνακας μίας πράξης, μοναδιαίο, διάταξη, semilattice, ταυτοδύναμο στοιχείο, ταυτοδύναμος πίνακας, ιδεώδες ημιομάδας, κανονική / απλή / πλήρης / αρχιμήδειας ημιομάδα, κ.α.
Στο δεύτερο μέρος αναπτύσσεται ο αλγόριθμος, αφού πρώτα έχουμε ορίσει τις απαιτούμενες έννοιες της αφαίρεσης, του ταυτοδύναμου & συμμετρικού πίνακα, του ακεραίου μέρους και του «Δ-αθροίσματος».
Στη συνέχεια γίνεται μία (συνοπτική) παράθεση μερικών εφαρμογών των ημιομάδων σε άλλους μαθηματικούς τομείς.
Παρουσιάζεται ο ψευτοκώδικας του αλγορίθμου κατασκευής των ημιομάδων (και των ιδιοτήτων τους) καθώς και αναλυτικά στοιχεία για την πλήρη περιγραφή και επεξήγησή του (κάνοντας χρήση και παραδειγμάτων).
Παρατίθενται τα συμπεράσματα που προκύπτουν από την παραπάνω μελέτη και ανάλυση, όπως και μία πρόταση «μελλοντικής κατεύθυνσης».
Τέλος η εργασία ολοκληρώνεται με την παράθεση της σχετικής βιβλιογραφίας.

Λέξεις κλειδιά:
Ημιομάδα, αλγόριθμος, διμελής πράξη, πίνακας, ταυτοδύναμος, συμμετρικός.

ΜΕΡΟΣ Α: ΤΟ ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Βασικοί ορισμοί

Ορισμός Ημιομάδας

Μια ημιομάδα είναι ένα σύνολο S εφοδιασμένο με μια **διμελή πράξη** $(\cdot)$ η οποία είναι προσεταιριστική.

- Προσεταιριστική σημαίνει ότι $\forall x, y, z \in S$ ισχύει $x\cdot(y\cdot z) = (x\cdot y)\cdot z$
- Από τα πιο απλά παραδείγματα ημιομάδας είναι οι φυσικοί αριθμοί $\mathbb{N}$ εφοδιασμένοι με την συνήθη πρόσθεση $+$.
- Ένα άλλο παράδειγμα ημιομάδας είναι οι ακέραιοι αριθμοί $\mathbb{Z}$ εφοδιασμένοι με την συνήθη πρόσθεση $+$.

Είναι αρκετά χρήσιμο να κάνουμε τις παρακάτω επιπλέον παρατηρήσεις:

1. Κάθε σύνολο S εφοδιασμένο με μια διμελή πράξη το οποίο είναι ομάδα είναι και ημιομάδα
2. Δεν είναι όλες οι ημιομάδες ομάδες.

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε μόνο με πεπερασμένες ημιομάδες, δηλαδή σύνολα S τα οποία είναι ημιομάδες αλλά ισχύει ότι $|S| = n \in \mathbb{N}$

Ας δούμε πως μπορούμε να αναπαραστήσουμε την διμελή πράξη μέσω του πίνακα της πράξης.

Παράδειγμα Ημιομάδας και Πίνακας Διμελούς Πράξης

Αν θεωρήσουμε το σύνολο $\mathbb{Z}_4 = \{0,1,2,3\}$ με πράξη την πρόσθεση κατά $\bmod 4$ τότε ο πίνακας της πρόσθεσης είναι ο παρακάτω:

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Αν και το σύνολό μας $\mathbb{Z}_4$ είναι ομάδα άρα και ημιομάδα είναι αρκετά εύκολο να φτιάξουμε εμείς τον πίνακα της διμελούς πράξης.
Δεν είναι πάντα όμως έτσι!

Πολλές φορές η διμελής πράξη σε πεπερασμένες ημιομάδες δίνεται από τον πίνακα της διμελούς πράξης. Αυτό συνήθως γίνεται όταν το σύνολό μας δεν αποτελείται από αριθμούς αλλά από αφηρημένα σύμβολα **(a,b,c,…).**

Παράδειγμα Ημιομάδας και Πίνακας Διμελούς Πράξης (2)

Έστω το σύνολο $S=\{a,b,c\}$ τότε θα ορίσω την διμελή πράξη στο σύνολο με βάση τον παρακάτω πίνακα:

$\cdot$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	b	c

Είναι αρκετά εύκολο να διαπιστώσουμε ότι $\forall x,y,z\in S$ ισχύει ότι $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$

Ένα άλλο παράδειγμα ημιομάδας είναι το παρακάτω:

Παράδειγμα Ημιομάδας (3)

Έστω $S=\left\{\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix} \middle| n\geq 1\right\}$ τότε είναι αρκετά εύκολο να δείξουμε ότι για κάθε τριάδα πινάκων $A,B,C\in S$ ισχύει ότι $A(BC)=(AB)C$.

