



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΛΟΠΟΝΝΗΣΟΥ**  
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ  
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ  
Π.Μ.Σ. «ΠΡΟΗΓΜΕΝΑ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΚΑΙ  
ΔΙΚΤΥΑ»

Εφαρμογή Αλγορίθμων Ψηφιακής Επεξεργασίας Σήματος στην  
Ταυτοποίηση Αραιών Συστημάτων

## **ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

Θωμάς Η. Τέγου

**Επιβλέπων:** Κωνσταντίνος Σλαβάκης  
Επίκουρος Καθηγητής

Τρίπολη, Ιανουάριος 2012



## Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα επίκουρο καθηγητή κ. Κωνσταντίνο Σλαβάκη για την ευκαιρία που μου έδωσε να ασχοληθώ με αυτό το πολύ ενδιαφέρον επιστημονικό αντικείμενο, για τη στενή επίβλεψη κατά την υλοποίηση αυτής της εργασίας, την άμεση και έγκαιρη ανταπόκριση σε κάθε ζήτημα που προέκυπτε και πάνω από όλα για την πολύτιμη καθοδήγηση και τις καίριες υποδείξεις που μου παρείχε, για την ολοκλήρωσή της.

# Περιεχόμενα

Περιεχόμενα .....	1
1. Εισαγωγή.....	3
1.1 Εφαρμογές των αραιών συστημάτων .....	4
1.1.1 Εφαρμογές στην ψηφιακή επεξεργασία εικόνας.....	4
1.1.2 Άλλες εφαρμογές της συμπιεσμένης ανίχνευσης.....	8
1.1.3 Βιβλιογραφία .....	10
2. Περιγραφή του προβλήματος που θα επιλυθεί από τους αλγορίθμους .....	12
2.1 Βιβλιογραφία .....	13
3. Αλγόριθμος Hero LMS (Least Mean Square) .....	13
3.1 Εισαγωγή .....	13
3.2 Hero LMS Algorithm (LMS) .....	14
3.3 Zero-Attracting Hero LMS Algorithm (ZA-LMS) .....	16
3.4 Reweighted Zero-Attracting Hero LMS Algorithm(RZA-LMS).....	16
3.5 Βιβλιογραφία .....	17
4. Αλγόριθμος SPADOMP (Sparse Adaptive Orthogonal Matching Pursuit) .....	18
4.1 Βιβλιογραφία .....	21
5. Αλγόριθμος SPAL (Sparse System Identification and Signal Reconstruction Using Projections Onto Weighted $l_1$ Balls).....	22
5.1 Εισαγωγή .....	22
5.2 Θεωρητική προσέγγιση του αλγορίθμου .....	24
5.3 Γενικό πλαίσιο του συγκεκριμένου αλγορίθμου .....	25
5.4 Προβάλλοντας πάνω σε ένα hyperslab .....	27
5.5 Προβάλλοντας πάνω στην σταθμισμένη $l_1$ μπάλα (weighted $l_1$ ball) .....	28
5.6 Σταθμίζοντας την $l_1$ μπάλα (weighting the $l_1$ ball) .....	31
5.7 Ιδιότητες σύγκλισης του αλγορίθμου .....	31
5.8 Βιβλιογραφία .....	33
6. Αποτελέσματα από την εφαρμογή των αλγορίθμων για διάφορα μήκη αραιών διανυσμάτων. ....	35
6.1 Εισαγωγή .....	35
6.2 Αποτελέσματα από την εφαρμογή του αλγορίθμου SPAL για διάφορα μήκη αραιών διανυσμάτων. ....	36
6.3 Αποτελέσματα από την εφαρμογή του αλγορίθμου Hero LMS για διάφορα μήκη αραιών διανυσμάτων. ....	41
6.4 Αποτελέσματα από την εφαρμογή του αλγορίθμου SPADOMP για διάφορα μήκη αραιών διανυσμάτων. ....	45
7. Σύγκριση των αλγορίθμων σε κοινά σενάρια .....	46
7.1 Εισαγωγή .....	46
7.2 Σύγκριση των αλγορίθμων ως προς την ακρίβεια προσέγγισης για διάφορα μήκη αραιών διανυσμάτων .....	47
7.3 Σύγκριση των αλγορίθμων ως προς την ταχύτητα προσέγγισης διαφόρων αραιών διανυσμάτων .....	52

8. Εφαρμογή των αλγορίθμων για διαφορετικά SNR και διαφορετικά μήκη αραιών διανυσμάτων .....	56
8.1 Εισαγωγή .....	56
8.2 Αλγόριθμος SPAL .....	56
8.3 Αλγόριθμος Hero Sparse LMS:.....	63
8.4 Αλγόριθμος ZA-LMS:.....	66
8.5 Αλγόριθμος RZA-LMS:.....	69
8.6 Αλγόριθμος SPADOMP .....	72
9. Αποτελέσματα από την αλλαγή του αρχικού αραιού διανύσματος που προσεγγίζουν οι αλγόριθμοι κατά την διάρκεια εκτέλεσής τους .....	75
9.1 Αλγόριθμος SPAL .....	75
9.2 Αλγόριθμος Hero Sparse LMS.....	81
9.3 Αλγόριθμος SPADOMP .....	84
10. Χρησιμοποίηση διαφορετικών κατανομών για τις τιμές των μη μηδενικών στοιχείων των αραιών διανυσμάτων. ....	87
10.1 Χαρακτηριστικά κανονικής κατανομής .....	88
10.2 Χαρακτηριστικά κατανομής βήτα.....	88
10.3 Χαρακτηριστικά εκθετικής κατανομής.....	89
10.4 Χαρακτηριστικά κατανομής γάμμα.....	90
10.5 Χαρακτηριστικά λογαριθμοκανονικής κατανομής.....	91
10.6 Χαρακτηριστικά κατανομής Weibull .....	91
11. Αποτελέσματα από την εκτέλεση των αλγορίθμων και σύγκριση των προσεγγίσεων για τις παραπάνω κατανομές, των μη μηδενικών στοιχείων με εύρος τιμών [0,1], για διάνυσμα 200/20. ....	93
11.1 Αλγόριθμος SPAL .....	93
11.2 Αλγόριθμος Hero Sparse LMS.....	94
11.3 Αλγόριθμος SPADOMP .....	95
12. Χρησιμοποίηση διαφορετικών παραμέτρων στις κατανομές ώστε τα μη μηδενικά στοιχεία να παίρνουν τιμές όχι από κάποιο συγκεκριμένο εύρος. ....	96
12.1 Αλγόριθμος SPAL .....	99
12.2 Αλγόριθμος Hero Sparse LMS.....	100
12.3 Αλγόριθμος SPADOMP .....	101
13. Συμπεράσματα-Προτάσεις .....	102
14. Παράρτημα .....	103
14.1 Παράμετροι των Αλγορίθμων Hero LMS.....	103
14.2 Αλγόριθμος Hero LMS .....	103
14.3 Αλγόριθμος RZA-LMS.....	104
14.4 Αλγόριθμος ZA-LMS.....	104
14.5 Αλγόριθμος SPADOMP .....	105
14.6 Αλγόριθμος SPAL .....	109

## 1. Εισαγωγή

Η συμπιεσμένη ανίχνευση (compressed sensing) αποδεικνύει ότι πολλά σήματα και εικόνες με ορισμένα χαρακτηριστικά μπορούν να ανακατασκευαστούν από πολύ λιγότερα δείγματα ή μετρήσεις σε σχέση με άλλες μεθόδους που χρησιμοποιούνταν ως τώρα. Για να γίνουν κατανοητά τα παρακάτω θα ορίσουμε τις βάσεις  $\Phi$  και  $\Psi$ . Η βάση  $\Phi$  αναφέρεται στην ανίχνευση του σήματος, δηλαδή στη δειγματοληψία και η βάση  $\Psi$  στην αναπαράσταση του σήματος. Έτσι για παράδειγμα αναφερόμενοι σε μια εικόνα η βάση  $\Phi$  θα είναι για κάθε pixel μία τιμή από 0 έως 255, ενώ η βάση  $\Psi$  για το συγκεκριμένο παράδειγμα θα είναι η μετατροπή της ίδιας εικόνας σε wavelets. Για να μπορέσουμε λοιπόν να ανακατασκευάσουμε το αρχικό σήμα χρησιμοποιώντας λιγότερες μετρήσεις από αυτές που υπαγορεύει το θεώρημα Shannon Nyquist εκμεταλλευόμαστε δύο ιδιότητες την αραιότητα (sparsity) που αναφέρεται στο σήμα και την μη συσχέτιση (incoherence) της βάσης  $\Psi$  με τη βάση  $\Phi$  που αναφέρεται στη φόρμα ανίχνευσης (sensing modality). Η αραιότητα (sparsity) αφορά την ιδέα ότι ο ρυθμός πληροφορίας ενός συνεχούς σήματος μπορεί να είναι πολύ μικρότερος από το εύρος ζώνης του σήματος ή ότι ένα σήμα διακριτού χρόνου εξαρτάται από έναν βαθμό ελευθερίας πολύ μικρότερο από το πλήθος των πεπερασμένων στοιχείων του. Η μη συσχέτιση (incoherence) της βάσης  $\Phi$  με τη  $\Psi$  επεκτείνει την δυαδικότητα χρόνου συχνότητας και εκφράζει την ιδέα ότι σήματα που έχουν μια αραιή αναπαράσταση στο  $\Psi$ , θα «απλώνονται» στον τομέα που δημιουργήθηκαν, όπως μια αιχμή ή ένα δέλτα του Dirac στο πεδίο του χρόνου εξαπλώνεται στο πεδίο της συχνότητας. Ανόμοια δηλαδή με το σήμα  $x$  που είναι αραιό, η

αναπαράστασή του στο  $\Psi$  θα είναι εξαιρετικά «πυκνή». Με άλλα λόγια πολλά «πυκνά» σήματα όταν εκφραστούν στην κατάλληλη βάση  $\Psi$  μπορούν να αποκτήσουν αραιή (sparse) μορφή, χωρίς να χαθεί κάποιο «ποσό» πληροφορίας. Είναι σημαντικό το γεγονός ότι μπορούν να σχεδιαστούν αποδοτικά πρωτόκολλα δειγματοληψίας που συγκεντρώνουν τη χρήσιμη πληροφορία που περιέχεται στο αραιό σήμα και τη μετατρέπουν σε μια μικρή ποσότητα δεδομένων. Αυτά τα πρωτόκολλα είναι μη προσαρμοστικά και απλά χρειάζεται να συσχετίσουν το σήμα με έναν μικρό αριθμό κυματομορφών που δεν έχουν σχέση με την αραιή βάση. Αυτό που είναι αξιοσημείωτο με αυτά είναι ότι πολύ εύκολα ένας αισθητήρας μπορεί να συλλάβει την πληροφορία του σήματος χωρίς να χρειάζεται να «κατανοήσει» το σήμα. Επιπλέον γίνεται να ανακατασκευαστεί το αρχικό σήμα από πολύ λίγες μετρήσεις σε σχέση με το μέγεθός του. Με άλλα λόγια η συμπίεσμένη ανίχνευση (compressed sensing) κάνει δειγματοληψία με έναν αντισυμβατικό τρόπο με μικρό ρυθμό και μετά χρησιμοποιεί κάποια υπολογιστική ισχύ για να ανακατασκευάσει το αρχικό σήμα από μετρήσεις που εκ πρώτης όψης φαίνονται ελλιπείς.

## 1.1 Εφαρμογές των αραιών συστημάτων

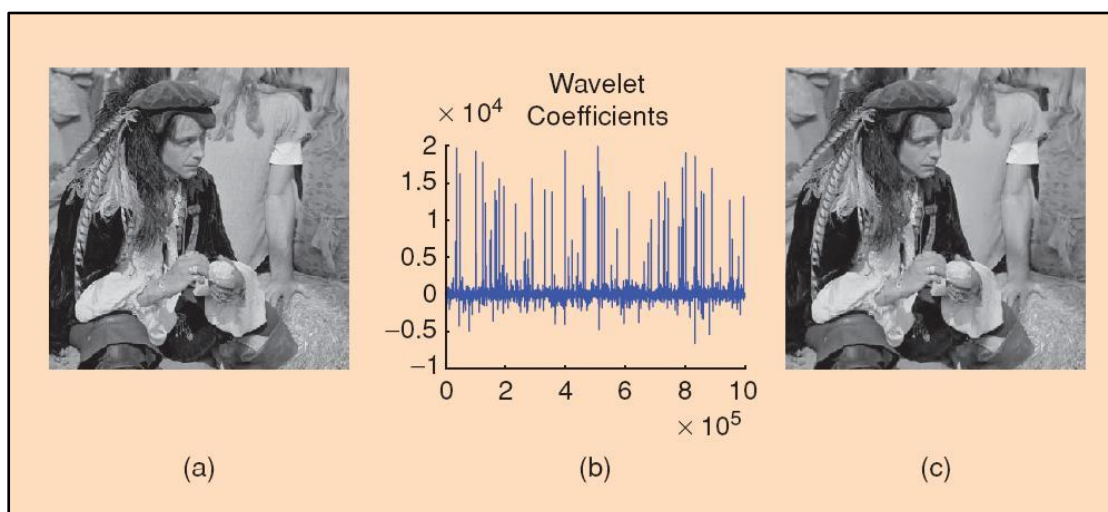
### 1.1.1 Εφαρμογές στην ψηφιακή επεξεργασία εικόνας.

Σύμφωνα με το θεώρημα Shannon-Nyquist για ένα σήμα με μέγιστη συχνότητα  $f$  για την ανακατασκευή του απαιτείται δειγματοληψία με συχνότητα  $2f$ . Στην ψηφιακή εικόνα το σήμα είναι η εικόνα και το δείγμα είναι το pixel, δηλαδή η ένταση του φωτός σε συνδυασμό με πληροφορία για το χρώμα για το συγκεκριμένο σημείο. Σύμφωνα λοιπόν με το θεώρημα δειγματοληψίας η ανάλυση της εικόνας είναι ανάλογη με το πλήθος των μετρήσεων. Έτσι εάν θέλουμε να διπλασιάσουμε την ανάλυση πρέπει να διπλασιάσουμε τον αριθμό των pixels. Όμως με τη συμπίεσμένη ανίχνευση (compressed sensing)

έχουμε ένα εντελώς διαφορετικό σκεπτικό. Πιο συγκεκριμένα η ανάλυση της εικόνας που μπορεί να επιτευχθεί εξαρτάται από το περιεχόμενο, την «ποσότητα» της πληροφορίας που περιέχει. Μία εικόνα με μικρή ποσότητα πληροφορίας μπορεί να ανακατασκευαστεί τέλεια από έναν μικρό αριθμό μετρήσεων, όταν λοιπόν έχει γίνει ο απαιτούμενος αριθμός μετρήσεων δεν υπάρχει περαιτέρω βελτίωση στο οπτικό αποτέλεσμα της ανακατασκευασμένης εικόνας από επιπλέον μετρήσεις. Στην πραγματικότητα κάθε εικόνα έχει μικρό περιεχόμενο πληροφορίας με την έννοια ότι ένας μικρός αριθμός διανυσμάτων βάσεως μπορεί να αποδώσει την εκάστοτε εικόνα. Μικρός αριθμός διανυσμάτων βάσεως σημαίνει μικρό πλήθος μη μηδενικών στοιχείων στη βάση  $\Psi$ , που αναφέρθηκε προηγουμένως. Μερικές γραμμές για παράδειγμα αρκούν για να δώσουν την εικόνα ενός προσώπου. Πιο συγκεκριμένα αν έχουμε ένα σήμα που αποτελείται από  $K$  συχνότητες με μεγαλύτερη συχνότητα  $N$ , σύμφωνα με το θεώρημα Shannon-Nyquist θα χρειάζονταν  $N$  τάξης αριθμό δειγμάτων που ισαπέχουν, αντίθετα στην συμπιεσμένη ανίχνευση αρκούν περίπου  $3K$  δείγματα, το μυστικό είναι ότι η δειγματοληψία πρέπει να μη γίνεται σε σταθερά χρονικά διαστήματα αλλά σε τυχαία. Στην τομογραφία MRI βρέθηκε ότι ακόμα και με μικρότερο ρυθμό δειγματοληψίας από τον Nyquist έχουμε καλά αποτελέσματα. Οι φωτογραφίες σύμφωνα με τη συμπίεση JPEG χαρακτηρίζονται σχεδόν πάντα ως αραιές, με βάση τη μετατροπή τους σε wavelets. Πιο συγκεκριμένα εάν το σήμα μας είναι το  $x$  και  $y$  είναι ένα δείγμα αυτού, τότε θα έχουμε ότι  $y = \Phi x$ . Υποθέτουμε ότι οι  $M$  δείγματα,  $M$  είναι λιγότερα από το μέγεθος του  $x$ , που είναι  $N$ , δηλαδή  $M < N$ . Ο πίνακας  $\Phi$  επομένως θα έχει διαστάσεις  $M \times N$ . Από τη γραμμική άλγεβρα γνωρίζουμε ότι θα υπάρχουν πολλά διανύσματα  $x^*$  τέτοια ώστε  $y = \Phi x^*$ , επειδή όμως  $M \geq 2K$ , όπου  $K$  είναι το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων του  $x$ , αυτά τα διανύσματα  $x$  που είναι λύσεις δεν θα είναι αραιά. Έτσι το  $x$  μπορεί θεωρητικά να ανακατασκευαστεί ακριβώς από  $M$  μετρήσεις. Αυτήν ακριβώς την διαδικασία εκτελούν και οι αλγόριθμοι που θα δούμε παρακάτω, επιχειρούν δηλαδή να προσεγγίσουν το  $x$  με τη διαφορά ότι προστίθεται και θόρυβος, οπότε έχουμε την εξίσωση  $y = \Phi x + n$ . Η προσέγγιση που γίνεται φτάνει σε πολύ καλό σημείο. Η

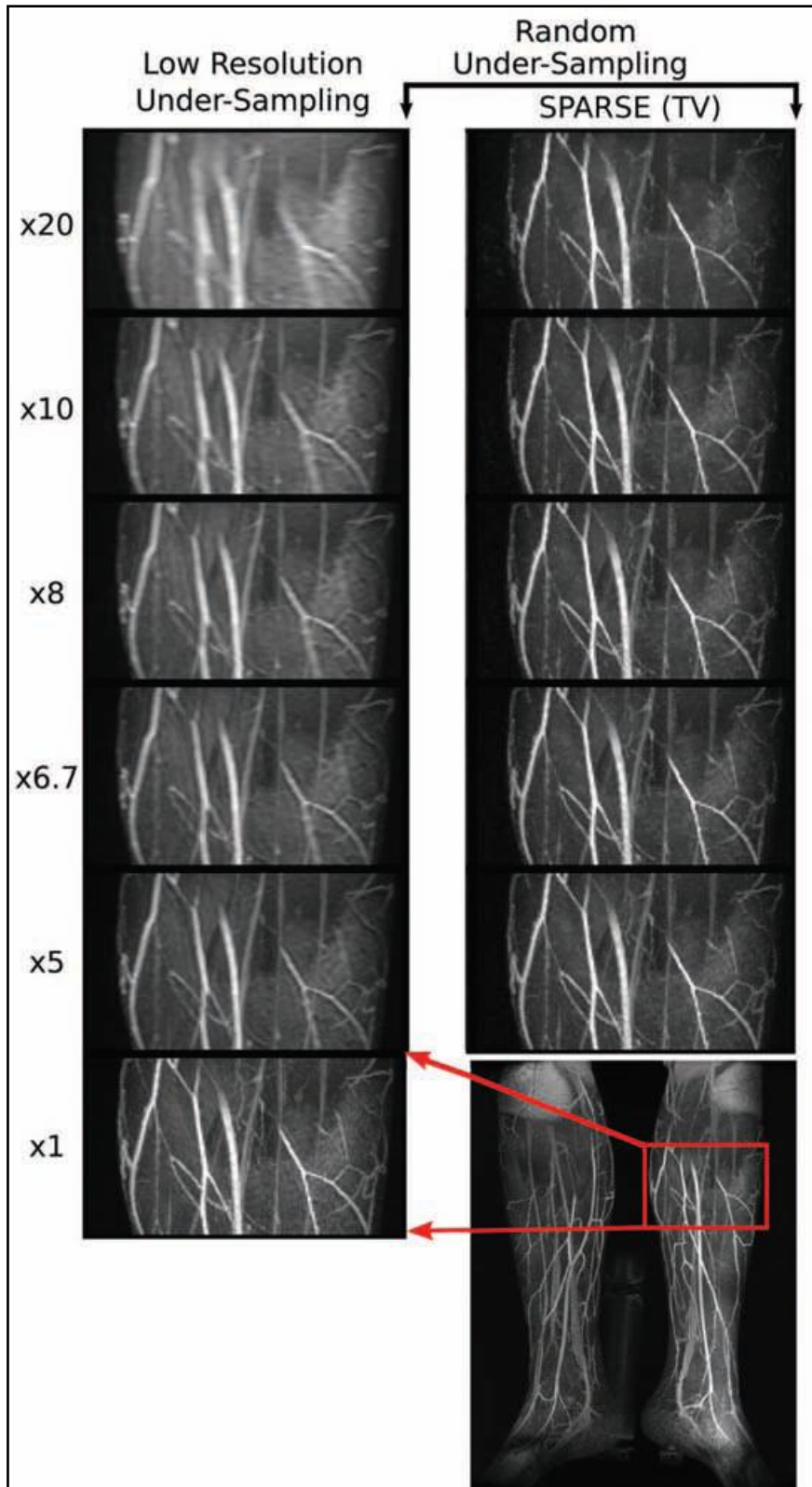


προσπάθεια επίλυσης της εξίσωσης  $y=\Phi x$ , βρίσκοντας όλα τα διανύσματα  $x$  που την ικανοποιούν, αραιά και μη, είναι χρονοβόρα και δεν είναι αποδοτική οπότε στους αλγορίθμους που θα εξετάσουμε ακολουθούνται διαφορετικές τεχνικές από αυτό το σκεπτικό.



**Εικόνα 1:** a) Αρχική εικόνα που έχει ανάλυση της τάξης του megarixel με τιμές rixel από 0-255. b) ο μετασχηματισμός της εικόνας σε συντελεστές wavelets, λίγοι συντελεστές wavelet συγκεντρώνουν το μεγαλύτερο μέρος της ενέργειας του σήματος, πολλές από αυτές τις εικόνες επιδέχονται μεγάλη συμπίεση c) Η ανακατασκευή της εικόνας έγινε μηδενίζοντας όλους τους συντελεστές wavelet εκτός από τους 25000 μεγαλύτερους. Η διαφορά από την αρχική εικόνα δύσκολα διακρίνεται. Η εικόνα αυτή ανακατασκευάστηκε τέλεια μόνο με 96000 ανεξάρτητες μετρήσεις.

Η συμπιεσμένη ανίχνευση (compressed sensing) μπορεί να βρει πολλές εφαρμογές στην βιοϊατρική. Για παράδειγμα οι τομογράφοι MRI περιορίζονταν σε στατικές εικόνες, ενώ ο ασθενής υποχρεούνταν να κρατήσει την αναπνοή του για κάποιο διάστημα. Αντιμετωπίζοντας την εικόνα ως sparse σήμα, δεν ισχύουν πλέον αυτοί οι περιορισμοί και μπορούμε να έχουμε εικόνες για παράδειγμα από την καρδιά του ασθενούς που χτυπάει. Παρακάτω φαίνονται εικόνες από ένα αγγειογράφημα με μικρή δειγματοληψία.



**Εικόνα 2:** Ένα αγγειογράφημα. Από κάτω προς τα πάνω το αγγειογράφημα υποδειματοληπτείται. Με την δειγματοληψία Shannon-Nyquist η εικόνα αλλοιώνεται καθώς ο παράγοντας υποδειματοληψίας αυξάνεται. Με την compressed sensing

δειγματοληψία η εικόνα παραμένει διαυγής ακόμα και μετά από 20 φορές μικρότερη δειγματοληψία.

### 1.1.2 Άλλες εφαρμογές της συμπίεσμνης ανίχνευσης

**Συμπίεση δεδομένων.** Σε κάποιες περιπτώσεις η αραιή βάση  $\Psi$  μπορεί να είναι άγνωστη στον κωδικοποιητή ή δεν είναι πρακτικό να εφαρμοστεί στη συμπίεση δεδομένων. Ωστόσο η τυχαία δειγματοληψία (δειγματοληψία που γίνεται σε τυχαία και όχι σταθερά χρονικά διαστήματα) μπορεί να θεωρηθεί μία καθολική στρατηγική κωδικοποίησης, καθώς δε χρειάζεται να σχεδιαστεί με βάση την αραιή βάση  $\Psi$ . Η γνώση και η ικανότητα να εφαρμοστεί το  $\Psi$  χρειάζονται μόνο στην αποκωδικοποίηση και στην ανάκτηση του αρχικού σήματος. Αυτή η καθολικότητα μπορεί να είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στην κατανομημένη κωδικοποίηση πηγής (Distributed Source Coding) με πολλαπλά σήματα, όπως σε δίκτυα αισθητήρων [8]. Η DSC αναφέρεται στην συμπίεση πολλαπλών συσχετισμένων πηγών πληροφορίας, που δεν επικοινωνούν μεταξύ τους, με αποτέλεσμα η υπολογιστική πολυπλοκότητα να μεταφέρεται από τον κωδικοποιητή στον αποκωδικοποιητή [9].

**Κωδικοποίηση καναλιού.** Οι αρχές της συμπίεσμνης ανίχνευσης, μπορούν να βρουν εφαρμογή στη σχεδίαση κωδίκων ταχείας διόρθωσης σφαλμάτων, επιπλέον των υπαρχόντων για την προστασία λαθών κατά την μετάδοση.

**Αντίστροφα προβλήματα.** Σε πολλές περιπτώσεις ο μοναδικός τρόπος για να ανακτήσουμε το αρχικό σήμα  $x$  είναι να χρησιμοποιήσουμε ένα σύστημα μέτρησης  $\Phi$ . Ωστόσο υποθέτοντας ότι υπάρχει μία αραιή βάση  $\Psi$  για το σήμα  $x$  που δεν σχετίζεται με το  $\Phi$ , τότε είναι δυνατή η αποτελεσματική δειγματοληψία.

**Απόκτηση δεδομένων (Data Acquisition).** Σε ορισμένες περιπτώσεις η συλλογή η διακριτών χρονικά δειγμάτων ενός αναλογικού σήματος, μπορεί να είναι δύσκολο να επιτευχθεί. Θα ήταν λοιπόν χρήσιμο να σχεδιαστούν συσκευές δειγματοληψίας, οι οποίες απευθείας καταγράφουν διακριτά, μικρού ρυθμού incoherent μετρήσεις του αναλογικού σήματος.

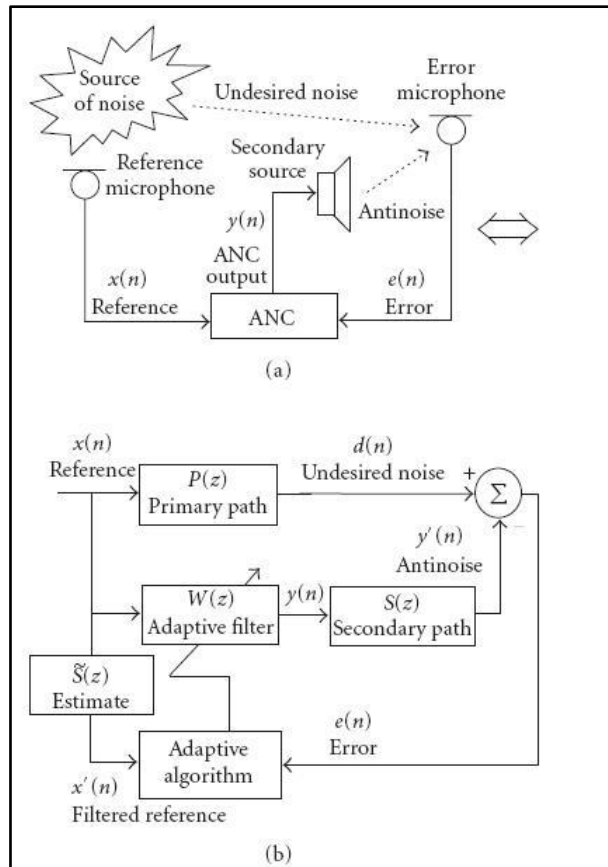
Άλλες εφαρμογές της συμπίεσμνης ανίχνευσης έχουμε στην **αναλογική σε ψηφιακή μετατροπή (D/A)** στις ασύρματες τηλεπικοινωνίες. Παράδειγμα στη CDMA κωδικοποίηση η φωνή, που περιορίζεται μέχρι τη συχνότητα των 4096 Herz, απλώνεται σε ένα φάσμα που περιλαμβάνει εκατοντάδες ή χιλιάδες Herz. Το σήμα αυτό είναι αραιό γιατί περιλαμβάνει μόνο την πληροφορία που ήταν μέσα στο διάστημα

0-4096 Herz. Επομένως ένας compressed sensing δέκτης θα είναι πιο αποδοτικός και πιο γρήγορος από έναν άλλον που βασίζεται στο θεώρημα Shannon-Nyquist.

Τα αραιά συστήματα βρίσκουν πολλές εφαρμογές στην ψηφιακή επεξεργασία σήματος [4] και στις τηλεπικοινωνίες [5]-[7]. Για παράδειγμα στην υψηλής ευκρίνειας τηλεόραση, τα τμήματα της ηχούς που είναι σημαντικά σχηματίζουν μια ομάδα, ενώ ο χρόνος μεταξύ των αφίξεων αυτών των ομάδων μπορεί να είναι πολύ μεγάλος [5]. Στα ασύρματα κανάλια πολλαπλών διαδρομών υπάρχει ένας σχετικά μικρός αριθμός τέτοιων ομάδων από σημαντικές διαδρομές [6]. Τέλος στα υποβρύχια ακουστικά κανάλια παρουσιάζονται μεγάλες χρονικές καθυστερήσεις από τις πολλαπλές διαδρομές εξαιτίας των ανακλάσεων του ήχου στην επιφάνεια της θάλασσας και του εδάφους [7].

Ώθηση στην ανάπτυξη αλγορίθμων για την αναγνώριση αραιών συστημάτων στις τηλεπικοινωνίες έδωσε η ανάγκη για **ακύρωση της ηχούς** στα δίκτυα τηλεφωνίας πακέτων (VOIP). Η αυξημένη δημοτικότητα της τηλεφωνίας με πακέτα οδήγησε στην ανάγκη για ενοποίηση παλαιότερων αναλογικών συστημάτων με δίκτυα IP ή ATM [3], [10]. Πιο συγκεκριμένα η κρουστική απόκριση της ηχούς, που έχει μία διάρκεια περίπου 64-128msec, εμφανίζει μια ενεργό περιοχή με διάρκεια 8-12 msec και επομένως η κρουστική απόκριση καταλαμβάνεται από περιοχές με μηδενικό ή πολύ μικρό πλάτος, πράγμα που την χαρακτηρίζει ως αραιή. Αυτές οι ανενεργές περιοχές δημιουργούνται από μεγάλες καθυστερήσεις εξαιτίας της διάδοσης στο δίκτυο, της κωδικοποίησης και άλλων αιτιών [10].

Μια άλλη εφαρμογή των αλγορίθμων για την αναγνώριση αραιών συστημάτων χρησιμοποιείται για την **ελαχιστοποίηση του ακουστικού θορύβου με ενεργό τρόπο**. Οι παθητικές τεχνικές λειτουργούν πολύ καλά για ηχητικές συχνότητες άνω του 1 KHz. Για χαμηλότερες συχνότητες μπορούν να εφαρμοστούν ενεργές τεχνικές οι οποίες βασίζονται στην καταστροφική κυματική παρεμβολή, κατά την οποία δημιουργείται ένας «αντιθόρυβος» με το ίδιο πλάτος αλλά με την κατάλληλη φάση ώστε να ακυρώνεται ο θόρυβος από την κύρια πηγή του [11]. Παρόμοια, αλγόριθμοι για την αναγνώριση αραιών συστημάτων χρησιμοποιούνται για την ακύρωση της ακουστικής ηχούς σε τηλεδιασκέψεις [12].



**Εικόνα 3:** Σύστημα ελέγχου ενεργού θορύβου που χρησιμοποιεί τον προσαρμοστικό αλγόριθμο filtered x α) Φυσική τοπολογία των ηλεκτροακουστικών στοιχείων β)ισοδύναμο block διάγραμμα [12].

### 1.1.3 Βιβλιογραφία

- [1] An introduction to compressive sampling, E. J. Candès and M. B. Wakin, IEEE Signal Processing Magazine March 2008.
- [2] Compressed sensing makes every pixel counts, What's Happening in the Mathematical Sciences, Volume 7, American Mathematical Society, pages 114-127.
- [3] Adaptive Partial-Update and Sparse System Identification, K.Dogancay and P. A. Naylor, Hindawi Publishing Corporation, EURASIP Journal on Audio, Speech, and Music Processing, Volume 2007, Article ID 12046

- [4] From sparse solutions of systems of equations to sparse modeling of signals and images, A. Bruckstein, D. Donoho, and M. Elad, *SIAM Rev.*, vol. 51, no. 1, pp. 34–81, 2009.
- [5] Advanced television systems for terrestrial broadcasting: Some problems and some proposed solutions, W. Schreiber, *Proc. IEEE*, vol. 83, no. 6, pp. 958–981, 1995.
- [6] Compressed channel sensing, W. Bajwa, J. Haupt, G. Raz, and R. Nowak, in *Proc. IEEE CISS*, 2008, pp. 5–10.
- [7] Sparse equalization for real-time digital underwater acoustic communications, M. Kocic, D. Brady, and M. Stojanovic, in *Proc. IEEE OCEANS*, 1995, pp. 1417–1422.
- [8] Distributed compressed sensing, D. Baron, M.B. Wakin, M.F. Duarte, S. Sarvotham, and R.G. Baraniuk, 2005, Preprint.
- [9] [http://en.wikipedia.org/wiki/Distributed\\_source\\_coding](http://en.wikipedia.org/wiki/Distributed_source_coding)
- [10] A Low Delay and Fast Converging Improved Proportionate Algorithm for Sparse System Identification, A. H. Khong, P. A. Naylor and J. Benesty, Hindawi Publishing Corporation, *EURASIP Journal on Audio, Speech, and Music Processing*, Volume 2007, Article ID 84376.
- [11] Step Size Bound of the Sequential Partial Update LMS Algorithm with Periodic Input Signals, P. Ramos, R. Torrubia, Ana L ´ opez, Ana Salinas and E. Masgrau, Hindawi Publishing Corporation, *EURASIP Journal on Audio, Speech, and Music Processing*, Volume 2007, Article ID 10231.
- [12] Detection-Guided Fast Affine Projection Channel Estimator for Speech Applications, Y. Jennifer, J. Homer, G. Rombouts and M. Moonen, Hindawi Publishing Corporation, *EURASIP Journal on Audio, Speech, and Music Processing*, Volume 2007, Article ID 71495.

## 2. Περιγραφή του προβλήματος που θα επιλυθεί από τους αλγορίθμους

Έστω ο ευκλείδειος χώρος  $\mathbb{R}^L$  με διάσταση  $L \in \mathbb{Z}_{>0}$ , δηλαδή το  $L$  είναι θετικός ακέραιος αριθμός. Το μέτρο θα συμβολίζεται με:  $\|*\|$ . Ο συμβολισμός  $(*)^T$  συμβολίζει τον ανάστροφο του πίνακα ή του διανύσματος που βρίσκεται εντός της παρένθεσης. Το μέτρο  $l_1$  ( $l_1$  norm) ενός διανύσματος  $h=[h_1, \dots, h_L]^T \in \mathbb{R}^L$  ορίζεται ως η ποσότητα  $\|h\|_{l_1} = \sum_{i=1}^L |h_i|$ . Η support του διανύσματος  $h$  ορίζεται ως εξής  $\text{supp}(h) = \{i \in \{1, \dots, L\} : h_i \neq 0\}$ , δηλαδή το  $i$  παίρνει εκείνες τις τιμές από 1 μέχρι  $L$ , όπου ισχύει ότι  $h_i \neq 0$ . Η  $l_0$  norm είναι ο αριθμός στοιχείων του συνόλου  $\text{supp}(h)$  δηλαδή  $\|h\|_{l_0} = \#\text{supp}(h)$ , έτσι για παράδειγμα αν το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων του  $h$  είναι  $S$  τότε ισχύει ότι  $\|h\|_{l_0} = S$ .

Γενικά το πρόβλημα είναι να προσεγγιστεί το αραιό διάνυσμα  $h^*$  από μετρήσεις που υπακούουν στην ακόλουθη γραμμική εξίσωση:

$$y_n = x_n^T h_* + u_n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \quad (1)$$

Όπου  $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \subset \mathbb{R}$ ,  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \subset \mathbb{R}^L$  είναι τα διανύσματα εισόδου και περιλαμβάνονται στις μετρήσεις τέλος  $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \subset \mathbb{R}$  είναι η διαδικασία θορύβου. Επιπλέον το διάνυσμα  $h^*$  είναι  $S$ -sparse δηλαδή έχει μόνο  $S$  μη μηδενικούς όρους, και το  $S$  είναι κατά πολύ μικρότερο του  $L$  δηλαδή  $\|h\|_{l_0} = S \ll L$

Για ένα πεπερασμένο αριθμό μετρήσεων  $N$  το προηγούμενο μοντέλο μπορεί να γραφτεί πιο συμπυκνωμένα στον ακόλουθο τύπο που περιλαμβάνει διανύσματα και πίνακες.

$$y = Xh_* + u \quad (2)$$

Όπου  $X \in \mathbb{R}^{N \times L}$  είναι ο πίνακας εισόδου,  $y=[y_1, y_2, \dots, y_N]^T$  και  $u=[u_1, u_2, \dots, u_N]^T$

Στις δοκιμές που ακολουθούν ο σκοπός είναι να προσεγγιστεί το άγνωστο διάνυσμα  $h^*$ , με βάση ένα σύνολο μετρήσεων (training data), δηλαδή έχοντας ως δεδομένα σύνολα από  $y$  και  $X$ .