Είδαμε ότι ένα σύνολο για να είναι ημιομάδα αρκεί να του ορίσουμε μια διμελή πράξη η οποία να είναι προσεταιριστική. Αν αρχίσουμε να εμπλουτίζουμε τη δομή της ημιομάδας και με άλλες ιδιότητες αρχίζουμε και παίρνουμε όλο και πιο ενδιαφέρουσες αλγεβρικές δομές.

Μέχρι στιγμής δεν έχουμε αναφέρει την έννοια του μοναδιαίου στοιχείου ή του αντιστρόφου. Αυτό κάνουμε στη συνέχεια:

Ορισμός monoid *(στα ελληνικά «μονοειδές» αλλά δεν είναι δόκιμο)*

Μια ημιομάδα S καλείται **monoid** αν υπάρχει $e\in S$ τέτοιο ώστε για κάθε $x\in S$ να ισχύει ότι $e\cdot x=x\cdot e=x$

Παρατηρήσεις:

- Αν υπάρχει $e\in S$ τέτοιο ώστε για κάθε $x\in S$ να ισχύει ότι $e\cdot x=x$ τότε λέγεται **αριστερό μοναδιαίο (left identity).**
- Αν υπάρχει $e\in S$ τέτοιο ώστε για κάθε $x\in S$ να ισχύει ότι $xe=x$ τότε λέγεται **δεξί μοναδιαίο (right identity).**
- Αν υπάρχει και δεξί και αριστερό μοναδιαίο τότε ταυτίζονται και είναι το **μοναδιαίο** της πράξης.

Υπάρχουν πολλές εναλλακτικές για να κάνουμε πιο πλούσια τη δομή μιας ημιομάδας. Ένα πολύ ισχυρό εργαλείο είναι η έννοια της **διάταξης.**

Η ύπαρξη της διμελούς πράξης δεν συνεπάγεται και την ύπαρξη διάταξης στην ημιομάδα. Παρακάτω διαπραγματευόμαστε τις έννοιες της διάταξης σε μια ημιομάδα και κατ’ επέκταση της **semilattice**.

Ορισμός μερικής διάταξης (partial order)

Έστω ένα σύνολο S τότε μια σχέση $R \subseteq S \times S$ λέγεται σχέση μερικής διάταξης αν

- Είναι **αυτοπαθής** δηλαδή αν για κάθε $x \in S$ ισχύει xRx
- Είναι **αντισυμμετρική** δηλαδή για κάθε $x, y \in S$ αν xRy και yRx τότε $x = y$
- Είναι **μεταβατική** δηλαδή αν για κάθε $x, y, z \in S$ αν xRy και yRz τότε xRz

Άρα μπορούμε να εφοδιάσουμε μια ημιομάδα με αρκετές διατάξεις, για παράδειγμα την ημιομάδα $\mathbb{Z}_4$(η οποία είναι και ομάδα) μπορούμε να της δώσουμε την συνήθη διάταξη, δηλαδή $0 \le 1 \le 2 \le 3$.
Το ερώτημα για τις ημιομάδες είναι ποιες διατάξεις εφοδιάζουν την ημιομάδα ώστε να την καταστήσουν μία ενδιαφέρουσα (αλγεβρική) δομή.
Για αυτό το λόγο θα δίνουμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός ταυτοδύναμου στοιχείου (idempotent)

Έστω S μια ημιομάδα τότε ένα στοιχείο της $x \in S$ καλείται ταυτοδύναμο όταν ισχύει $x^2 = x \cdot x = x$

Παράδειγμα (1) Κατανόησης:

Αν θεωρήσουμε το σύνολο $\mathbb{Z}_4 = \{0,1,2,3\}$ με πράξη την πρόσθεση κατά $\bmod 4$ τότε ο πίνακας της πρόσθεσης είναι ο παρακάτω:

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι το μόνο ταυτοδύναμο στοιχείο είναι το 0.

<u>Παρατήρηση:</u> *Όταν η ημιομάδα μας είναι και* ***ομάδα [που σημαίνει ότι υπάρχει αντίστροφος για κάθε στοιχείο]*** *το μοναδικό ταυτοδύναμο στοιχείο είναι το μοναδιαίο.*
Για αυτό και δεν θα ασχοληθούμε, στη συνέχεια, με ομάδες.

Παράδειγμα (2) Κατανόησης:

Έστω το σύνολο $S = \{a, b, c\}$ τότε αν ορίσω την διμελή πράξη στο σύνολο με βάση τον παρακάτω πίνακα:

$\cdot$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	b	c

Είναι αρκετά εύκολο να διαπιστώσουμε ότι τα ταυτοδύναμα στοιχεία του είναι τα a, c.