## 2.1 Βιβλιογραφία

- [1] Online Sparse System Identification and Signal Reconstruction Using Projections Onto Weighted  $l_1$  Balls, Y. Kopsinis, K.Slavakis, and S. Theodoridis, IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 59, no. 3, march 2011

## 3. Αλγόριθμος Hero LMS (Least Mean Square)

### 3.1 Εισαγωγή

Ο αλγόριθμος Hero LMS (Least Mean Square) δημιουργήθηκε από τους Widrow και Hoff [2] και είναι μια διαδεδομένη μέθοδος για προσαρμοστική ταυτοποίηση συστημάτων. Οι εφαρμογές του αλγορίθμου περιλαμβάνουν την ακύρωση της ηχούς, την ταυτοποίηση καναλιών, την ακύρωση της παρεμβολής κ.α. Στα περισσότερα σενάρια η κρουστική απόκριση αγνώστων συστημάτων μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι αραιή, δηλαδή περιέχει μόνο λίγους σημαντικούς συντελεστές, ενώ οι περισσότεροι είναι αμελητέοι. Χρησιμοποιώντας εκ των προτέρων την πληροφορία της αραιότητας (sparsity) μπορεί να βελτιωθεί η απόδοση φιλτραρίσματος.

LASSO algorithm [3] (Least Absolute Shrinkage and Selection Operator). Αλγόριθμος τελεστή απόλυτης σμίκρυνσης και επιλογής. Με δεδομένο ένα σύνολο από μετρήσεις  $x_1, x_2, \dots, x_p$  και μία μέτρηση εξόδου  $y$ , ο LASSO προσαρμόζει ένα γραμμικό μοντέλο:  $y_{\text{hat}} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_p x_p$ . Το κριτήριο που χρησιμοποιείται είναι: Ελαχιστοποίηση του αθροίσματος  $(y - y_{\text{hat}})^2$  με δεδομένο ότι το άθροισμα των απολύτων τιμών  $b_j$  είναι μικρότερο ή ίσο από μία σταθερά  $s$ .

Με βάση τον LASSO [4] και την πρόσφατη πρόοδο στη συμπιεσμένη ανίχνευση (compressed sensing) [5,6,7] προτείνεται μια εναλλακτική προσέγγιση στην αναγνώριση αραιών συστημάτων χρησιμοποιώντας LMS φίλτρα. Η βασική ιδέα είναι να εισαχθεί μία ποινή που ευνοεί την αραιότητα στην μεταβλητή κόστους. Πρώτα ενσωματώνεται μία ποινή μέτρου  $l_1$  στους συντελεστές μέσα στην τετραγωνική συνάρτηση κόστους στον απλούστερο αλγόριθμο Hero LMS. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα μια τροποποιημένη ανανέωση LMS, που πλησιάζει στο μηδέν τους μη σημαντικούς συντελεστές και ονομάζεται ZA-LMS (Zero-Attracting LMS). Ο ZA-LMS επιτυγχάνει καλύτερη απόδοση μόνιμης



κατάστασης από τον απλό LMS. Με τον όρο μόνιμη κατάσταση εννοούμε ότι, μετά από κάποιον αριθμό επαναλήψεων του αλγορίθμου έχει επιτευχθεί η μέγιστη ακρίβεια στην προσέγγιση του αραιού διανύσματος και δεν υπάρχει περαιτέρω βελτίωση. Για επιπλέον βελτίωση της απόδοσης φιλτραρίσματος χρησιμοποιείται ο RZA-LMS (Reweighted Zero-Attracting), ο οποίος χρησιμοποιεί επαναπροσδιορισμένα βήματα και επιλεκτική προσέγγιση στο μηδέν για διαφορετικούς μη σημαντικούς συντελεστές και όχι ομοιόμορφη.

### 3.2 Hero LMS Algorithm (LMS)

Έστω  $y(n)$  είναι ένα δείγμα από το παρατηρούμενο σήμα εξόδου.

$$y(n) = w^T x(n) + u(n) \quad (3)$$

Όπου  $w$  ή  $h_*$  (βλ εξίσωση (1),(2)) είναι το αραιό διάνυσμα με διαστάσεις  $N \times 1$ ,  $w^T$  είναι ο ανάστροφος πίνακας του  $w$  που συνεπώς θα έχει διαστάσεις  $1 \times N$  το διάνυσμα  $x(n)$  είναι η είσοδος του αλγορίθμου που έχει διαστάσεις  $N \times 1$  στα πειράματα που έγιναν αυτό το διάνυσμα περιλαμβάνει μόνο τα στοιχεία +1 και -1 (2-PAM). Το  $u(n)$  είναι ένας αριθμός ( $1 \times 1$ ) που αποτελεί το λευκό προσθετικό γκαουσιανό θόρυβο. Η μεταβλητή  $n$  είναι ο αριθμός της επανάληψης. Επομένως το  $y(n)$  προκύπτει ότι είναι ένας αριθμός, γιατί ισχύει ότι:

$$w^T x(n) + u(n) = y(n) \quad (4)$$

Το  $e(n)$  ορίζεται ως εξής:

$$e(n) = y(n) - w^T x(n) \quad (5)$$

Η συνάρτηση κόστους  $Lc(n)$  ορίζεται ως εξής:

$$Lc(n) = \frac{1}{2} e^2(n) \quad (6)$$

Τελικά ο αναδρομικός τύπος για την ενημέρωση της προσέγγισης του αραιού διανύσματος είναι:

$$w(n+1) = w(n) - \mu \frac{dLc(n)}{dw(n)} \quad (7)$$

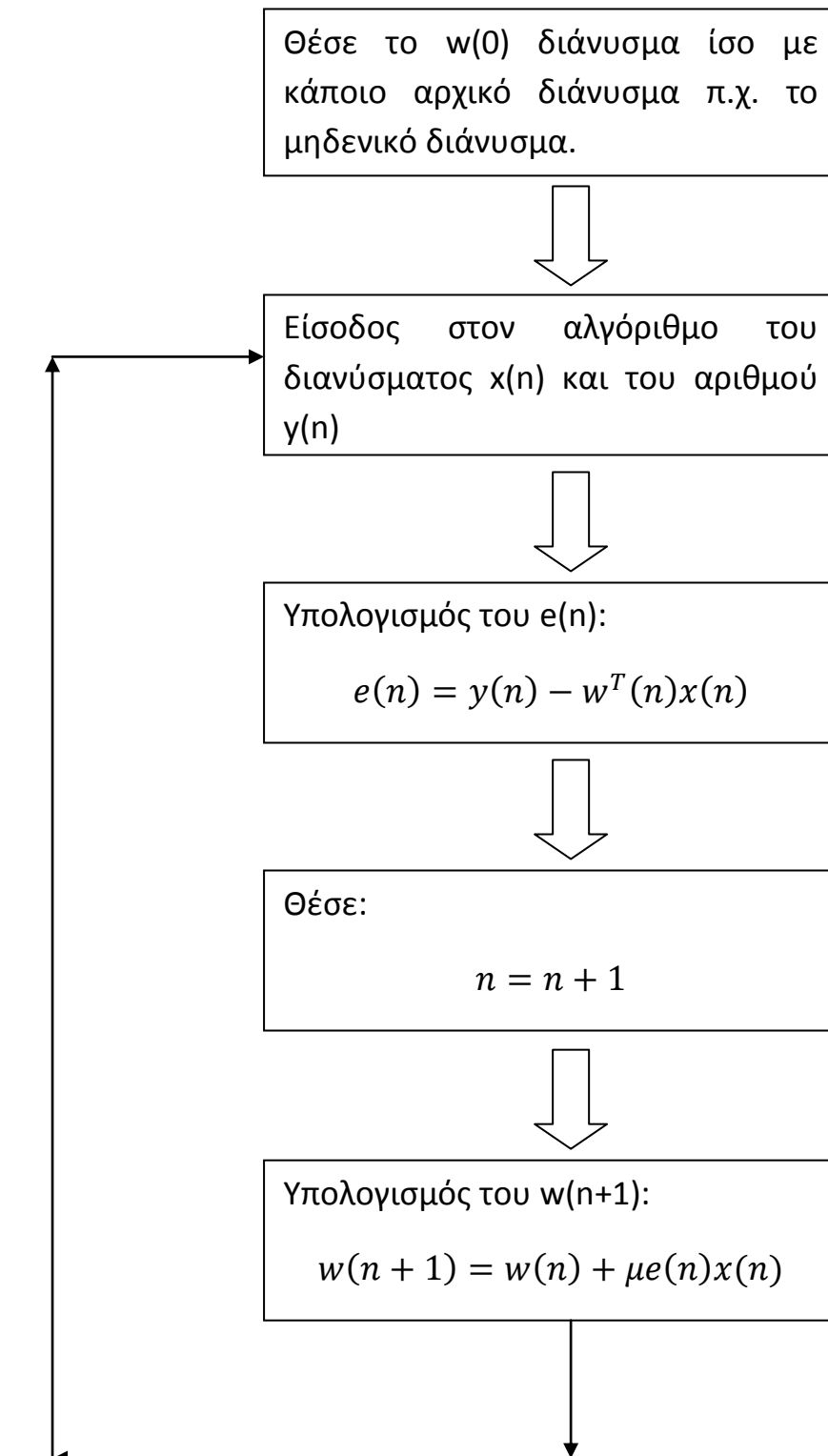
Και τελικά:

$$w(n+1) = w(n) + \mu e(n)x(n) \quad (8)$$

Όπου  $\mu$  μία σταθερά.

Συμπερασματικά για τον αλγόριθμο Hero LMS προκύπτει το παρακάτω block διάγραμμα:

$n$  είναι το πλήθος των επαναλήψεων που θα εκτελεστούν



**Εικόνα 4:** Block διάγραμμα για τον αλγόριθμο Hero LMS.

### 3.3 Zero-Attracting Hero LMS Algorithm (ZA-LMS)

Στον αλγόριθμο ZA-LMS χρησιμοποιείται μία διαφορετική μεταβλητή κόστους η  $Lc_1$ :

$$Lc_1(n) = \frac{1}{2} e^2(n) + \gamma \|w(n)\|_1 \quad (9)$$

Η ενημέρωση του αναδρομικού τύπου έχει ως εξής:

$$w(n+1) = w(n) - \mu \frac{dLc_1}{dw(n)} \quad (10)$$

$$w(n+1) = w(n) - \rho \operatorname{sgn}(w(n)) + \mu e(n)x(n) \quad (11)$$

Όπου  $\rho = \mu\gamma$  με  $\rho, \mu, \gamma$  σταθερές η συνάρτηση  $\operatorname{sgn}(x)$  ορίζεται ως εξής:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad (12)$$

Σε σύγκριση με τον απλό τύπο LMS ο ZA-LMS έχει έναν επιπλέον όρο τον:  $-\rho \operatorname{sgn}(w(n))$ , ο οποίος «προσελκύει» τις μη σημαντικές συνιστώσες του αραιού διανύσματος που προσεγγίζεται στο μηδέν και η «δύναμη» αυτού του επιπλέον όρου εξαρτάται από την τιμή του  $\rho$ . Έτσι η σύγκλιση με αυτόν τον όρο είναι γρηγορότερη.

### 3.4 Reweighted Zero-Attracting Hero LMS Algorithm (RZA-LMS)

Με τον επιπλέον όρο που προστέθηκε στον ZA-LMS περιορίζεται η απόδοση στο κέρδος MSE (Mean Square Error). Αυτό συμβαίνει επειδή η παράμετρος ελαχιστοποίησης που προστέθηκε στον αλγόριθμο ZA-LMS ( $-\rho \operatorname{sgn}(w(n))$ ) δεν κάνει διάκριση ανάμεσα σε σημαντικούς και σε ασήμαντους (κοντά στο μηδέν) συντελεστές του αραιού διανύσματος. Αποτέλεσμα είναι ότι, αφού όλοι οι συντελεστές ομοιόμορφα «πλησιάζουν» το μηδέν, η απόδοση του αλγορίθμου εκφυλίζεται για λιγότερο αραιά συστήματα. Με βάση την επαναστάθμιση (reweighting) στη συμπιεσμένη ανίχνευση (compressed sensing) [6], στον RZA-LMS η νέα συνάρτηση κόστους είναι:

$$Lc_2(n) = \frac{1}{2} e^2(n) + \gamma' \sum_{i=1}^N \log \left( 1 + \frac{|w_i|}{\varepsilon'} \right) \quad (13)$$

Τελικά ο νέος αναδρομικός τύπος για την προσέγγιση του αραιού διανύσματος γίνεται:

$$w(n+1) = w(n) - \rho \frac{\text{sgn}(w(n))}{1+\varepsilon|w(n)|} + \mu e(n)x(n) \quad (14)$$

Όπου  $\rho = \mu\gamma'/\varepsilon'$  και  $\varepsilon = 1/\varepsilon'$ : σταθερές.

Ο αλγόριθμος RZA-LMS επιλεκτικά συρρικνώνει συντελεστές του αραιού διανύσματος με μικρότερο πλάτος, μικρότερη απόλυτη τιμή. Ο RZA-LMS επηρεάζει μόνο εκείνους τους συντελεστές των οποίων τα πλάτη είναι συγκρίσιμα με το  $1/\varepsilon$ . Επίσης υπάρχει μία μικρή μείωση σε εκείνους τους συντελεστές όπου ισχύει  $|w_i(n)| \gg 1/\varepsilon$

### 3.5 Βιβλιογραφία

- [1] Sparse LMS for System Identification, Y. Chen, Y. Gu, A. O. Hero, ©2009 IEEE
- [2] Adaptive Signal Processing, B. Widrow and S. D. Stearns, New Jersey: Prentice Hall, 1985.
- [3] <http://www-stat.stanford.edu/~tibs/lasso/simple.html>
- [4] Regression shrinkage and selection via the lasso, R. Tibshirani, J. Royal. Statist. Soc B., vol. 58, pp. 267–288, 1996.
- [5] Compressive sampling, E. Candes, Int. Congress Math., vol. 3, pp. 1433–1452, 2006.
- [6] Enhancing sparsity by reweighted l1 minimization, E. J. Candes, M. Wakin, and S. Boyd, To appear in J. Fourier Anal. Appl.
- [7] Compressive sensing, R. Baraniuk, IEEE Signal Process. Mag., vol. 25, pp. 21–30, Mar. 2007.

## 4. Αλγόριθμος SPADOMP (Sparse Adaptive Orthogonal Matching Pursuit)

Οι κύριες αλγοριθμικές προσεγγίσεις στη συμπιεσμένη ανίχνευση (compressed sensing) είναι η ελαχιστοποίηση  $l_1$  (βασική επιδίωξη, basis pursuit) και οι άπληστοι αλγόριθμοι (ταιριασμένη επιδίωξη, matching pursuit). Στην πρώτη περίπτωση αυτές οι μέθοδοι λύνουν ένα κυρτό (convex) πρόβλημα ελαχιστοποίησης, που αντικαθιστά το  $l_0$  μέτρο με το  $l_1$ . Το κυρτό (convex) πρόβλημα ελαχιστοποίησης μπορεί να επιλυθεί χρησιμοποιώντας γραμμικές τεχνικές προγραμματισμού και η εκτέλεση γίνεται σε πολυωνυμικό χρόνο [2]. Οι άπληστοι αλγόριθμοι από την άλλη επαναληπτικά υπολογίζουν το σύνολο υποστήριξης του σήματος και σχηματίζουν μια προσέγγιση αυτού, μέχρι μια συνθήκη να σταματήσει την προσέγγιση [3],[4],[5]-[8]. Η κάθε μία από αυτές τις τεχνικές έχει τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματά της. Η  $l_1$  ελαχιστοποίηση παρέχει θεωρητικά εγγύηση επίδοσης, αλλά μειονεκτεί σε ταχύτητα με τους άπληστους αλγορίθμους. Πρόσφατα ανεπτυγμένοι άπληστοι αλγόριθμοι, όπως αυτοί που αναπτύχθηκαν στις αναφορές [3], [4] και [7], εξασφαλίζουν τις ίδιες εγγυήσεις με τους  $l_1$  αλλά με μικρότερο υπολογιστικό κόστος και μικρότερη απαίτηση σε αποθήκευση. Ο αλγόριθμος SPADOMP έχει γραμμική πολυπλοκότητα βασίζεται σε υπάρχοντες άπληστους αλγορίθμους [3], [4] και παρέχει ευνοϊκότερη απόδοση επίδοσης.

Όπως και στον αλγόριθμο LMS έχουμε ότι:

$$y(n) = \Phi^T(n)c + n(n) \quad (15)$$

Όπου  $\phi(n)$  ή  $X$  (βλ εξίσωση (2)) είναι τα δεδομένα εισόδου στον αλγόριθμο, μαζί με τα αποτελέσματα που θα προκύψουν από αυτά θα υπολογιστεί μια προσέγγιση για το αραιό διάνυσμα  $c$  ή  $h_*$  (βλ εξίσωση (1),(2)). Έτσι το  $\Phi(n)$  είναι ένας πίνακας με διαστάσεις  $N \times n$  αποτελείται από τα στοιχεία +1 και -1.  $n$  είναι ο αριθμός της επανάληψης και  $N$  είναι η διάσταση του αραιού (sparse) διανύσματος  $c$ .  $n(n)$  ή  $u(n)$  ή  $u$  (βλ εξίσωση (1),(2)), είναι ο λευκός γκαουσιανός προσθετικός θόρυβος. Το αραιό διάνυσμα  $c$  έχει διαστάσεις  $N \times 1$ . Με  $n$  συμβολίζεται ο αριθμός της επανάληψης και  $s$  είναι το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων του αραιού διανύσματος. Ο συμβολισμός  $( )^T$  σημαίνει ότι παίρνουμε τον ανάστροφο του πίνακα που βρίσκεται εντός της παρένθεσης.