Ορισμός

Έστω S μια ημιομάδα τότε θα συμβολίζουμε με E_S το σύνολο των ταυτοδύμων στοιχείων της ημιομάδας S

Παράδειγμα Διάταξης Ημιομάδας

Το παρόν παράδειγμα είναι πολύ σημαντικό για την κατανόηση της θεωρίας.
Έστω S μια ημιομάδα τότε αν E_S είναι το σύνολο των ταυτοδύναμων στοιχείων της ημιομάδας τότε μπορούμε να εφοδιάσουμε το E_S με την εξής διάταξη:
$e \leq f \Leftrightarrow e \cdot f = e = f \cdot e$
Τώρα το μόνο που μένει είναι να δείξουμε ότι η $\leq$ είναι σχέση μερικής διάταξης.

- Προφανώς είναι αυτοπαθής μιας και κάθε στοιχείο είναι ταυτοδύναμο, άρα για κάθε $x \in E_S$ ισχύει ότι $x^2 = x = x^2$ και άρα $x \leq x$
- Είναι αντισυμμετρική γιατί αν $x \leq y$ & $y \leq x \Rightarrow xy = y = yx = x = xy$ άρα $x = y$
- Είναι μεταβατική γιατί είναι προσεταιριστική η διμελής πράξη.

Τώρα που είδαμε ένα παράδειγμα διάταξης σε υποσύνολο μιας ημιομάδας και πιο συγκεκριμένα στο υποσύνολο των ταυτοδύναμων στοιχείων μπορούμε να ορίσουμε το **semilattice**.

Ορισμός semilattice

Ενα semilattice είναι μια άλγεβρα $S = (\mathrm{S}, *)$ η οποία ικανοποιεί, για όλα τα x, y, z $\in$ S τα παρακάτω:

1. $x * x = x$
2. $x * y = y * x$
3. $x * (y * z) = (x * y) * z)$

δηλαδή semilattice είναι μια μεταθετικη ταυτοδύναμη ημιομάδα.

Θυμίζουμε ότι ταυτοδύναμο είναι ένα στοιχείο x μιας ομαδας ή ημιομαδας οταν ισχυει

$$x^2 = x * x = x$$

αν ισχύει για κάθε στοιχείο της ομάδας ή της ημιομάδας τότε λέγεται ***ταυτοδύναμη***.

<u>Σύντομοι ορισμοί & ιδιότητες</u>

Ημιομάδα

Ένα σύνολο A λέγεται ημιομάδα όταν μπορούμε να ορίσουμε σε αυτό το σύνολο μια διμελή πράξη η όποια να είναι προσεταιριστική.

Κάθε ομάδα είναι και ημιομάδα - το αντίστροφο δεν ισχύει. Πολλές φορές την διμελή πράξη που ορίζουμε στην ημιομάδα την παρουσιάζουμε με τη μορφή πίνακα όπως.

Ορισμός μερικώς διατεταγμένη ημιομάδα [po-semigroup]

Μια μερικώς διατεταγμένη ημιομάδα είναι ένα διατεταγμένο σύνολο $(S, \leq)$ το οποίο είναι ημιομάδα.

Από τον ορισμό προκύπτει ότι $\forall a, b \in S$ ισχύει ότι
αν $a \leq b$
τότε $xa \leq xb$ και $ax \leq bx$

Ορισμός δεξιού ιδεώδους μερικώς διατεταγμένης ημιομάδας

Αν S είναι μια μερικώς διατεταγμένη ημιομάδα τότε ένα μη κενό υποσύνολο της S λέγεται δεξί ιδεώδες (αντίστοιχα αριστερό) αν:

1. $AS \subseteq A$
2. Αν $x \in A$ και $y \leq x$ τότε $y \in A$

Ορισμός ιδεώδους μερικώς διατεταγμένης ημιομάδας

Ένα υποσύνολο A μιας μερικώς διατεταγμένης ημιομάδας S καλείται ιδεώδες όταν είναι και αριστερό και δεξί ιδεώδες

Ορισμός δεξιάς κανονικής μερικώς διατεταγμένης ημιομάδας [right regular]

Μια μερικώς διατεταγμένη ημιομάδα καλείται right regular αν για κάθε $a \in S$ υπάρχει $x \in S$ τέτοιο ώστε $a \leq a^2 x$

Ορισμός αριστερής κανονικής μερικώς διατεταγμένης ημιομάδας [left regular]

Μια μερικώς διατεταγμένη ημιομάδα καλείται left regular αν για κάθε $a \in S$ υπάρχει $x \in S$ τέτοιο ώστε $a \leq xa^2$