Τελικά ο αλγόριθμος SPADOMP περιγράφεται παρακάτω:

**Αρχή επανάληψης για  $n$  από 1 μέχρι τον επιθυμητό αριθμό επαναλήψεων**

**Βήμα 1:** υπολογίζεται το προxy σήμα:

$$p(n) = \lambda p(n-1) + \Phi^*(n-1)u(n-1) \quad (16)$$

**Βήμα 2:** Υπολογίζεται το σύνολο  $\Omega$ , δηλαδή οι θέσεις που βρίσκονται τα  $2s$  μεγαλύτερα, κατ' απόλυτη τιμή, στοιχεία του διανύσματος  $p(n)$

$$\Omega = \text{supp}(p_{2s}(n)) \quad (17)$$

Στον αλγόριθμο που υλοποιήθηκε το σύνολο  $\Omega$  είναι ένα διάνυσμα ιδίου μήκους με το sparse διάνυσμα, που προσεγγίζεται, έστω  $B$  δηλαδή είναι  $N \times 1$  και αποτελείται από τα στοιχεία 0 και 1. Ο αριθμός 1 τοποθετείται στις θέσεις του διανύσματος που υπάρχουν τα  $2s$  μεγαλύτερα στοιχεία (σε απόλυτη τιμή) του διανύσματος  $p$ . Επομένως το διάνυσμα που αντιστοιχεί στο σύνολο  $\Omega$  θα έχει  $2s$  στοιχεία ίσα με ένα και  $N-2s$  στοιχεία ίσα με μηδέν.

**Βήμα 3:** Δημιουργείται το σύνολο  $\Lambda$  από την ένωση του  $\Omega$  με εκείνο το σύνολο που περιλαμβάνει τις θέσεις των μη μηδενικών στοιχείων του διανύσματος  $c(n-1)$

$$\Lambda = \Omega \cup \text{supp}(c(n-1)) \quad (18)$$

Το σύνολο  $\Lambda$  είναι πάλι ένα διάνυσμα διάστασης  $N$  και περιλαμβάνει πάλι μόνο τα στοιχεία μηδέν και ένα. Πρώτα υπολογίζεται το σύνολο  $\text{supp}(c(n-1))$ , το οποίο είναι ένα διάνυσμα, έστω  $A$ , διάστασης  $N$  το οποίο στις ίδιες θέσεις με τα μη μηδενικά στοιχεία του  $c(n-1)$  έχει την τιμή 1 και την τιμή μηδέν για τα μηδενικά στοιχεία του  $c(n-1)$ . Από την ένωση των δύο συνόλων δηλαδή του  $A$  με το  $B$  (βήμα 2), προκύπτει ένα νέο διάνυσμα  $\Gamma$ , με διάσταση  $N$  με στοιχεία 0 και 1. Γίνεται δηλαδή ο εξής έλεγχος: για  $i$  από 1 μέχρι  $N$  αν  $A(i)=1$  ή  $B(i)=1$  τότε  $\Gamma(i)=1$  αλλιώς  $\Gamma(i)=0$ .

**Βήμα 4:** Υπολογίζεται η πρόβλεψη του λάθους  $\varepsilon(n)$ . Ο συμβολισμός  $|\Lambda$  δείχνει ότι στο αντίστοιχο διάνυσμα χρησιμοποιούνται μόνο εκείνα τα στοιχεία που βρίσκονται στις θέσεις που υπαγορεύει το σύνολο  $\Lambda$ .

$$\varepsilon(n) = y(n) - \Phi_{|\Lambda}^T(n)w_{|\Lambda}(n-1) \quad (19)$$

**Βήμα 5:** Υπολογίζεται το διάνυσμα  $w(n)$  από την επανάληψη LMS

$$w_{|\Lambda}(n) = w_{|\Lambda}(n-1) + \mu\Phi_{|\Lambda}^*(n)\varepsilon(n) \quad (20)$$

Ο συμβολισμός \* συμβολίζει τον μιγαδικό συζυγή.

**Βήμα 6:** Δημιουργείται το σύνολο  $\Lambda_s$ . Το σύνολο αυτό περιλαμβάνει τα  $s$  μεγαλύτερα κατ' απόλυτη τιμή στοιχεία του διανύσματος  $w_{|\Lambda}$

$$\Lambda_s = \max(|w_{|\Lambda}(n)|, s) \quad (21)$$

Και σε αυτή την περίπτωση το σύνολο  $\Lambda_s$  είναι ένα διάνυσμα διάστασης  $N$ , έστω  $\Delta$ . Στις θέσεις του  $w_{|\Lambda}(n)$  που υπάρχουν τα  $s$  μεγαλύτερα κατ' απόλυτη τιμή στοιχεία στις ίδιες θέσεις στο  $\Delta$  διάνυσμα τίθεται η τιμή 1, αλλιώς η τιμή 0, για τα υπόλοιπα  $N-s$  στοιχεία.

**Βήμα 7:** Ενημερώνεται το διάνυσμα  $c$  ως εξής στις θέσεις που υπαγορεύει το σύνολο  $\Lambda_s$  έχουμε  $c_{|\Lambda_s}(n) = w_{|\Lambda_s}(n)$  και στις υπόλοιπες θέσεις, δηλαδή στο συμπληρωματικό του  $\Lambda_s$ , τίθεται η τιμή 0 δηλαδή  $c_{|\Lambda_s}^c(n) = 0$

**Βήμα 8:** Ενημερώνεται το υπολειμματικό σφάλμα:

$$u(n) = y(n) - \Phi^T(n)c \quad (22)$$

**Τέλος επανάληψης**

## 4.1 Βιβλιογραφία

- [1] An Adaptive Greedy Algorithm With Application to Nonlinear Communications, G. Mileounis, B. Babadi, N. Kalouptsidis, and V. Tarokh, IEEE Transactions on Signal Processing, VOL. 58, NO. 6, June 2010
- [2] Atomic decomposition by basis pursuit, S. Chen, D. Donoho, and M. Saunders, SIAM J. Sci. Comput., vol. 20, no. 1, pp. 33–61, 1998.
- [3] CoSaMP: Iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples, D. Needell and J. Tropp, Appl. Comput. Harmon. Anal., vol. 26, pp. 301–321, 2009.
- [4] Subspace pursuit for compressive sensing signal reconstruction, W. Dai and O. Milenkovic, IEEE Trans. Inf. Theory, vol. 55, no. 5, pp. 2230–2249, 2009.
- [5] Orthogonal matching pursuit Recursive function approximation with applications to wavelet decomposition, Y. Pati, R. Rezaifar, and P. Krishnaprasad, in Proc. 27th Asilomar Conf. Signals, Syst., Comput., 1993, pp. 40–44.
- [6] Adaptive time-frequency decompositions ,S. Davis, G. M. Mallat, and Z. Zhang, SPIE J. Opt. Eng., vol. 33, no. 7, pp. 2183–2191, 1994.
- [7] Uniform uncertainty principle and signal recovery via regularized orthogonal matching pursuit, D. Needell and R. Vershynin, Found. Comput. Math., vol. 9, no. 3, pp. 317–334, 2009.
- [8] Sparse solution of underdetermined linear equations by Stagewise Orthogonal Matching Pursuit, D. L. Donoho, Y. Tsaig, I. Drori, and J.-L. Starck, Statistics Dept., Stanford Univ., Stanford, CA, Tech. Rep., 2006.



## 5. Αλγόριθμος SPAL (Sparse System Identification and Signal Reconstruction Using Projections Onto Weighted $l_1$ Balls)

### 5.1 Εισαγωγή

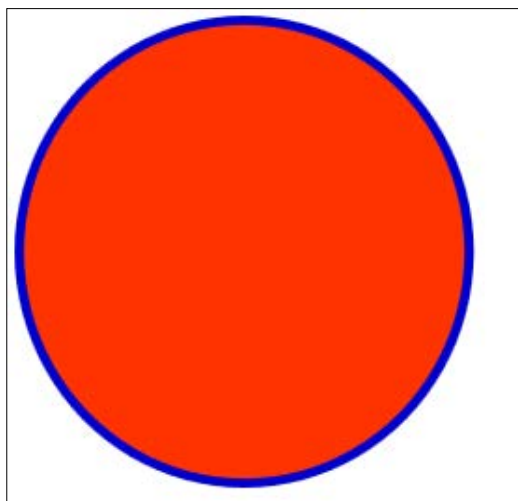
Παρακάτω δίνονται κάποιες βασικές έννοιες που χρησιμοποιούνται στον συγκεκριμένο αλγόριθμο.

Με δεδομένο ένα διάνυσμα  $w_n \in \mathbb{R}^L$  με θετικά στοιχεία, δηλαδή  $w_{n,i} > 0, \forall i \in \overline{1, L}$ , η **σταθμισμένη  $l_1$  ball (weighted  $l_1$  ball)** με ακτίνα  $\delta > 0$  ορίζεται [1] από την παρακάτω σχέση:

$$B_{l_1}[w_n, \delta] = \{h \in \mathbb{R}^L : \sum_{i=1}^L w_{n,i} |h_i| \leq \delta\} \quad (23)$$

Το  $h \in \mathbb{R}^L$  και ισχύει ο περιορισμός της παραπάνω σχέσης, δηλαδή υπάρχουν πολλά δυνατά  $h$  με αυτήν την ιδιότητα. Για περισσότερη ευελιξία, αφήνουμε το διάνυσμα βάρους  $w$  να εξαρτάται από την χρονική στιγμή  $n$ , αφού χρησιμοποιήθηκε ο συμβολισμός  $w_n$ . Η χρονική στιγμή  $n$  είναι στην ουσία ο αριθμός της επανάληψης που εκτελείται, αφού για να προσεγγίσουμε ικανοποιητικά ένα αραιό διάνυσμα χρειάζεται να εκτελεστεί ένα πλήθος επαναλήψεων του αλγορίθμου. Η μη σταθμισμένη  $l_1$  ball δεν είναι τίποτα άλλο παρά το  $B_{l_1}[\mathbf{1}, \delta]$ , όπου  $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^L$  και είναι ένα διάνυσμα που έχει την τιμή 1 σε κάθε συνιστώσα του. Όλα τα σημεία που βρίσκονται στη σταθμισμένη  $l_1$  norm σχηματίζουν ένα κλειστό κυρτό σύνολο (closed convex set).

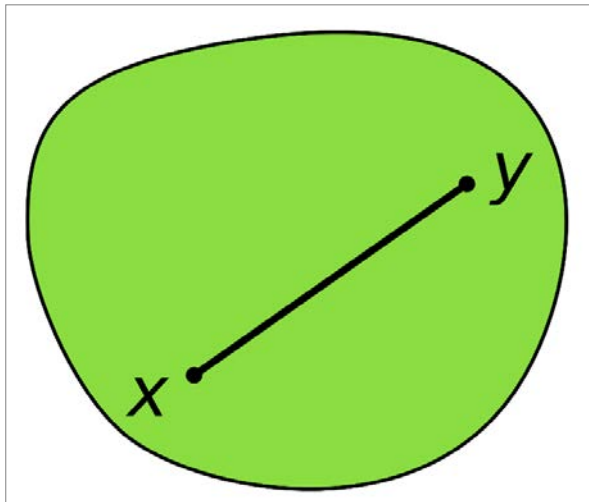
**Closed set (κλειστό σύνολο) [2]:** Ένα τοπολογικό σύνολο είναι κλειστό όταν συμπίπτει με τα σύνορά του, δηλαδή όταν περιλαμβάνει τα συνοριακά του σημεία. Παράδειγμα στον 2d χώρο:



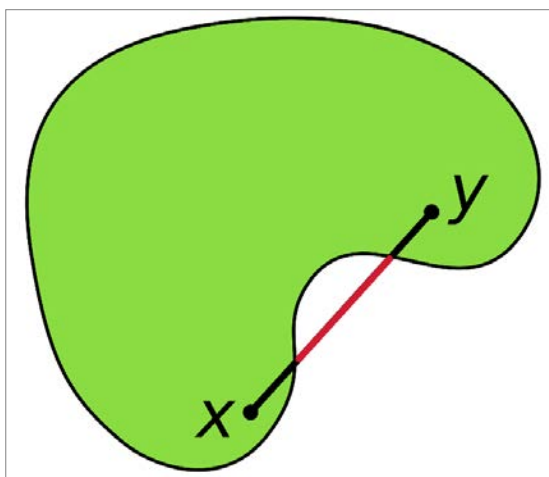
**Εικόνα 5:** Τα σημεία  $x$  και  $y$  που ικανοποιούν την εξίσωση  $x^2 + y^2 = r^2$  έχουν μπλε χρώμα. Τα σημεία που ικανοποιούν την εξίσωση  $x^2 + y^2 < r^2$  έχουν πορτοκαλί χρώμα. Το σύνολο των πορτοκαλί σημείων είναι ένα ανοιχτό σύνολο, ενώ τα μπλε σημεία είναι ένα κλειστό σύνολο. Η ένωση των πορτοκαλί και των μπλε

σημείων είναι ένα κλειστό σύνολο (closed set).

**Convex set (κυρτό σύνολο) [3]:** Είναι ένα σύνολο π.χ.  $A$  στο οποίο για κάθε ζεύγος σημείων  $(x_1, x_2)$  που ανήκουν στο  $A$  ισχύει ότι το σύνολο των σημείων της ευθείας που ενώνει τα σημεία  $(x_1, x_2)$  ανήκουν και αυτά στο  $A$ .



**Εικόνα 6:** Παράδειγμα κυρτού συνόλου, όλα τα σημεία της ευθείας ανήκουν στο σύνολο.



**Εικόνα 7:** Παράδειγμα μη κυρτού συνόλου, κάποια σημεία της ευθείας δεν ανήκουν στο σύνολο.

Ο αλγόριθμος SPAL βασίζεται στις προβολές και εισάγει μία διαφορετική λογική σε σύγκριση με τους προηγούμενους αλγορίθμους. Αντί για ένα μοναδικό καλύτερο αποτέλεσμα, διερευνάται ένα σύνολο από σημεία που συμφωνούν με τις διαθέσιμες πληροφορίες και τους περιορισμούς (στη συγκεκριμένη περίπτωση ο περιορισμός είναι η  $l_1$  ball). Κάθε φορά λοιπόν που έχουμε ένα καινούργιο σύνολο μετρήσεων, δημιουργείται ένα κλειστό κυρτό (convex) σύνολο, που προσδιορίζει την περιοχή στο χώρο της λύσης και είναι σε συμφωνία με τη συγκεκριμένη μέτρηση. Για τις συγκεκριμένες εφαρμογές το σχήμα

αυτών των κυρτών (convex) set επιλέγεται να είναι hyperslab. Το πρόβλημα που προκύπτει είναι μία κυρτή (convex) διαδικασία με άπειρο αριθμό από convex set. Το θεμελιώδες εργαλείο των προβολών σε κλειστά convex sets δίνει λύση σε αυτό το εμπόδιο, ακολουθώντας την πρόοδο στους προσαρμοστικούς αλγόριθμους προβολής (adaptive projection algorithms) [4]-[6].

## 5.2 Θεωρητική προσέγγιση του αλγορίθμου

Σε αυτόν τον αλγόριθμο όπως έχει αναφερθεί χρησιμοποιείται μια διαφορετική προσέγγιση από τους LMS και SPADOMP. Αντί να επιχειρείται η ελαχιστοποίηση μιας συνάρτησης κόστους αναδρομικά, που έχει προσδιοριστεί από ολόκληρο το set παρατηρήσεων, ο στόχος είναι να βρεθεί ένα σύνολο από λύσεις που είναι σε συμφωνία με τις διαθέσιμες πληροφορίες και με τους διαθέσιμους περιορισμούς. Τα σύμβολα που χρησιμοποιούνται προέρχονται από τις εξισώσεις (1) και (2) στο κεφάλαιο της περιγραφής του προβλήματος καθώς και η επεξήγησή τους. Κάθε «χρονική» στιγμή  $n$  πρέπει η εκτίμηση  $h_n$  να ταιριάζει με ένα κατάλληλα καθορισμένο κλειστό κυρτό σύνολο (closed convex set), που είναι υποσύνολο του χώρου των λύσεων, και είναι γνωστό ως property set. Κάθε σημείο που ανήκει σε αυτό το set λέμε ότι βρίσκεται σε συμφωνία με το αντίστοιχο ζεύγος  $(x_n, y_n)$ . Το «σχήμα» του property set υπαγορεύεται από μία τοπική συνάρτηση απωλειών, που υποθέτουμε ότι είναι κυρτή. Στον συγκεκριμένο αλγόριθμο υιοθετήθηκε το ακόλουθο κριτήριο για το property set:

$$S_n[\varepsilon] = \{h \in \mathbb{R}^L: |h^T x_n - y_n| \leq \varepsilon\}, \quad n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \quad (24)$$

Το  $\varepsilon \geq 0$  είναι μια σταθερά που καθορίζεται από τον χρήστη. Η προηγούμενη εξίσωση προσδιορίζει αυτό που ονομάζεται hyperslab, που στην πραγματικότητα είναι ένα κλειστό κυρτό σύνολο (closed convex set). Κάθε σημείο που βρίσκεται εντός του hyperslab, και δημιουργείται την στιγμή  $n$ , είναι σε συμφωνία με τη μέτρηση της χρονικής στιγμής  $n$ . Η παράμετρος  $\varepsilon$  καθορίζει το πλάτος του hyperslab. Έχοντας συσχετίσει κάθε ζευγάρι μέτρησης με ένα hyperslab, ο στόχος μας τώρα γίνεται να βρεθεί ένα σημείο που ανήκει στο  $\mathbb{R}^L$  και βρίσκεται στον κοινό χώρο αυτών των hyperslab. Για να εκμεταλλευτούμε την ιδιότητα του αραιού διανύσματος, υιοθετούμε την ιδέα του σταθμισμένου  $l_1$  norm (weighted  $l_1$  norm).

Έχοντας προσδιορίσει τη σταθμισμένη  $l_1$  ball, που είναι ο περιορισμός που σχετίζεται με την ιδιότητα του αραιού (sparsity), στόχος τώρα γίνεται να βρεθεί ένα σημείο  $h$  στον χώρο  $\mathbb{R}^L$ , στον κοινό χώρο των hyperslabs και στην σταθμισμένη  $l_1$  μπάλα (ball), για κάποια  $z_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . Δηλαδή πρέπει να ισχύει η παρακάτω ιδιότητα:

$$\beta \text{ρες ένα } h \in \bigcap_{n \geq z_0} (S_n[\varepsilon] \cap B_{l_1}[w_n, \delta]) \quad (25)$$

Η ύπαρξη του  $z_0$  επιτρέπει σε ένα πεπερασμένο πλήθος από property sets να μην μοιράζονται κοινό χώρο με τα υπόλοιπα sets. Το  $z_0$  αναφέρεται παρακάτω στο κεφάλαιο «ιδιότητες σύγκλισης του αλγορίθμου».

### 5.3 Γενικό πλαίσιο του συγκεκριμένου αλγορίθμου

Η λύση στο πρόβλημα για την εύρεση ενός σημείου που βρίσκεται στον κοινό χώρο ενός πλήθους από closed convex sets χρησιμοποιεί την θεωρία των προβολών σε κυρτά σύνολα (POCS [7]-[10], Projections Onto Convex Sets). Ωστόσο σε αντίθεση με τη θεωρία POCS, όπου έχουμε ένα πεπερασμένο αριθμό από sets, η μεθοδολογία του αλγορίθμου έχει να κάνει με άπειρο πλήθος από sets και προτάθηκε πρώτα στο [4] και επεκτάθηκε στο [5]. Η βασική ιδέα είναι πολύ κομψή: Συνέχισε να προβάλεις, σύμφωνα με έναν κανόνα μέσα στα convex sets, μετά αυτή η ακολουθία των προβολών θα οδηγήσει σε ένα σημείο που βρίσκεται στον κοινό χώρο αυτών των sets. Επομένως για το πρόβλημά μας, χρειάζεται να χρησιμοποιηθούν μετρικοί τελεστές προβολής (metric projection mapping operators), για τα hyperslabs και για τις σταθμισμένες  $l_1$  μπάλες (weighted  $l_1$  balls). Οι τελεστές προβολής για hyperslabs είναι ήδη γνωστοί και χρησιμοποιούνται ευρέως [11], [12]. Η μετρική προβολή σχεδίασης (metric projection mapping) σε σταθμισμένη  $l_1$  norm παρουσιάστηκε πρώτη φορά σε αυτόν τον αλγόριθμο χωρίς να χρησιμοποιούνται οι κλασικοί Lagrange multipliers. Κάθε χρονική στιγμή  $n$ , ένα νέο ζεύγος από δεδομένα εκμάθησης (training data), γίνονται διαθέσιμα και δημιουργείται το αντίστοιχο hyperslab σύμφωνα με την εξίσωση (24), ώστε να ενημερωθεί η τρέχουσα εκτίμηση του  $h_n$ . Για να επιταχύνουμε την σύγκλιση, ο μηχανισμός ενημέρωσης μπορεί να περιλαμβάνει επιπλέον προηγούμενα hyperslabs που σχηματίστηκαν τις χρονικές στιγμές:  $n - q + 1, n$  για κάποιο  $q \in \mathbb{Z}_{>0}$ . Κατόπιν για να υπολογιστεί το  $h_{n+1}$ , χρησιμοποιείται ένα πλάνο επανάληψης που αποτελείται από τρία

βασικά βήματα α) η τρέχουσα εκτίμηση του  $h_n$  προβάλλεται σε κάθε ένα από τα  $q$  hyperslabs, β) αυτές οι προβολές συνδυάζονται σε ένα σταθμισμένο άθροισμα, γ) το αποτέλεσμα από το προηγούμενο βήμα προβάλλεται στην σταθμισμένη  $l_1$  ball.

Πιο λεπτομερώς ο αλγόριθμος περιγράφεται παρακάτω

Έστω  $q \in \mathbb{Z}_{>0}$ , έτσι καθορίζεται το μήκος του πλαισίου, παραθύρου, στον άξονα του χρόνου που έχει μέγεθος  $q$ . Για να υποδείξουμε τα hyperslabs που πρέπει να επεξεργαστούν σε κάθε χρονική στιγμή έχουμε ότι:

$$\mathcal{J}_n = \overline{\max\{0, n - q + 1\}, n}, \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \quad (26)$$

Έτσι τα συγκεκριμένα hyperslabs είναι τα:

$$\{S_j[\varepsilon]\}_{j \in \mathcal{J}_n} \quad (27)$$

Με δεδομένο την τρέχουσα εκτίμηση του  $h_n \in \mathbb{R}^L$  του υπό μελέτη αραιού συστήματος, αναγνωρίζουμε τα ενεργά hyperslabs από το προηγούμενο σύνολο  $(\{S_j[\varepsilon]\}_{j \in \mathcal{J}_n})$  που παρέχουν επιπλέον «πληροφορία». Αυτά τα ενεργά hyperslabs είναι εκείνα για τα οποία ισχύει ότι  $h_n \notin S_j[\varepsilon]$ .

$$\mathcal{J}_n = \{j \in \mathcal{J}_n : h_n \notin S_j[\varepsilon]\} \quad (28)$$

Γνωρίζοντας το  $\mathcal{J}_n$ , καθορίζουμε τα βάρη  $\{\omega_j^{(n)}\}_{j \in \mathcal{J}_n} \subset (0,1]$  έτσι ώστε  $\sum_{j \in \mathcal{J}_n} \omega_j^{(n)} = 1$ . Κάθε  $\omega_j^{(n)}$  ποσοτικοποιεί την συμμετοχή του  $j$ th hyperslab σε έναν σταθμισμένο συνδυασμό από όλα τα hyperslabs που προσδιορίζονται από το  $\mathcal{J}_n$ .

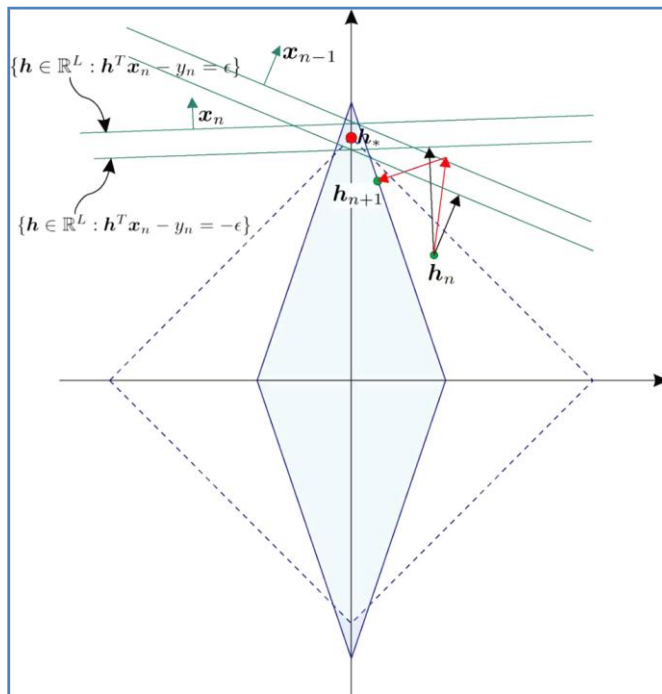
Ξεκινώντας από ένα αυθαίρετο αρχικό σημείο  $h_0 \in \mathbb{R}^L$  έχουμε τον ακόλουθο αναδρομικό τύπο για την εκτίμηση του  $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$$h_{n+1} = P_{Bl_1[w_n, \delta]} \left( h_n + \mu_n \left( \sum_{j \in \mathcal{J}_n} \omega_j^{(n)} P_{S_j[\varepsilon]}(h_n) - h_n \right) \right) \quad (29)$$

Όπου  $P_{S_j[\varepsilon]}$  και  $P_{Bl_1[w_n, \delta]}$  δηλώνουν τις μετρικές προβολές σχεδίασης (metric projection mappings) πάνω στο hyperslab, που καθορίστηκε από το  $j$ th ζεύγος δεδομένων, και τη σταθμισμένη  $l_1$  μπάλα, αντίστοιχα. Για να είναι εγγυημένη η σύγκλιση η παράμετρος  $\mu_n$  πρέπει να παίρνει τιμές στο διάστημα  $(0, 2M_n)$ , η  $M_n$  υπολογίζεται από τη σχέση:

$$M_n = \begin{cases} \frac{\sum_{j \in \mathcal{J}_n} \omega_j^{(n)} \|h_n - P_{S_j[\varepsilon]}(h_n)\|^2}{\left\| \sum_{j \in \mathcal{J}_n} \omega_j^{(n)} (h_n - P_{S_j[\varepsilon]}(h_n)) \right\|^2}, & \text{εάν } \sum_{j \in \mathcal{J}_n} \omega_j^{(n)} (h_n - P_{S_j[\varepsilon]}(h_n)) \neq 0 \\ 1, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (30)$$

Είναι ενδιαφέρον να τονιστεί ότι ο αλγόριθμος αποτυπώθηκε συμπυκνωμένα σε μια απλή εξίσωση. Επίσης οι προβολές πάνω στα hyperslabs  $\{P_{S_j[\varepsilon]}\}_{j \in \mathcal{J}_n}$  μπορούν να πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα και αυτή η ιδιότητα είναι χρήσιμη σε συνθήκες παράλληλης επεξεργασίας. Επιπλέον το  $q$  μπορεί να διαφέρει από επανάληψη σε επανάληψη. Οι πραγματοποίηση των προβολών που υπαγορεύουν οι δύο προηγούμενες εξισώσεις υπολογιστικά είναι απλές στην εκτέλεσή τους.



**Εικόνα 8:** Η  $l_1$  μπάλα απεικονίζεται με τις διακεκομμένες γραμμές. Την χρονική στιγμή  $n$  έχουμε διαθέσιμη την εκτίμηση  $h_n$ . Για  $q=2$  τα hyperslabs που συμμετέχουν στην ενημέρωση είναι τα  $n$  και  $n-1$ . Το  $h_{n+1}$  προκύπτει προβάλλοντας πρώτα το  $h_n$  πάνω στα 2 hyperslabs, μετά συνδυάζονται οι προβολές και τέλος γίνεται προβολή πάνω στη σταθμισμένη  $l_1$  norm, που

έχει προσδιοριστεί τη χρονική στιγμή  $n$  και απεικονίζεται με συνεχή γραμμή.

## 5.4 Προβάλλοντας πάνω σε ένα hyperslab

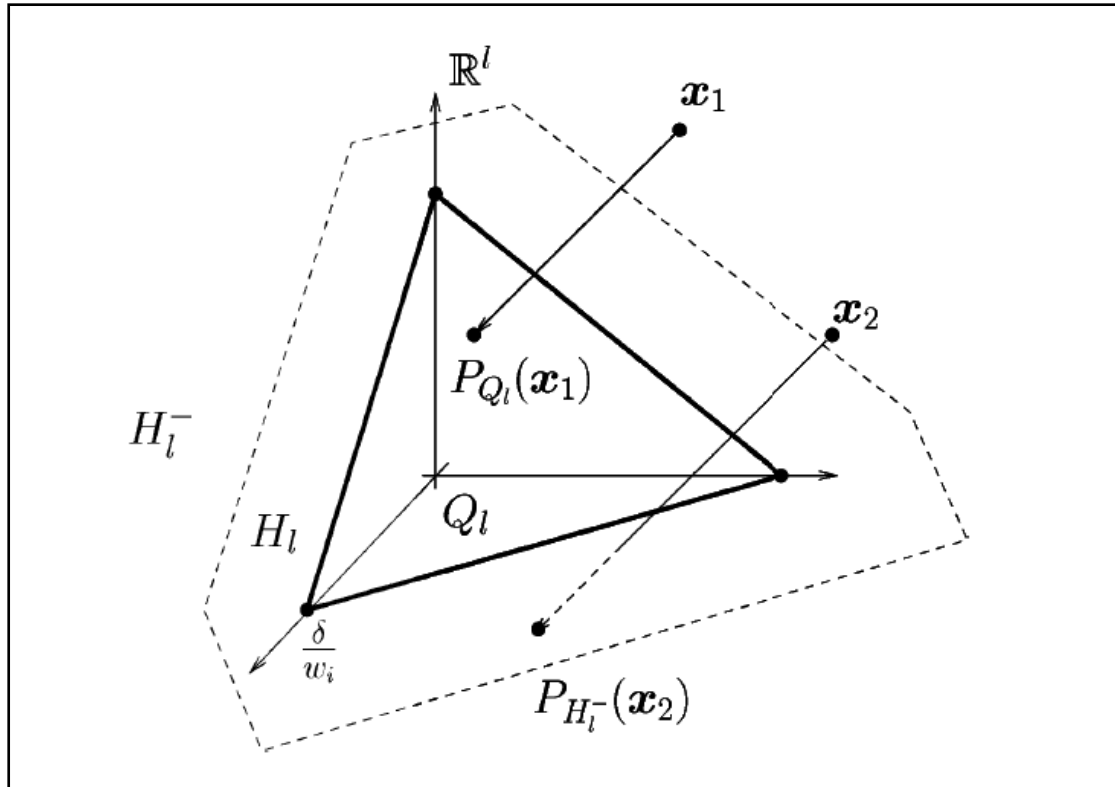
Ο μετρικός συντελεστής προβολής  $P_{S_n[\varepsilon]}$  πάνω στο hyperslab παίρνει την ακόλουθη αναλυτική μορφή:

$$\forall h \in \mathbb{R}^L, \quad P_{S_n[\varepsilon]}(h) = h + \begin{cases} \frac{y_n - \varepsilon - h^T x_n}{\|x_n\|^2} x_n, & \text{εάν } y_n - \varepsilon > h^T x_n \\ 0, & \text{εάν } h^T x_n - y_n \varepsilon \leq \varepsilon \\ \frac{y_n - \varepsilon - h^T x_n}{\|x_n\|^2} x_n, & \text{εάν } y_n + \varepsilon < h^T x_n \end{cases}$$

(31)

### 5.5 Προβάλλοντας πάνω στην σταθμισμένη $l_1$ μπάλα (weighted $l_1$ ball)

Το ακόλουθο θεώρημα υπολογίζει, σε έναν πεπερασμένο αριθμό βημάτων, την ακριβή προβολή ενός σημείου σε μία σταθμισμένη  $l_1$  μπάλα (weighted  $l_1$  ball). Το αποτέλεσμα χρησιμοποιείται και για την προβολή σε μία μη σταθμισμένη  $l_1$  μπάλα (unweighted  $l_1$  ball) [13], [14]. Η σχεδίαση της προβολής εκμεταλλεύεται εκείνο το τμήμα της σταθμισμένης  $l_1$  μπάλας που βρίσκεται στο μη αρνητικό hyperorthant του χώρου. Αυτό συμβαίνει επειδή η προβολή ενός σημείου στην σταθμισμένη  $l_1$  μπάλα (weighted  $l_1$  ball) βρίσκεται πάντα στο ίδιο hyperorthant με το σημείο αυτό. Έτσι το πρόβλημα πρέπει να οριοθετηθεί στο μη αρνητικό hyperorthant, να γίνει η επεξεργασία σε εκείνον το χώρο και κατόπιν πρέπει να επιστρέψουμε στο αρχικό hyperorthant του χώρου, όπου ανήκει το σημείο. Το μέρος της weighted  $l_1$  norm, που βρίσκεται στο μη αρνητικό hyperorthant, μπορεί να γίνει αντιληπτό ως ο κοινός χώρος ενός κλειστού ημιχώρου και του μη αρνητικού hyperorthant.



**Εικόνα 9:** Ο  $H_l^-$  είναι ο κλειστός ημιχώρος που ορίζεται ως εξής:  $H_l^- = \{u \in \mathbb{R}^l : \sum_{i=1}^l w_i u_i = w^T u \leq \delta\}$ , το hyperplane  $H_l$  ορίζεται ως  $H_l = \{u \in \mathbb{R}^l : \sum_{i=1}^l w_i u_i = w^T u = \delta\}$  τέλος έχουμε ότι  $Q_l = Bl_1[w_n, \delta] \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^l$ , όπου  $\mathbb{R}_{\geq 0}^l$  είναι το μη αρνητικό hyperorthant του  $\mathbb{R}^l$ , επομένως το  $Q_l$  είναι ο κοινός χώρος της σταθμισμένης  $l_1$  μπάλας και του μη αρνητικού hyperorthant  $\mathbb{R}_{\geq 0}^l$ . Αυτή η εικόνα δείχνει τη γεωμετρία της σταθμισμένης  $l_1$  ball  $Bl_1[w_n, \delta]$  και πιο ειδικά τον κοινό χώρο με το μη αρνητικό hyperorthant του  $\mathbb{R}^l$ . Δύο σημεία  $x_1$  και  $x_2$  που ανήκουν στο  $\mathbb{R}^l$  χρησιμοποιούνται για να δείξουν τα σενάρια που αναφέρονται παρακάτω. Παρατηρούμε ότι  $P_{H_l^-}(x_1) > 0$ , δηλαδή η προβολή του  $x_1$  στον ημιχώρο  $H_l^-$  έχει όλες τις συνιστώσες θετικές, αποδεικνύεται ότι  $P_{Q_l}(x_1) = P_{H_l^-}(x_1)$ .  $P_{Q_l}(x_1)$  είναι η προβολή του  $x_1$  στον ημιχώρο  $Q_l$ . Το σημείο  $x_2$  δείχνει την περίπτωση, στην οποία κάποιες από τις συνιστώσες του  $P_{H_l^-}(x_2)$  παίρνουν μη θετικές τιμές. Αυτές οι συνιστώσες αγνοούνται και η προβολή πραγματοποιείται σε έναν χώρο με λιγότερες διαστάσεις.

Φαίνεται ότι εάν η προβολή ενός σημείου στον συγκεκριμένο ημιχώρο έχει όλες τις συνιστώσες θετικές, τότε η προβολή στον ημιχώρο και η προβολή του σημείου στην weighted  $l_1$  ball συμπίπτουν. Εάν ωστόσο κάποιες από τις συνιστώσες της προβολής στον ημιχώρο είναι μη θετικές, τότε αυτές αγνοούνται και η προβολή εκπίπτει στο νέο



μικρότερης διάστασης χώρο. Αποδεικνύεται ότι αυτή η προβολή συμπίπτει με την προβολή του σημείου στην weighted  $l_1$  ball. Η προηγούμενη διαδικασία συνοψίζεται επίσημα παρακάτω.

**Θεώρημα 1:** Με δεδομένο ένα  $h \in \mathbb{R}^L \setminus Bl_1[w_n, \delta]$ , η ακόλουθη αναδρομική διαδικασία υπολογίζει, σε ένα πεπερασμένο αριθμό βημάτων το πολύ  $L$ , την προβολή του  $h$  πάνω στη μπάλα  $Bl_1[w_n, \delta]$ .

- 1) Σχηματισμός του διανύσματος  $[\frac{|h_1|}{w_{n,1}}, \dots, \frac{|h_L|}{w_{n,L}}]^T \in \mathbb{R}^L$ .
- 2) Ταξινόμηση του προηγούμενου διανύσματος σε τέτοια σειρά ώστε:

$$\left[ \frac{|h_{\tau(1)}|}{w_{n,\tau(1)}}, \dots, \frac{|h_{\tau(L)}|}{w_{n,\tau(L)}} \right]^T$$

Δηλαδή

$$\frac{|h_{\tau(1)}|}{w_{n,\tau(1)}} \geq \dots \geq \frac{|h_{\tau(L)}|}{w_{n,\tau(L)}}$$

Ο συμβολισμός  $\tau^{-1}$  δηλώνει ότι τα ταξινομημένα στοιχεία επανέρχονται στις αρχικές τους θέσεις.