Ορισμός κανονικής μερικώς διατεταγμένης ημιομάδας [regular po-semigroup]

Μια ημιομάδα καλείται κανονική-regular αν για κάθε $a \in S$ υπάρχει $x \in S$ τέτοιο ώστε $a \leq axa$

Ορισμός πλήρους κανονικής μερικώς διατεταγμένης ημιομάδας [completely regular po-semigroup]

Μια μερικώς διατεταγμένη ημιομάδα καλείται πλήρης-completely αν για κάθε $a \in S$ υπάρχει $x \in S$ τέτοιο ώστε $a \leq a^2 xa^2$

Ορισμός απλής μερικώς διατεταγμένης ημιομάδας [simple po-semigroup]

Μια μερικώς διατεταγμένη ημιομάδα καλείται απλή-simple αν για κάθε $a,b \in S$ υπάρχει $x,y \in S$ τέτοιο ώστε $a \leq xby$

Ορισμός intra-regular μερικώς διατεταγμένης ημιομάδας [intra-regular po-semigroup]

Μια μερικώς διατεταγμένη ημιομάδα καλείται intra-regular αν για κάθε $a \in S$ υπάρχουν $x, y \in S$ τέτοια ώστε $a \leq xa^2 y$

Ορισμός αρχιμήδειων ημιομάδων [archimedean semigroups]

Μια ημιομάδα καλείται αρχιμήδεια (ή έχει την αρχιμήδεια ιδιότητα) αν είναι μεταβατική και ισχύει ότι $\forall x, y \in S$ υπάρχει φυσικός αριθμός n τέτοιος ώστε $x|y^n$

Ορισμός right duo

Μια διατεταγμένη ημιομάδα καλείται right duo αν κάθε δεξί ιδεώδες είναι και ιδεώδες.

ΜΕΡΟΣ Β: ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ

Βασικοί ορισμοί

Πριν παρουσιάσουμε τον αλγόριθμο θα δώσουμε τους απαραίτητους ορισμούς ώστε να κατανοηθεί πλήρως το πώς δουλεύει ο αλγόριθμός μας.

Ορισμός Πίνακα Διμελούς Πράξης[1]

Έστω S ένα σύνολο με $|S| = n$ στοιχεία και $*$ μια διμελής πράξη ορισμένη στο σύνολο αυτό τότε ένας πίνακας $n \times n$ της μορφής:

$*$	a_1	$\cdots$	a_n
a_1	a_i		a_k
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
a_n	a_l		a_j

Λέγεται πίνακας της διμελούς πράξης.
Δηλαδή ο πίνακάς μας έχει σαν στοιχεία, στοιχεία του συνόλου S .

Πόρισμα 1

Μια διμελής πράξη σε ένα σύνολο S με $|S| = n$ δεν είναι τίποτα άλλο από μια συνάρτηση $f : S \times S \mapsto S$ και το πλήθος των δυνατών συναρτήσεων άρα και το πλήθος των δυνατών διμελών πράξεων είναι ίσο με n^{n^2} .

Βάσει του παραπάνω πορίσματος συμπεραίνουμε ότι το πλήθος των δυνατών διμελών πράξεων για ένα σύνολο με n στοιχεία είναι ίσο με n^{n^2}

Ορισμός ταυτοδύναμου πίνακα

Ένας πίνακας του οποίου όλα τα στοιχεία είναι ταυτοδύναμα[2] ονομάζεται ταυτοδύναμος πίνακας[3].

Ορισμός συμμετρικού πίνακα

Ένας τετραγωνικός πίνακας nxn λέγεται συμμετρικός, αν έχει την ιδιότητα:

[1] Στην τελική μορφή του αλγόριθμου κάνουμε χρήση & του μονοδιάστατου πίνακα (προκύπτει με παράθεση των nxn στοιχείων ανά γραμμή, σε μορφή λίστας).
[2] Για τον ορισμό του ταυτοδύναμου στοιχείου παραπέμπουμε στη σελίδα 8
[3] Αντίστοιχα: μία διμελή πράξη θα είναι ταυτοδύναμη, όταν ο πίνακάς της είναι ταυτοδύναμος.

$\forall i, j$ **με** $i \neq i$ **αν ισχύει ότι** $a_{ij} = a_{ji}$ [4]

Ορισμός ακεραίου μέρους
Ακέραιο μέρος του πραγματικού αριθμού χ ονομάζεται ο μεγαλύτερος ακέραιος που δεν ξεπερνά τον χ και συμβολίζεται με [χ] . Αυτό σημαίνει ότι το [χ] είναι ο μοναδικός ακέραιος που ικανοποιεί τη σχέση $[\chi] \leq \chi < [\chi] + 1$.