- 3)  $r_1 = L$
- 4)  $l=1$ , Όσο  $l \leq L$  επανέλαβε
  - a)  $\lambda^* = l$
  - b) Βρες το μέγιστο  $j^*$  ανάμεσα σε εκείνα τα  $j \in \overline{1, r_l}$  έτσι ώστε
 
$$\left( \frac{|h_{\tau(j)}|}{w_{n,\tau(j)}} \right) > \left( \frac{(\sum_{i=1}^{r_l} w_{n,\tau(i)} |h_{\tau(i)}| - \delta)}{\sum_{i=1}^{r_l} w_{n,\tau(i)}^2} \right)$$
  - c) Εάν  $j^* = r_l$  τότε σταμάτα την επανάληψη.
  - d) Αλλιώς θέσε  $r_{l+1} = j^*$
  - e) Αύξησε το  $l$  κατά 1 και πήγαινε πίσω στο βήμα 4 a)
- 5) Δημιούργησε το διάνυσμα  $\hat{p} \in \mathbb{R}^{r_{\lambda^*}}$  του οποίου η  $j$ th συνιστώσα δίνεται από  $\hat{p}_j = |h_{\tau(j)}| - \left( \frac{(\sum_{i=1}^{r_{\lambda^*}} w_{n,\tau(i)} |h_{\tau(i)}| - \delta)}{\sum_{i=1}^{r_{\lambda^*}} w_{n,\tau(i)}^2} \right) w_{n,\tau(j)}$
- 6) Χρησιμοποίησε την αντιστροφή  $\tau^{-1}$  (βήμα 2), για να τοποθετηθεί η συνιστώσες  $j$  του διανύσματος  $\hat{p}$  στις κατάλληλες θέση του διανύσματος  $p$ , δηλαδή  $p_{\tau^{-1}(j)} = \hat{p}_j, \forall j \in \overline{1, r_{\lambda^*}}$  ενώ οι υπόλοιπες θέσεις  $L - r_{\lambda^*}$  του διανύσματος  $p$  γίνονται ίσες με μηδέν.
- 7) Η επιθυμητή προβολή είναι:

$$Bl_1[w_n, \delta](h) = [sgn(h_1)p_1, \dots, sgn(h_L)p_L]^T \in \mathbb{R}^L$$

Το σύμβολο  $\text{sgn}(\cdot)$  συμβολίζει το ίχνος ενός πραγματικού αριθμού.

## 5.6 Σταθμίζοντας την $l_1$ μπάλα (weighting the $l_1$ ball)

Με βάση τη στρατηγική που υιοθετήθηκε στο [15], η συνιστώσα  $i$ -th του διανύσματος  $w_n$  δίνεται από:

$$w_{n,i} = \frac{1}{|h_{n,i}| + \varepsilon'_n}, \quad \forall i \in \overline{1, L}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \quad (32)$$

Όπου  $(\varepsilon'_n)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$  είναι μια σειρά από μικρές θετικές παραμέτρους, που χρησιμοποιούνται για να αποφευχθεί η διαίρεση με το μηδέν. Ο σχετικός αλγόριθμος θα αναφέρεται ως Προσαρμοστικός Αλγόριθμος Προβολών με Σταθμισμένες  $l_1$  Μπάλες (Projection Based Algorithm using Weighted  $l_1$  balls, APWL1). Η μη σταθμισμένη περίπτωση, όταν  $w_n = 1 \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , θα συμβολίζεται ως APL1.

*Παρατήρηση 1:* Η ακτίνα  $\delta$  της  $l_1$  norm, πάνω στην οποία προβάλλουμε, εξαρτάται από το εάν επιλέγουμε την σταθμισμένη ή τη μη σταθμισμένη έκδοση. Στη μη σταθμισμένη έκδοση η τιμή της ακτίνας είναι προφανώς  $\delta = \|h_*\|_{l_1}$ . Ωστόσο στην σταθμισμένη περίπτωση η ακτίνα  $\delta$  τίθεται ίση με  $S = \|h_*\|_{l_0}$ .

## 5.7 Ιδιότητες σύγκλισης του αλγορίθμου

Μπορεί να δειχθεί ότι, κάτω από ορισμένες υποθέσεις, ο αλγόριθμος δημιουργεί μία ακολουθία από προσεγγίσεις του  $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ , που συγκλίνει σε ένα σημείο που βρίσκεται στον κοινό χώρο του hyperslab και της  $l_1$  ball, δηλαδή:

$$\text{βρες ένα } h \in \bigcap_{n \geq 0} (S_n[\varepsilon] \cap B_{l_1}[w_n, \delta]) \quad (33)$$

Η σύγκλιση του αλγορίθμου είναι εγγυημένη ακόμα και όταν ένα πεπερασμένο πλήθος από κλειστά κυρτά σύνολα (closed convex sets) δεν μοιράζονται κάποιον κοινό χώρο με τους υπόλοιπους κυρτούς περιορισμούς που δίνει η προηγούμενη σχέση. Αυτό είναι σημαντικό, αφού επιτρέπει σε έναν πεπερασμένο αριθμό από δεδομένα που δεν βρίσκονται κοντά στον χώρο της σύγκλισης (outliers), να μην παρεμποδίζουν τη σύγκλιση του αλγορίθμου.

Υποθέσεις:

- 1) Ορίζεται:  $\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \Omega_n = B_{l_1}[w_n, \delta] \cap (\bigcap_{j \in \mathcal{J}_n} S_j[\varepsilon])$ , το σύνολο  $\Omega_n$  ορίζεται ως ο κοινός χώρος της σταθμισμένης  $l_1$  μπάλας και των hyperslabs που χρησιμοποιούνται τη χρονική στιγμή  $n$ . Υποθέτουμε ότι υπάρχει  $z_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  έτσι ώστε να ισχύει  $\Omega = \bigcap_{n \geq z_0} \Omega_n \neq \emptyset$ . Αυτό ισχύει με την εξαίρεση ενός πεπερασμένου αριθμού από  $\Omega_n$ 's, τα υπόλοιπα από αυτά έχουν ένα μη κενό κοινό χώρο.
- 2) Επιλέγεται ένα ικανοποιητικά μικρό  $\varepsilon'' > 0$  και έχουμε  $\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \frac{\mu_n}{M_n} \in [\varepsilon'', 2 - \varepsilon'']$
- 3) Το εσωτερικό του  $\Omega$  είναι μη κενό.
- 4) Υποθέτουμε ότι  $\tilde{\omega} = \inf \{ \omega_j^{(n)} : j \in \mathcal{J}_n, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \} > 0$ . Με λόγια, κανένα από τα βάρη, που χρησιμοποιούνται για να συνδυάσουν τις προβολές στα hyperslabs, δεν θα εξασθενίσει καθώς αυξάνεται το  $n$

Θεώρημα: Σύμφωνα με τις προηγούμενες υποθέσεις που υιοθετήθηκαν οι ακόλουθες ιδιότητες μπορούν να δημιουργηθούν:

- 1) Με κάθε ενημέρωση πλησιάζουμε στον κοινό χώρο  $\Omega$ . Με άλλα λόγια, η σύγκλιση είναι μονότονη, δηλαδή,  $\forall n \geq z_0, d(h_{n+1}, \Omega) \leq d(h_n, \Omega)$ .
- 2) Ασυμπτωτικά, η απόσταση από τις υπολογισμένες προσεγγίσεις από τα αντίστοιχα hyperslabs τείνει στο μηδέν. Ισχύει δηλαδή ότι:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \max \{ d(h_n, S_j[\varepsilon]) : j \in \mathcal{J}_n \} = 0$
- 3) Όμοια, η απόσταση από τις υπολογισμένες προσεγγίσεις από τις αντίστοιχες σταθμισμένες  $l_1$  μπάλες τείνει ασυμπτωτικά στο μηδέν, δηλαδή  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(h_n, B_{l_1}[w_n, \delta]) = 0$
- 4) Τελικά, υπάρχει ένα  $h_* \in \mathbb{R}^L$  έτσι ώστε η ακολουθία από τα υπολογισμένα  $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$  συγκλίνει δηλαδή  $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = \tilde{h}_*$  και  $\tilde{h}_* \in (\overline{\liminf_{n \rightarrow \infty} B_{l_1}[w_n, \delta]}) \cap (\overline{\liminf_{n \rightarrow \infty} S_n[\varepsilon]})$   
 $\liminf_{n \rightarrow \infty} C_n = \bigcup_{n \geq 0} \bigcap_{m \geq n} C_m$ , για κάθε ακολουθία  $(C_n)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \subset \mathbb{R}^L$  με άλλα λόγια ο αλγόριθμος συγκλίνει σε ένα σημείο που βρίσκεται κοντά σε έναν κοινό χώρο των εμπλεκόμενων property sets.

## 5.8 Βιβλιογραφία

- [1] Online Sparse System Identification and Signal Reconstruction Using Projections Onto Weighted  $l_1$  Balls, Y. Kopsinis, K. Slavakis, and S. Theodoridis, IEEE Transactions on Signal Processing, VOL. 59, NO. 3, March 2011
- [2] [http://en.wikipedia.org/wiki/Open\\_set](http://en.wikipedia.org/wiki/Open_set)
- [3] [http://en.wikipedia.org/wiki/Convex\\_set](http://en.wikipedia.org/wiki/Convex_set)
- [4] Adaptive Projected Subgradient Method for asymptotic minimization of sequence of nonnegative convex functions, I. Yamada and N. Ogura, Numer. Funct. Anal. Optim., vol. 25, no. 7 and 8, pp. 593–617, 2004.
- [5] The adaptive projected subgradient method over the fixed point set of strongly attracting nonexpansive mappings, K. Slavakis, I. Yamada, and N. Ogura, Numer. Funct. Anal. Optim., vol. 27, no. 7 and 8, pp. 905–930, 2006.
- [6] The adaptive projected subgradient method constrained by families of quasi- nonexpansive mappings and its application to online learning, K. Slavakis and I. Yamada, Revised and submitted for publication, July 2011, preprint: [arXiv.org](http://arXiv.org)
- [7] The method of successive projections for finding a common point of convex sets, L. M. Bregman, Soviet Math. Dokl., vol. 6, pp. 688–692, 1965.
- [8] The method of projections for finding the common point of convex sets, L. G. Gubin, B. T. Polyak, and E. V. Raik, USSR Comput. Math. Phys., vol. 7, pp. 1–24, 1967.
- [9] On projection algorithms for solving convex feasibility problems, H. H. Bauschke and J. M. Borwein, SIAM Rev., vol. 38, no. 3, pp. 367–426, Sep. 1996.
- [10] Vector Space Projections: A Numerical Approach to Signal and Image Processing, Neural Nets, and Optics, H. Stark and Y. Yang, Vector New York: Wiley, 1998.
- [11] Adaptive learning in a world of projections: A unifying framework for linear and nonlinear classification and regression tasks, S. Theodoridis, K. Slavakis, and I. Yamada, IEEE Signal Process. Mag., vol. 28, no. 1, pp. 97–123, 2011.
- [12] Adaptive constrained learning in Reproducing Kernel Hilbert Spaces: The robust beamforming case, K. Slavakis, S. Theodoridis, and I. Yamada, IEEE Trans. Signal Process., vol. 57, no. 12, pp. 4744–4764, Dec. 2009.

- [13] Efficient projections onto the  $l_1$ -ball for learning in high dimensions, J. Duchi, S. S-Shwartz, Y. Singer, and T. Chandra, in Proc. Int. Conf. Machine Learning (ICML), 2008, pp. 272–279.
- [14] Accelerated projected gradient method for linear inverse problems with sparsity constraints, I. Daubechies, M. Fornasier, and I. Loris, J. Fourier Anal. Applicat., vol. 14, no. 5–6, pp. 764–792, Dec. 2008.
- [15] Enhancing sparsity by reweighted  $l_1$  minimization, E. Candès, M. B. Wakin, and S. P. Boyd, J. Fourier Anal. Appl., vol. 14, pp. 877–905, 2008.

## 6. Αποτελέσματα από την εφαρμογή των αλγορίθμων για διάφορα μήκη αραιών διανυσμάτων.

### 6.1 Εισαγωγή

Σε όλες τις εφαρμογές στο αραιό (sparse) διάνυσμα οι θέσεις των μη μηδενικών στοιχείων επιλέγονται τυχαία και οι τιμές τους δίνονται από κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και τυπική απόκλιση 1. Στα γραφήματα που ακολουθούν στις επόμενες σελίδες στον οριζόντιο άξονα έχουμε τον αριθμό των επαναλήψεων και στον κάθετο άξονα το MSE (Mean Square Error) που υπάρχει στην προσέγγιση του sparse διανύσματος. Το MSE (Mean Square Error) εκφράζεται σε dB και υπολογίζεται ως εξής: έστω ότι  $w$  είναι το αραιό διάνυσμα που προσεγγίζεται, σε κάθε επανάληψη ο αλγόριθμος δημιουργεί μια προσέγγιση του  $w$ , έστω  $w_n$ , ιδίου μήκους. Το MSE (Mean Square Error) για κάθε επανάληψη υπολογίζεται με τον παρακάτω τρόπο:

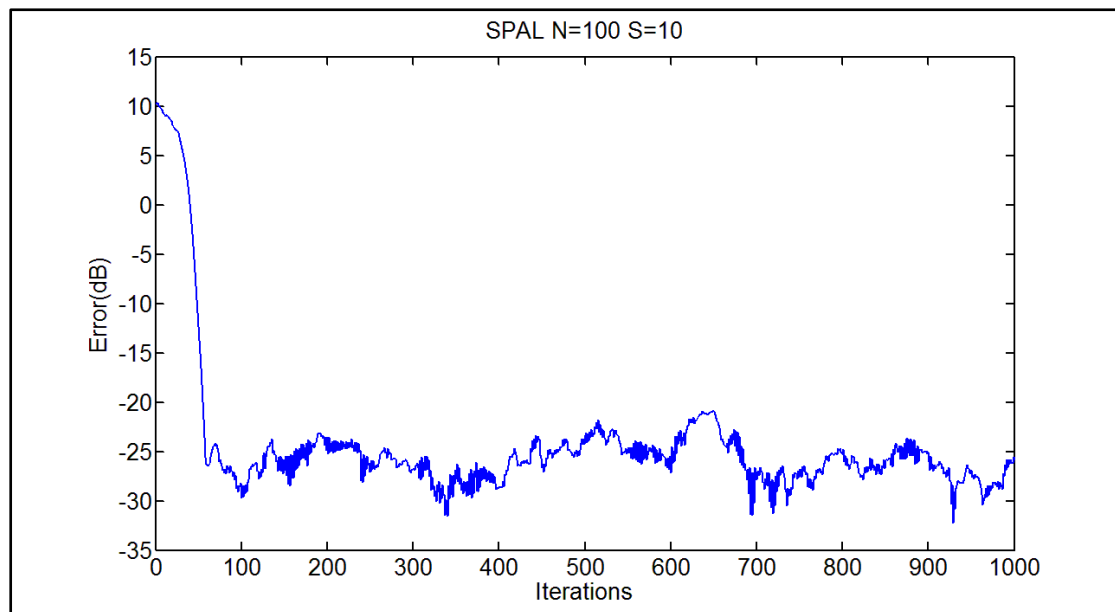
```
sum=0
Για i από 1 μέχρι τον αριθμό στοιχείων του err, w, w(n)
    err(i)=w(i)-wn(i)
    err(i)=err(i)2
τέλος επανάληψης
Για i από 1 μέχρι τον αριθμό στοιχείων του err, w, w(n)
    sum=sum+err(i)
τέλος επανάληψης
errorn=10log10(sum)
```

Όπου  $error_n$  είναι το σφάλμα που προκύπτει για κάθε επανάληψη και αυτό απεικονίζεται σε κάθε γραφική παράσταση. Επίσης σε κάθε επανάληψη το διάνυσμα που έχει ως είσοδο ο αλγόριθμος αποτελείται από +1 και -1 σε τυχαίες θέσεις. Μετά τον πολλαπλασιασμό του διανύσματος εισόδου με το αραιό διάνυσμα, προστίθεται λευκός γκαουσιανός θόρυβος (AWGN, Additive White Gaussian Noise), ώστε το SNR να είναι 20 db με δεδομένο ότι το πλάτος του σήματος εισόδου

είναι σε απόλυτη τιμή 1, δηλαδή  $SNR = \frac{A}{\sigma_n^2}$ , A: το πλάτος του σήματος εισόδου που είναι 1 και  $\sigma_n^2$  η διακύμανση του γκαουσιανού προσθετικού θορύβου (AWGN).

## 6.2 Αποτελέσματα από την εφαρμογή του αλγορίθμου SPAL για διάφορα μήκη αραιών διανυσμάτων.

Στις παρακάτω δοκιμές οι παράμετροι του αλγορίθμου SPAL που χρησιμοποιήθηκαν επιλέχτηκαν έτσι ώστε να έχουμε την βέλτιστη προσέγγιση του αραιού διανύσματος τόσο από άποψη ταχύτητας σύγκλισης όσο και από άποψη ακρίβειας (μικρότερο MSE).

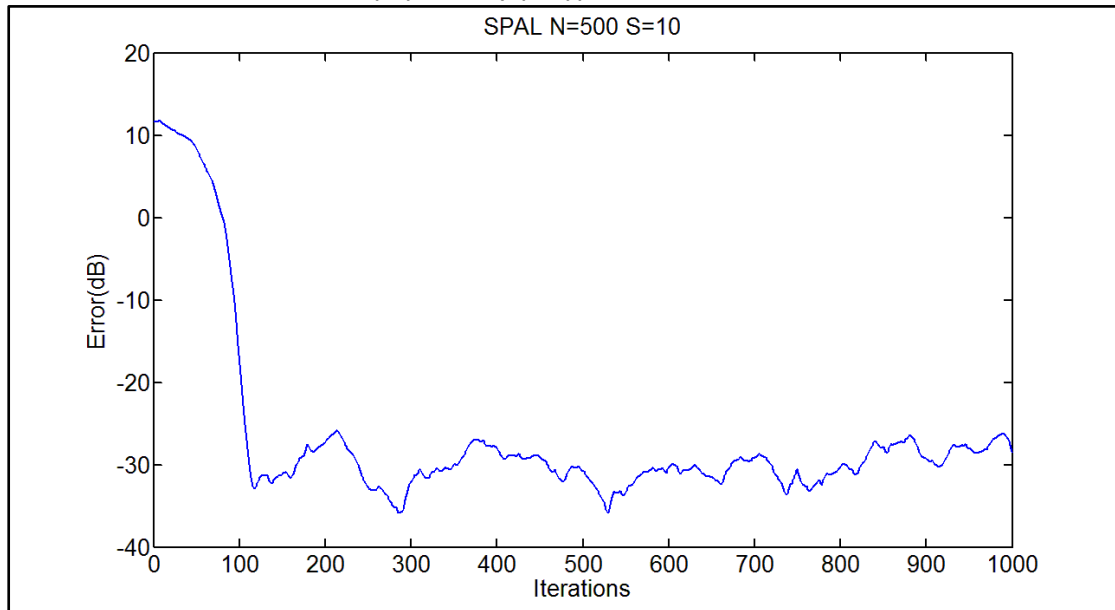


**Εικόνα 10:** Η προσέγγιση του αλγορίθμου SPAL για ένα sparse διάνυσμα με 100 στοιχεία από τα οποία τα 10 είναι μη μηδενικά, το πλήθος των επαναλήψεων είναι 1000.

Οι παράμετροι του αλγορίθμου για την προηγούμενη εφαρμογή είναι:

- Το εύρος του hyperslab  $\epsilon = 0.5 * \sqrt{\text{noise\_variance}} = 0.5 * 0.1 = 0.05$  (εξίσωση (24))
- Η ακτίνα της  $l_1$  μπάλας και ισούται με S δηλαδή είναι ίση με το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων του sparse διανύσματος (εξίσωση (23))
- Το πλήθος των hyperslabs που συμμετέχουν στην εκτίμηση που γίνεται σε κάθε χρονική στιγμή n, είναι  $q=80$  (εξισώσεις (26), (27))

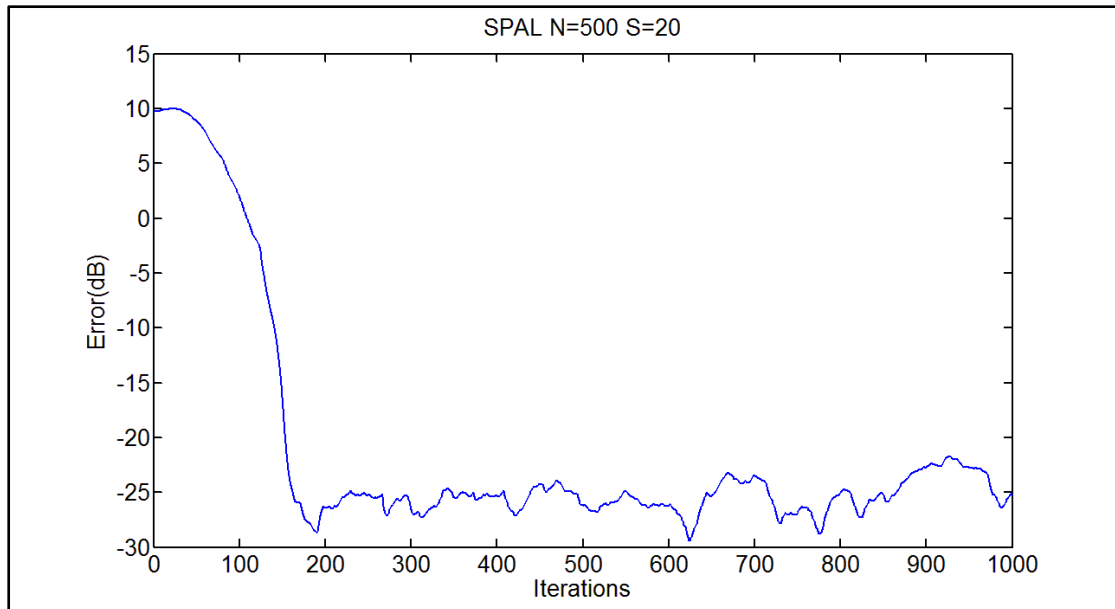
- Η μεταβλητή  $\epsilon'_n$  που χρησιμοποιείται στη στάθμιση της  $l_1$  μπάλας, ώστε να μην γίνεται διαίρεση με το μηδέν ισούται με 0.001,  $\epsilon'_n = 0.001$  (εξίσωση (32))



**Εικόνα 11:** Παραπάνω έχουμε την προσέγγιση ενός sparse διανύσματος με 500 στοιχεία εκ των οποίων τα 10 είναι μη μηδενικά ( $N=500$   $S=10$ ,  $500/10$ ). Οι παράμετροι του αλγορίθμου είναι ίδιες με την εφαρμογή της εικόνας 10.

Παρατηρούμε ότι χρειάζονται περισσότερες επαναλήψεις, περίπου οι διπλάσιες, σε σχέση με το προηγούμενο διάνυσμα ( $N=100$   $S=10$ ,  $100/10$ ), για να έχουμε την ίδια προσέγγιση. Ομοίως για διαφορετικά διανύσματα προκύπτουν τα εξής:



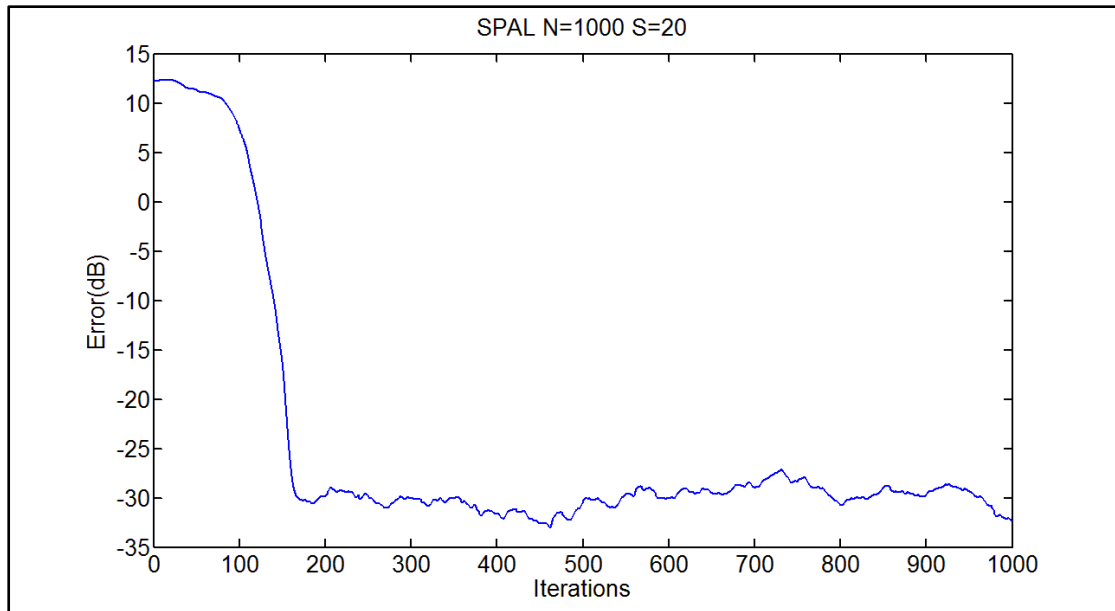


**Εικόνα 12:** Προσέγγιση ενός sparse διανύσματος 500/20.

Οι παράμετροι του αλγορίθμου για την εφαρμογή της εικόνας 12 είναι:

- Το εύρος του hyperslab  $\varepsilon=0.1*\text{sqrt}(\text{noise\_variance}) = 0.1*0.1=0.01$  (εξίσωση (24))
- Η ακτίνα της  $l_1$  μπάλας και ισούται με  $S$  δηλαδή είναι ίση με το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων του sparse διανύσματος (εξίσωση (23))
- Το πλήθος των hyperslabs που συμμετέχουν στην εκτίμηση που γίνεται σε κάθε χρονική στιγμή  $n$ , είναι  $q=80$  (εξισώσεις (26), (27))
- Η μεταβλητή  $\varepsilon'_n$  που χρησιμοποιείται στη στάθμιση της  $l_1$  μπάλας, ώστε να μην γίνεται διαίρεση με το μηδέν ισούται με  $0.001$ ,  $\varepsilon'_n=0.001$  (εξίσωση (32))

Αλλάζει δηλαδή μόνο το εύρος του hyperslab και μειώνεται έτσι έχουμε καλύτερη ταχύτητα προσέγγισης από ότι αν κρατούσαμε το  $\varepsilon$  στο 0.05.

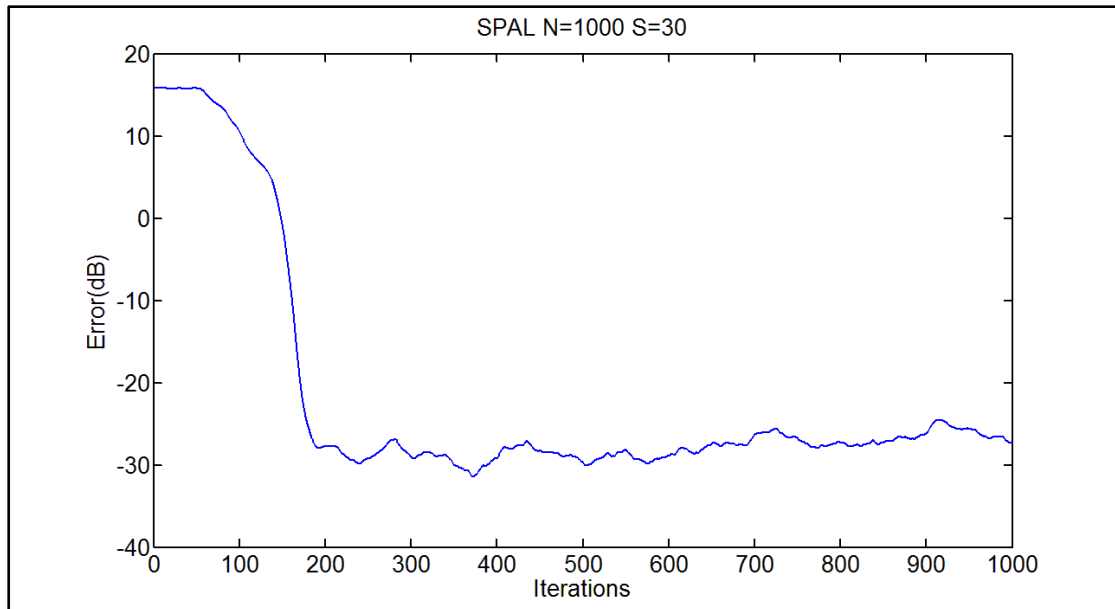


**Εικόνα 13:** Προσέγγιση ενός sparse διανύσματος 1000/20.

Οι παράμετροι του αλγορίθμου για την εφαρμογή είναι της εικόνας 13:

- Το εύρος του hyperslab  $\varepsilon = 0.1 * \sqrt{\text{noise\_variance}} = 0.1 * 0.1 = 0.01$  (εξίσωση (24))
- Η ακτίνα της  $l_1$  μπάλας και ισούται με  $S$  δηλαδή είναι ίση με το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων του sparse διανύσματος (εξίσωση (23))
- Το πλήθος των hyperslabs που συμμετέχουν στην εκτίμηση που γίνεται σε κάθε χρονική στιγμή  $n$ , είναι  $q=220$  (εξισώσεις (26), (27))
- Η μεταβλητή  $\varepsilon'_n$  που χρησιμοποιείται στη στάθμιση της  $l_1$  μπάλας, ώστε να μην γίνεται διαίρεση με το μηδέν ισούται με  $0.001$ ,  $\varepsilon'_n = 0.001$  (εξίσωση (32))

Αλλάζει μόνο το  $q$  και από 80 γίνεται 220 έτσι έχουμε καλύτερη ταχύτητα προσέγγισης και μικρότερο MSE, απ' ότι αν παρέμενε το  $q$  80 για το ίδιο διάνυσμα (1000/20).



**Εικόνα 14:** Προσέγγιση ενός διανύσματος με 1000 στοιχεία εκ των οποίων 30 είναι μη μηδενικά. Οι παράμετροι του αλγορίθμου είναι ίδιες με την εφαρμογή είναι της εικόνας 13.

Παρατηρούμε ότι η ταχύτητα προσέγγισης του αραιού διανύσματος μειώνεται όσο αυξάνεται το μήκος του και το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων. Επίσης ακόμα και αν ο λόγος του συνόλου των στοιχείων προς τα μη μηδενικά στοιχεία ενός sparse διανύσματος παραμένει σταθερός, αλλά αυξάνουν και οι δύο όροι, τότε αυξάνονται και οι απαιτούμενες επαναλήψεις. Με την αύξηση του  $N$  και του  $S$  οι απαιτούμενες επαναλήψεις δεν αυξάνονται στον ίδιο βαθμό. Όσον αφορά τις παραμέτρους όταν το  $\epsilon$ , το εύρος του hyperslab, γίνεται μεγαλύτερο από 0.2 τότε επηρεάζεται αρνητικά και η ταχύτητα και η ακρίβεια προσέγγισης, για μικρότερες τιμές του  $\epsilon$  δεν εμφανίζονται μεγάλες διαφορές. Ένα μικρό  $q$ , μικρότερο του 10 επηρεάζει επίσης αρνητικά και την ταχύτητα και την ακρίβεια προσέγγισης. Τέλος όταν αυξάνουμε το  $\epsilon_n$  δεν έχουμε μεγάλες «ταλαντώσεις του σφάλματος», όταν βρισκόμαστε στο «πλατό», δηλαδή όταν έχουν εκτελεστεί οι απαραίτητες επαναλήψεις και το MSE βρίσκεται γύρω από ένα «σημείο ισορροπίας»

### 6.3 Αποτελέσματα από την εφαρμογή του αλγορίθμου Hero LMS για διάφορα μήκη αραιών διανυσμάτων.

Στον αλγόριθμο Hero Sparse LMS όπως είδαμε προηγουμένως στην αναλυτική περιγραφή του αλγορίθμου, έχουμε τρεις αναδρομικούς τύπους που προσεγγίζουν το αραιό διάνυσμα οι προσεγγίσεις του καθενός για διάφορα διανύσματα φαίνονται στις εικόνες 15-18.

1. Ο απλούστερος τύπος (LMS) είναι:

$$w(n+1) = w(n) + \mu e(n)x(n) \quad (\text{βλ. εξίσωση (8)})$$

$$\text{Όπου } e(n) = y(n) - w^T(n)x(n) \quad (\text{βλ. εξίσωση (5)})$$

$\mu$ : σταθερά

$w(n)$ : είναι το διάνυσμα που δημιουργεί σε κάθε επανάληψη ο αλγόριθμος ώστε να προσεγγίσει το sparse διάνυσμα,  $x(n)$  είναι το διάνυσμα που έχει ως είσοδο ο αλγόριθμος σε κάθε επανάληψη  $n$ .

2. Ο άλλος τύπος Zero-Attracting LMS Algorithm (ZA-LMS) είναι:

$$w(n+1) = w(n) - \rho \operatorname{sgn} w(n) + \mu e(n)x(n) \quad (\text{βλ. εξίσωση (11)})$$

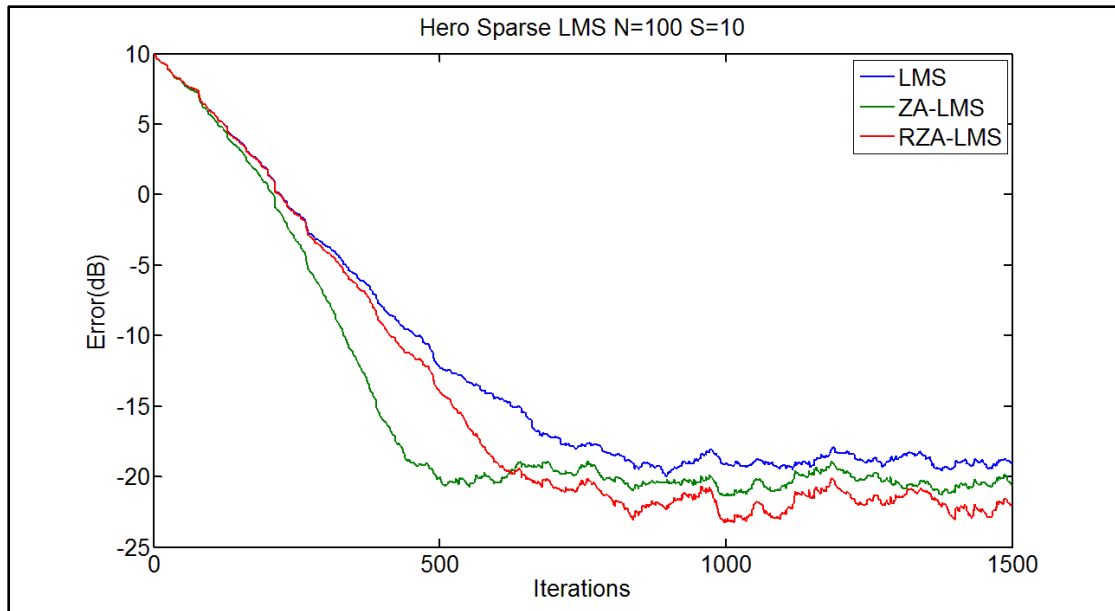
$$\text{Όπου } \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad (\text{βλ. εξίσωση (12)})$$

$\rho, \mu$ : σταθερές

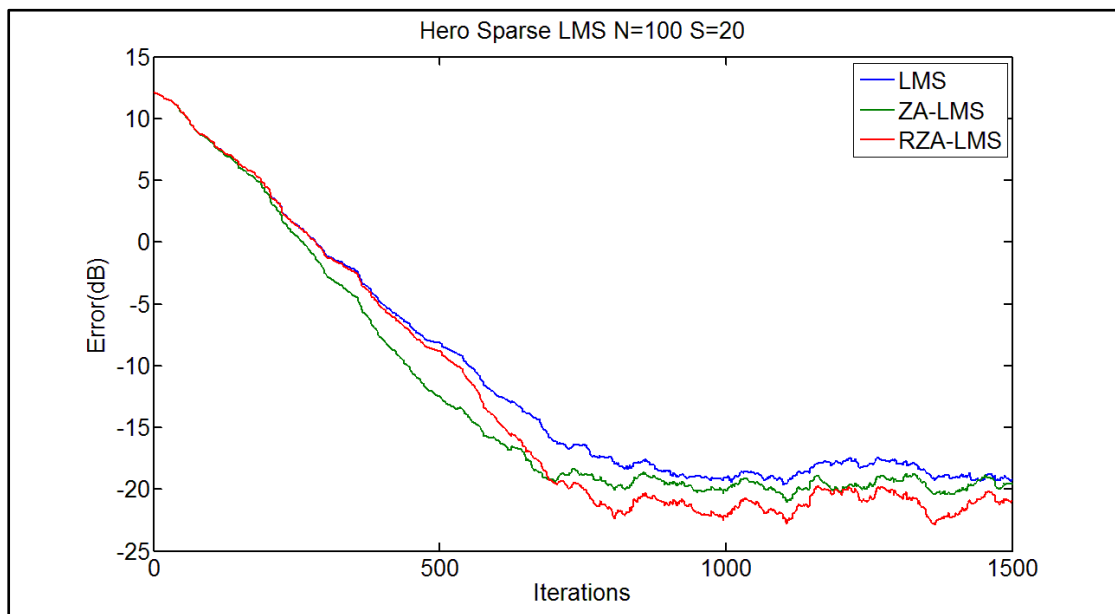
3. Τέλος ο τύπος RZA-LMS (Reweighted Zero-Attracting LMS Algorithm) δίνεται από:

$$w(n+1) = w(n) - \rho \frac{\operatorname{sgn}\{w(n)\}}{1+\varepsilon|w(n)|} + \mu e(n)x(n) \quad (\text{βλ. εξίσωση (14)})$$