Παρατήρηση: Στον αλγόριθμό μας χρησιμοποιούμε μόνο μη αρνητικούς αριθμούς, οπότε η έννοια του ακεραίου μέρους ενός τέτοιου αριθμού ταυτίζεται με την έννοια της αποκοπής του δεκαδικού του μέρους.

Οι παρακάτω ορισμοί είναι δικοί μας και χρειάζονται για την λειτουργία του αλγορίθμου μας

Ορισμός Αφαίρεσης
Έστω S ένα σύνολο τότε ορίζουμε την **αφαίρεση** $[-]$ στο σύνολο ως εξής: Για κάθε $a, b \in S$ ορίζουμε $a - b = \begin{cases} 0 & \gamma\iota\alpha \quad a = b \\ 1 & \gamma\iota\alpha \quad a \neq b \end{cases}$

Ορισμός Δ-αθροίσματος D_S
Έστω S ένα σύνολο με $\|S\| = n$ το πλήθος στοιχεία και $*$ μια διμελής πράξη ορισμένη στο σύνολο, τότε με τη χρήση της **αφαίρεσης** ορίζουμε σαν **Δ-άθροισμα** D_S $D_S = \sum_{x,y,z \in S} \left(x*(y*z) - (x*y)*z \right)$

Ο ορισμός του D_S αθροίσματος γίνεται αντιληπτός από το παρακάτω πόρισμα.

Πόρισμα 2
Έστω S ένα σύνολο με $\|S\| = n$ το πλήθος στοιχεία και $\cdot$ μια διμελής πράξη ορισμένη στο σύνολο S τότε η διμελής πράξη είναι προσεταιριστική αν και μόνο αν $D_S = 0$.
Παρατηρήσεις:
1. Το Δ-άθροισμα από τον ορισμό είναι μη αρνητικό. 2. Θα είναι ίσο με 0 αν και μόνο αν όλοι οι προσθετέοι είναι ίσοι με μηδέν, αυτό είναι ισοδύναμο με το εξής: για κάθε $x, y, z \in S$ ισχύει ότι $x(yz) = (xy)z$ και

[4] Όπου $a_{ij} = a_i a_j$

3. Θα είναι διαφορετικό από το 0 αν και μόνο αν υπάρχουν $x, y, z \in S$ τέτοια ώστε $x(yz) \neq (xy)z$.

Εφαρμογές των ημιομάδων

Οι εφαρμογές των ημιομάδων είναι αρκετές, για παράδειγμα:

1. Εφαρμογές των ημιομάδων στη μαθηματική λογική.
2. Εφαρμογές των ημιομάδων στην άπειρη συνδυαστική (σε συνδυασμό με τη θεωρία υπερφίλτρων).
3. Εφαρμογές των ημιομάδων στη θεωρία των μερικών διαφορικών εξισώσεων.
4. Εφαρμογές των ημιομάδων στη θεωρία τελεστών.

Ο ψευδοκώδικας του αλγόριθμου

Άπληστος_Αλγόριθμος

```
Αρχή
    Διάβασε τον αριθμό n
    Θέσε το n2 ίσο με n*n
    Θέσε το flag ίσο με 0

    Για i=1 ως n2
        data[i]=1
    Για-τέλος
    Αποθήκευσε πίνακα data[]

    Για i=1 ως n^n2
        Θέσε το Ds ίσο με 0
        Θέσε το tautodinama ίσο με 0
        Θέσε το simmetrikos ίσο με 0

        Για j=1 ως n2
            Εάν flag=1
                data[j]= data[j] + 1/n^(j-1)
                Εάν data[j]≥n+1 τότε
```

```
                        data[j]=1
                    Εάν-τέλος
                    Θέσε το data_int[j] ίσο με akereo(data[j])
                Εάν-τέλος
            Για-τέλος
            Αποθήκευσε πίνακα data_int[]

            Για q=1 ως n2
                Για w=1 ως n2
                    Για e=1 ως n2
                        Ds=Ds + (data_int[q] * (data_int[w] *
                        data_int[e]) – (data_int[q] * data_int[w]) *
                        data_int[e])
                    Για-τέλος
                Για-τέλος
            Για-τέλος

            Για j=1 ως n2
                Εάν data_int[j]^2 = data_int[j] ΚΑΙ Ds=0 τότε
                    Θέσε το tautodinama ίσο με 1
                Εάν-τέλος
            Για-τέλος

            Εάν n>1 τότε
                Θέσε το data_2d[][] ίσο με 2diastasis(data_int[])

                Για r=1 ως n
                    Για t=1 ως n
                        Εάν r<>t τότε
                                Εάν data_2d[r][t]= data_2d[t][r]
                                ΚΑΙ Ds=0 τότε
                                Θέσε το simmetrikos ίσο με 1
                            Εάν-τέλος
                        Εάν-τέλος
                    Για-τέλος
                Για-τέλος
            Εάν-τέλος

            Εάν Ds=0 τότε
                Αποθήκευσε “Ο πίνακας ",data_int[]," έχει Ds=0”
            Εάν-τέλος
            Εάν tautodinama=1 τότε
                Αποθήκευσε “Ο πίνακας ",data_int[]," είναι ταυτοδύναμος”
            Εάν-τέλος
            Εάν simmetrikos=1 τότε
                Αποθήκευσε “Ο πίνακας ",data_int[]," είναι συμμετρικός”
            Εάν-τέλος
            Θέσε το flag ίσο με 1
        Για-τέλος
    Τέλος
```

<u>Περιγραφή της διαδικασίας εκτέλεσης του Αλγόριθμου</u>

1. Ο αλγόριθμος ζητάει από τον χρήστη να εισάγει το n.
2. Αρχικοποιεί τα στοιχεία ενός μονοδιάστατου πίνακα n*n στοιχείων που το καθένα είναι η μονάδα (ο αριθμός 1).
3. Για n^n^2 επαναλήψεις εκτελεί τα παρακάτω:
    a. Προσθέτει σε κάθε στοιχείο του πίνακα το 1/n^(i-1), όπου παράλληλα γίνεται έλεγχος για να μην ξεπεράσει τη τιμή του n.
    Αποθηκεύεται ο πίνακας αυτός.
    b. Σε ένα νέο πίνακα αποθηκεύεται το ακέραιο μέρος που έχει προκύψει από το προηγούμενο βήμα.
    c. Στη συνέχεια υπολογίζεται το Ds.
    d. Γίνεται έλεγχος για τον αν ο πίνακας είναι ταυτοδύναμος.
    e. Δημιουργούμε ένα νέο δισδιάστατο πίνακα ακεραίων αριθμών με πηγή τον προηγούμενο πίνακα και με διαστάσεις nxn, όπου αυτόν τον πίνακα τον χρησιμοποιούμαι για να ελέγξουμε αν είναι συμμετρικός.
    f. Αποθηκεύεται ένα σχετικό μήνυμα αν ισχύει Ds=0. Επίσης αποθηκεύεται μήνυμα για το αν ο πίνακας είναι συμμετρικός ή/και ταυτοδύναμος.

<u>Αναλυτικό παράδειγμα εφαρμογής του αλγορίθμου</u>

Θα πάρουμε ως παράδειγμα την περίπτωση συνόλου S με $n=2$[5] στοιχεία. Έστω το σύνολο $S=\{a_1,a_2\}$.

Οι δυνατοί πίνακες διμελών πράξεων θα είναι $2^{2^2}=16$, συγκεκριμένα:

Πίνακας 1

$\cdot$	a_1	a_2
a_1	a_1	a_1
a_2	a_1	a_1

Πίνακας 2

$\cdot$	a_1	a_2
a_1	a_2	a_1
a_2	a_1	a_1.

Πίνακας 3

$\cdot$	a_1	a_2
a_1	a_1	a_2
a_2	a_1	a_1

Πίνακας 4

$\cdot$	a_1	a_2
a_1	a_1	a_1
a_2	a_2	a_1

Πίνακας 5

$\cdot$	a_1	a_2
a_1	a_1	a_1
a_2	a_1	a_2

Πίνακας 6

$\cdot$	a_1	a_2
a_1	a_2	a_2
a_2	a_1	a_1

Πίνακας 7

$\cdot$	a_1	a_2
a_1	a_2	a_1
a_2	a_2	a_1

Πίνακας 8

$\cdot$	a_1	a_2
a_1	a_1	a_1
a_2	a_2	a_2

Πίνακας 9

$\cdot$	a_1	a_2
a_1	a_1	a_2
a_2	a_1	a_2

Πίνακας 10

$\cdot$	a_1	a_2
a_1	a_2	a_1
a_2	a_1	a_2

Πίνακας 11

$\cdot$	a_1	a_2
a_1	a_1	a_2
a_2	a_2	a_1

Πίνακας 12

$\cdot$	a_1	a_2
a_1	a_1	a_2
a_2	a_2	a_2

Πίνακας 13

$\cdot$	a_1	a_2
a_1	a_2	a_2
a_2	a_1	a_2

Πίνακας 14

$\cdot$	a_1	a_2
a_1	a_2	a_1
a_2	a_2	a_2

Πίνακας 15

$\cdot$	a_1	a_2
a_1	a_2	a_2
a_2	a_2	a_1

Πίνακας 16

$\cdot$	a_1	a_2
a_1	a_2	a_2
a_2	a_2	a_2

17

Λόγω του ισομορφισμού[6] του $\{\alpha_1,\alpha_2\}$ με το σύνολο $\{1,2\}$ οι πίνακες γίνονται:

Πίνακας 1

·	1	2
1	1	1
2	1	1

Πίνακας 2

·	1	2
1	2	1
2	1	1.

Πίνακας 3

·	1	2
1	1	2
2	1	1

Πίνακας 4

·	1	2
1	1	1
2	2	1

Πίνακας 5

·	1	2
1	1	1
2	1	2

Πίνακας 6

·	1	2
1	2	2
2	1	1

Πίνακας 7

·	1	2
1	2	1
2	2	1

Πίνακας 8

·	1	2
1	1	1
2	2	2

---

[5] Διαλέξαμε το $n=2$ γιατί έχει τους λιγότερους υπολογισμούς (για n=3, οι δυνατοί συνδυασμοί πράξεων = πινάκων ανέρχονται σε 729). Αν θέλαμε να αποδείξουμε ότι δουλεύει για κάθε n αρκεί η αναφορά στα πορίσματά μας και η απόδειξη είναι τετριμμένη.

[6] Δύο σύνολα είναι ισόμορφα (ή ισομορφικά) αν υπάρχει αμφιμονοσύμαντη («ένα προς ένα») & «επί» αντιστοιχία μεταξύ τους.

Πίνακας 9

·	1	2
1	1	2
2	1	2

Πίνακας 10

·	1	2
1	2	1
2	1	2

Πίνακας 11

·	1	2
1	1	2
2	2	1

Πίνακας 12

·	1	2
1	1	2
2	2	2

Πίνακας 13

·	1	2
1	2	2
2	1	2

Πίνακας 14

·	1	2
1	2	1
2	2	2

Πίνακας 15

·	1	2
1	2	2
2	2	1

Πίνακας 16

·	1	2
1	2	2
2	2	2

Ο αλγόριθμός μας λειτουργεί **κατά γραμμή**[7] ως εξής:

	data[]				**data_int[]**				**Ds**	**Ταυτοδύναμος / Συμμετρικός**
1ος πίνακας	1	1	1	1					0	ΟΧΙ/ΝΑΙ
2ος πίνακας	2,000	1,500	1,250	1,125	2	1	1	1	>0	-
3ος πίνακας	1,000	2,000	1,500	1,250	1	2	1	1	>0	-
4ος πίνακας	1,000	1,000	2,000	1,500	1	1	2	1	>0	-
5ος πίνακας	1,000	1,000	1,000	2,000	1	1	1	2	>0	-
6ος πίνακας	2,000	2,500	1,750	1,375	2	2	1	1	>0	-
7ος πίνακας	2,000	1,500	2,250	1,625	2	1	2	1	>0	-
8ος πίνακας	1,000	1,000	2,000	2,500	1	1	2	2	>0	-
9ος πίνακας	1,000	2,000	1,500	2,250	1	2	1	2	>0	-
10ος πίνακας	2,000	1,500	1,250	2,125	2	1	1	2	>0	-
11ος πίνακας	1,000	2,000	2,500	1,750	1	2	2	1	0	ΟΧΙ/ΝΑΙ
12ος πίνακας	1,000	2,000	2,500	2,750	1	2	2	2	>0	-
13ος πίνακας	2,000	2,500	1,750	2,375	2	2	1	2	>0	-
14ος πίνακας	2,000	1,500	2,250	2,625	2	1	2	2	>0	-
15ος πίνακας	2,000	2,500	2,750	1,875	2	2	2	1	>0	-
16ος πίνακας	2,000	2,500	2,750	2,875	2	2	2	2	0	ΟΧΙ/ΝΑΙ

Σχόλιο:
Το Ds = 0 σημαίνει ότι η πράξη (·) που ορίζεται από τον αντίστοιχο πίνακα είναι προσεταιριστική και έτσι ορίζεται στο σύνολο S δομή Αλγεβρικής Ημιομάδας.
Η συμμετρικότητα καθώς και η ταυτοδυναμία του πίνακα (της πράξης) ελέγχεται μόνο όταν Ds = 0.

[7] Δηλαδή πρώτα για τον «1ο πίνακα», μετά για τον «2ο πίνακα» κοκ

<u>Συμπεράσματα</u>

Ο αλγόριθμος στο σύνολό του είναι πολύ «έξυπνος», υπό την έννοια ότι παρά την λιτότητά του δουλεύει με τρόπο που να ανταποκρίνεται πλήρως στον σκοπό του, δηλαδή: τη δημιουργία ενός μαθηματικού (& μη αναδρομικού) αλγόριθμου, ο οποίος να κατασκευάζει όλες τις δυνατές ημιομάδες με n-στοιχεία και στις οποίες ημιομάδες να μπορούμε να προσδώσουμε διάφορες επιθυμητές & συγκεκριμένες ιδιότητες (ταυτοδυναμία & συμμετρικότητα).

Όσο για την ορθότητα του αλγορίθμου αρκεί να ανακαλέσουμε τα θεωρήματά μας [από το θεωρητικό πλαίσιο που έχει προηγηθεί της ανάπτυξης του αλγορίθμου].
Αν ο αλγόριθμός μας έβγαζε ένα σύνολο σαν ημιομάδα ενώ δεν ήταν, αυτό θα σήμαινε ότι το Δ-αθροισμα δεν είναι καλά ορισμένο, όμως αυτό δεν ισχύει μιας και έχουμε ήδη το παρακάτω πόρισμα

Πόρισμα 2
Έστω S ένα σύνολο με $\|S\| = n$ το πλήθος στοιχεία και $\cdot$ μια διμελής πράξη ορισμένη στο σύνολο τότε η διμελής πράξη είναι προσεταιριστική αν και μόνο αν $D_S = 0$.
Παρατηρήσεις.
Το Δ-άθροισμα από τον ορισμό είναι μη αρνητικό. Θα είναι ίσο με 0 αν και μόνο αν όλοι οι προσθετέοι είναι ίσοι με μηδέν, αυτό είναι ισοδύναμο με το έξης: για κάθε $x, y, z \in S$ ισχύει ότι $x(yz) = (xy)z$ και θα είναι διαφορετικό από το 0 αν και μόνο αν υπάρχουν $x, y, z \in S$ τέτοια ώστε $x(yz) \neq (xy)z$.

Μελλοντική κατεύθυνση

Ο αλγόριθμός μας χαρακτηρίζεται ως (και για αυτό του προσδώσαμε και το όνομα): **Άπληστος**, επειδή από ένα σύνολο n στοιχείων, δημιουργεί όλους τους n^{n^2} δυνατούς πίνακες (συνδυασμούς) που ορίζουν μία διμελή πράξη και σε επόμενο στάδιο «κρατάει» αυτούς που τελικά μας χρειάζονται, δηλαδή αυτούς όπου η πράξη είναι προσεταιριστική και άρα προσδίδουν στο σύνολο τη δομή της Αλγεβρικής Ημιομάδας.
Αυτό (σε συνδυασμό και με την απαίτησή μας να μην χρησιμοποιηθεί αναδρομικότητα) «βαραίνει» τον αλγόριθμό μας και τον κάνει μη οικονομικό (όσο το n μεγαλώνει)
Ως μελλοντική εργασία θα μπορούσε να αποτελέσει αντίστοιχη προσπάθεια που θα τελειοποιεί τον αλγόριθμό μας, αποτρέποντάς τον να κατασκευάσει - αποθηκεύει όλους αυτούς τους δυνατούς πίνακες και να περιορίζεται στην κατασκευή εξ' αρχής μόνο των χρήσιμων πινάκων, δηλαδή των ημιομάδων.
Έτσι θα επιτευχθεί απλούστευση της υπολογιστικής πολυπλοκότητας, χαρακτηριστικό που δεν διαθέτει ο δικό μας αλγόριθμος.

Βιβλιογραφία

Ξενόγλωσση:

Harju, T. (1996). *Lecture Notes on Semigroups.* Turku: Department of Mathematics University of Turku.

Kehayopulu, N., Lepouras, G., Tsingelis, M., *On right regular and right duo ordered semigroups*, Math. Japonica 46, No. 2 (1997), 311-315. Mathematical Reviews: 06019 (Alexey Vernitskii). Zentralblatt fur Math 890.06009 (H. Mitsch).

Mathworld. (2012, December). Ανάκτηση από Mathworld: http://mathworld.wolfram.com/Semigroup.html

Sardar, S. K. (Volume 2, Number 2, 2009,). On properties of fuzzy ideals in po-semigroup. *ARMENIAN JOURNAL OF MATHEMATICS*, 65-72.

wikipedia. (2012, December). Ανάκτηση από wikipedia: http://en.wikipedia.org/wiki/Semigroup

Ελληνική:

Ανδραεδάκη, Σ. (1986). *Εισαγωγή στην Άλγεβρα,* Αυτοέκδοση, Αθήνα.

Ανδραεδάκη, Σ. (1989). *Γραμμική Άλγεβρα,* Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα.

Σπυρόπουλος, Γ. (1992). Ανάλυση Ι: Πραγματικές Συναρτήσεις, Αυτοέκδοση, Αθήνα

Χρυσάκης, Θ. (1989). *Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας και Αναλυτικής Γεωμετρίας,* Εκδόσεις Αίθρα, Αθήνα.