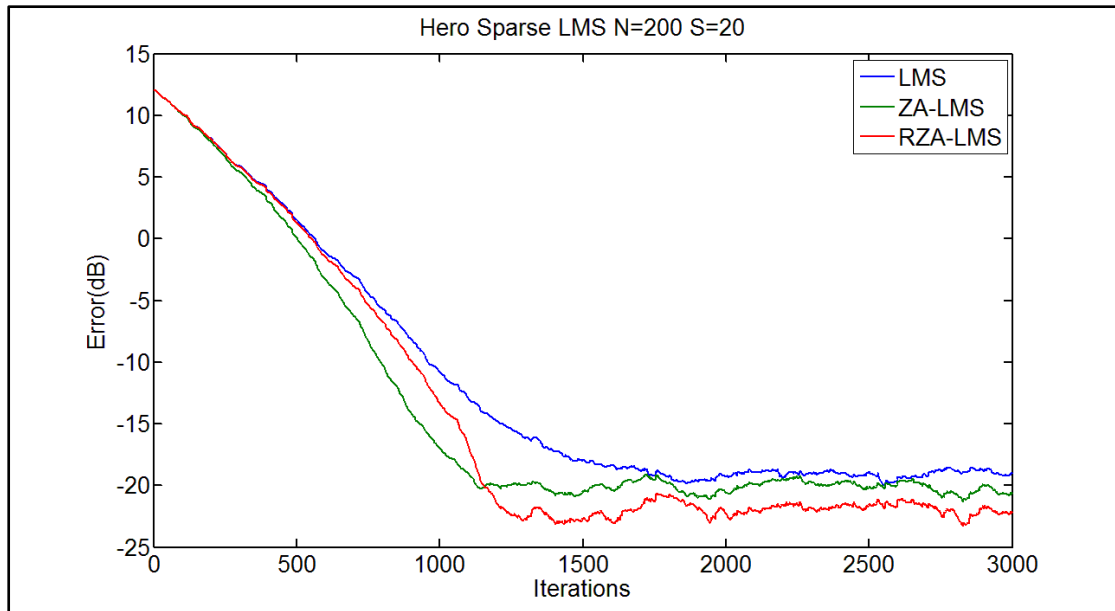
$\varepsilon, \rho, \mu$ : σταθερές



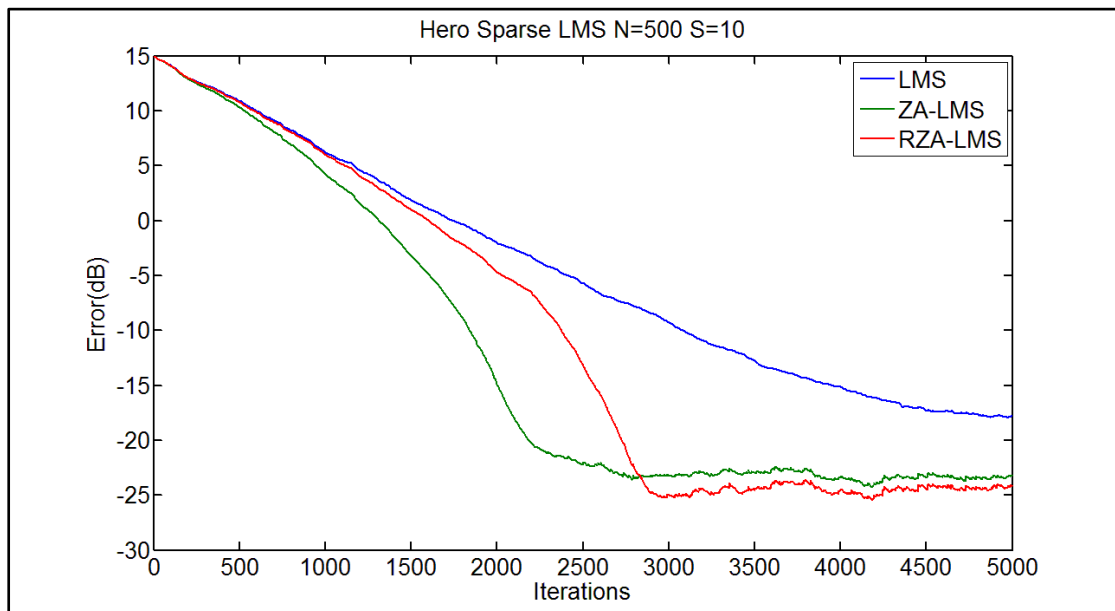
**Εικόνα 15:** Προσέγγιση των τριών τύπων LMS για ένα διάνυσμα 100 στοιχείων με 10 μη μηδενικά. Για την συγκεκριμένη εφαρμογή οι σταθερές που επιλέχτηκαν είναι:  $\mu=0.011$   $\varepsilon=220$   $\rho=0.00025$ .



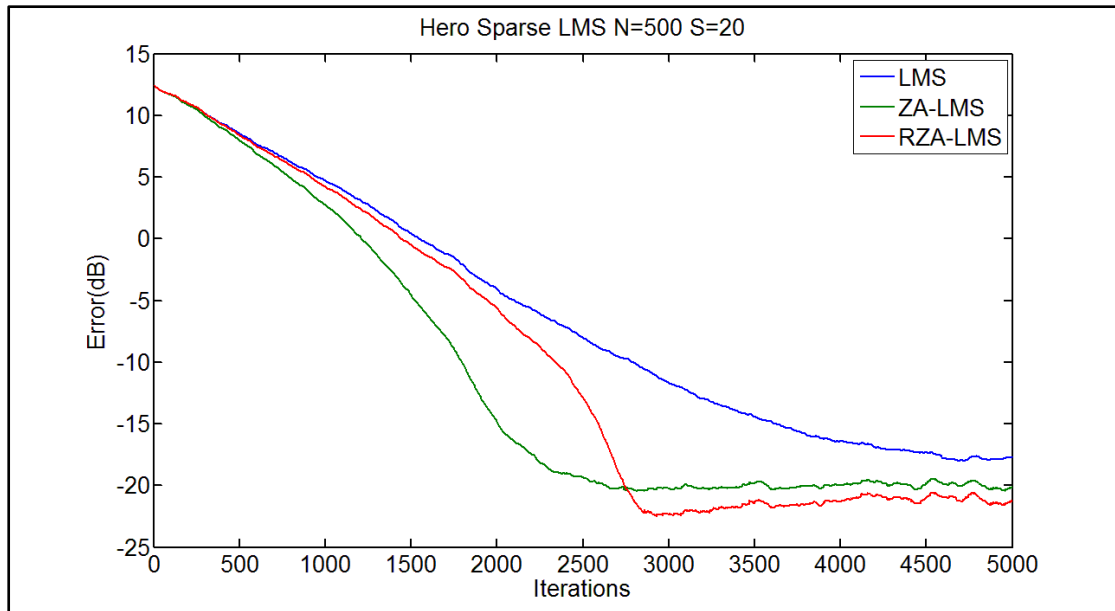
**Εικόνα 16:** Προσέγγιση των τριών τύπων LMS για ένα διάνυσμα 100 στοιχείων με 20 μη μηδενικά. Για την συγκεκριμένη εφαρμογή οι σταθερές που επιλέχτηκαν είναι:  $\mu=0.011$   $\varepsilon=200$   $\rho=0.00020$ .



**Εικόνα 17:** Προσέγγιση των τριών τύπων LMS για ένα διάνυσμα 200 στοιχείων με 20 μη μηδενικά. Για την συγκεκριμένη εφαρμογή οι σταθερές που επιλέχτηκαν είναι:  $\mu=0.0055$   $\epsilon=220$   $\rho=0.0001$ .



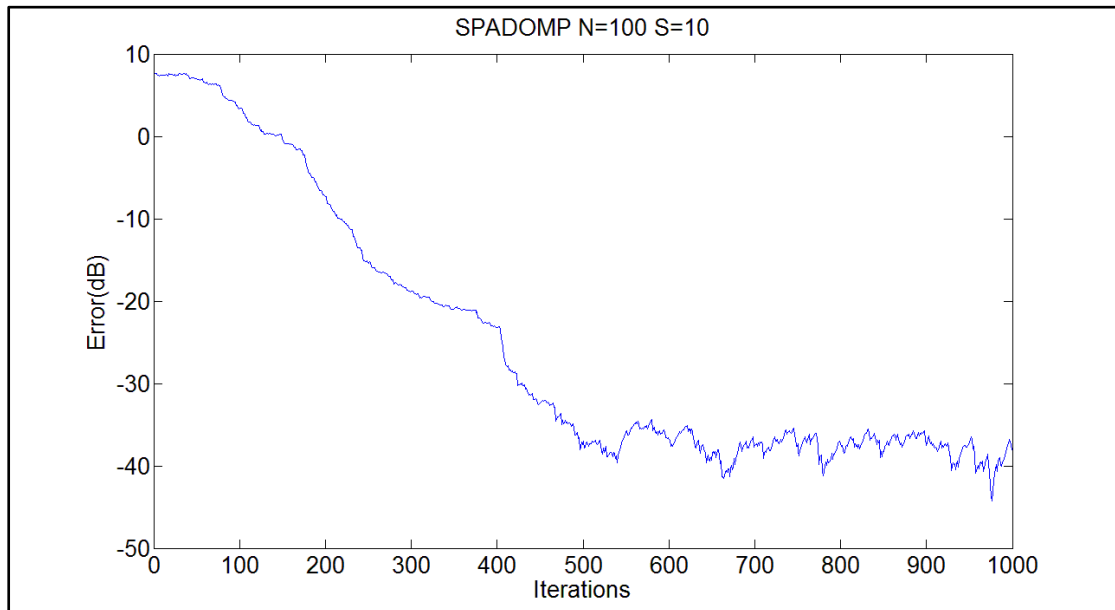
**Εικόνα 18:** Προσέγγιση των τριών τύπων LMS για ένα διάνυσμα 500 στοιχείων με 10 μη μηδενικά. Για την συγκεκριμένη εφαρμογή οι σταθερές που επιλέχτηκαν είναι:  $\mu=0.00237$   $\epsilon=200$   $\rho=0.00005$ .



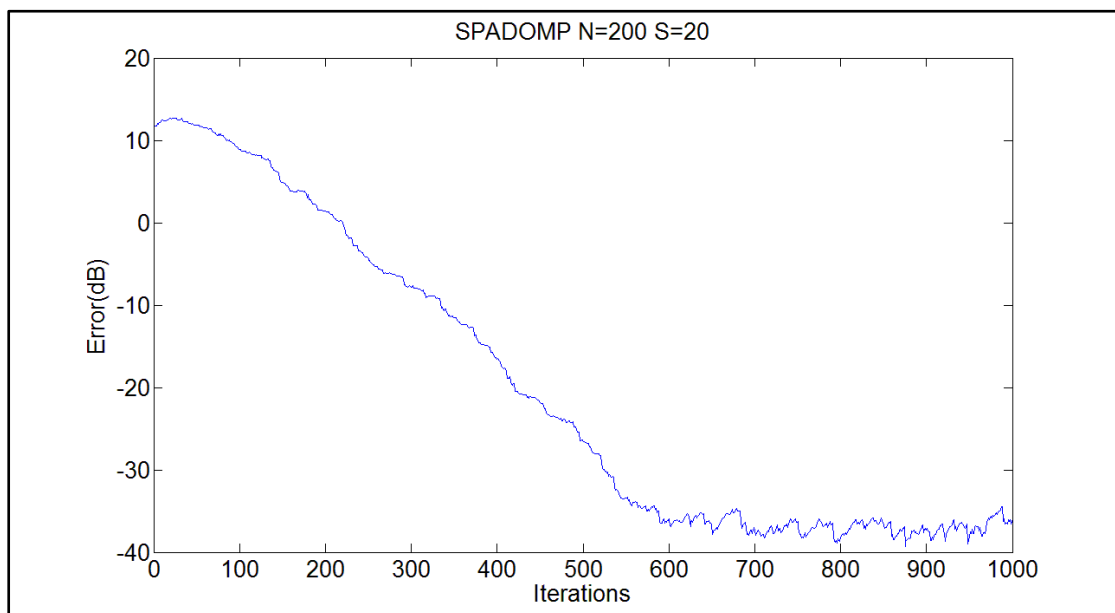
**Εικόνα 19:** Προσέγγιση των τριών τύπων LMS για ένα διάνυσμα 500 στοιχείων με 20 μη μηδενικά. Για την συγκεκριμένη εφαρμογή οι σταθερές που επιλέχτηκαν είναι:  $\mu=0.00237$   $\epsilon=200$   $\rho=0.00005$ .

Παρατηρούμε ότι για όλα τα διανύσματα των δοκιμών, όσον αφορά την ταχύτητα προσέγγισης του αραιού διανύσματος, ο αλγόριθμος ZA-LMS είναι ο πιο γρήγορος από τους άλλους δύο, μετά ακολουθεί ο RZA-LMS και στην τελευταία θέση είναι ο απλούστερος LMS. Χρησιμοποιώντας τον όρο ταχύτητα προσέγγισης εννοούμε το πλήθος των επαναλήψεων που απαιτούνται για ένα ικανοποιητικό MSE (Mean Square Error). Από την άποψη της ακρίβειας προσέγγισης του αραιού διανύσματος, ο RZA-LMS παρουσιάζει για όλα τα διανύσματα των δοκιμών μικρότερο MSE, έχει δηλαδή μεγαλύτερη ακρίβεια. Ο ZA-LMS βρίσκεται στη δεύτερη θέση και ο απλός LMS παρουσιάζει την μικρότερη ακρίβεια. Όσον αφορά τις παραμέτρους διαπιστώνουμε ότι για να έχουμε το βέλτιστο αποτέλεσμα όταν διπλασιάζεται το μήκος του διανύσματος οι παράμετροι  $\mu$  και  $\rho$  πρέπει να υποδιπλασιαστούν.

## 6.4 Αποτελέσματα από την εφαρμογή του αλγορίθμου SPADOMP για διάφορα μήκη αραιών διανυσμάτων.

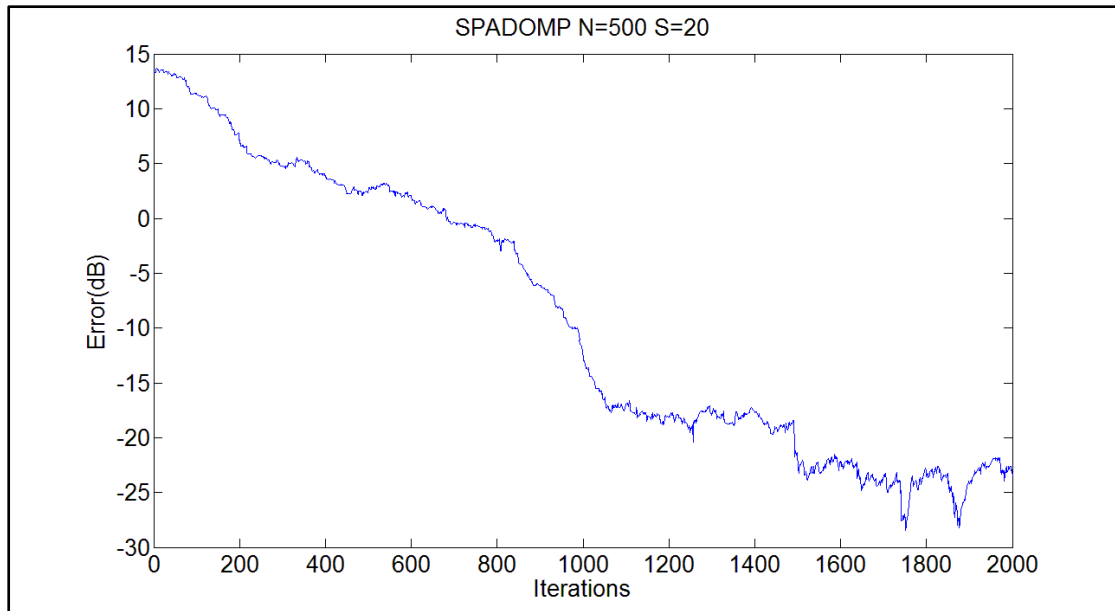


**Εικόνα 20:** Εφαρμογή του αλγορίθμου SPADOMP για ένα διάνυσμα 100 στοιχείων με 10 μη μηδενικά. Οι σταθερές που χρησιμοποιήθηκαν είναι:  $\lambda=0.3$   $\mu=0.02$ . Η προσέγγιση που παίρνουμε είναι πολύ ακριβής.



**Εικόνα 21:** Εφαρμογή του αλγορίθμου SPADOMP για ένα διάνυσμα 200 στοιχείων με 20 μη μηδενικά. Οι σταθερές που χρησιμοποιήθηκαν είναι:  $\lambda=0.3$   $\mu=0.02$ .





**Εικόνα 22:** Εφαρμογή του αλγορίθμου SPADOMP για ένα διάνυσμα 500 στοιχείων με 20 μη μηδενικά. Οι σταθερές που χρησιμοποιήθηκαν είναι:  $\lambda=0.3$   $\mu=0.02$ .

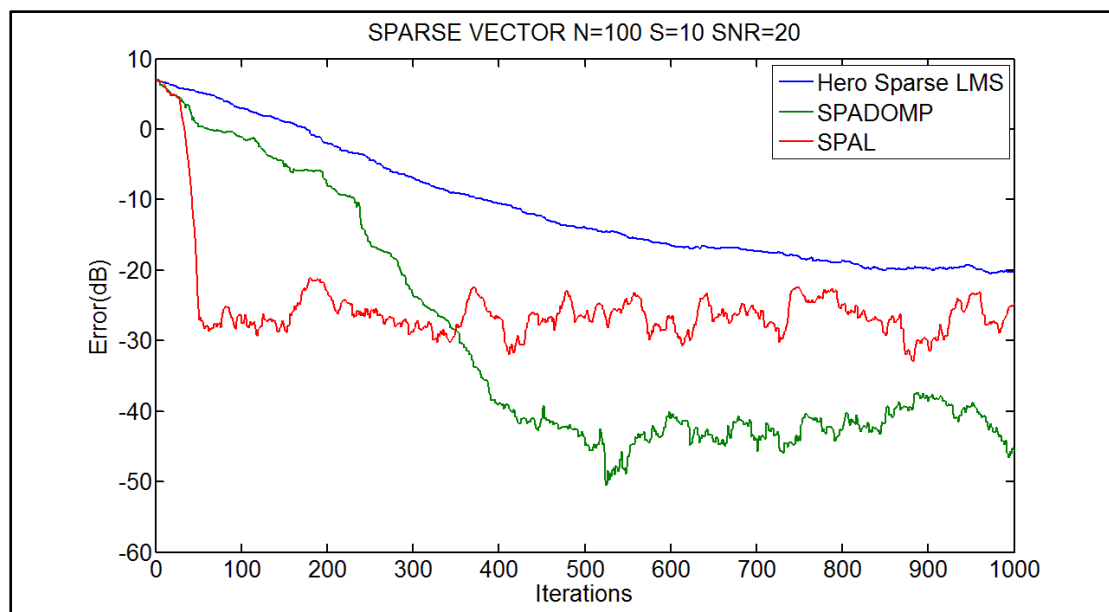
## 7. Σύγκριση των αλγορίθμων σε κοινά σενάρια

### 7.1 Εισαγωγή

Στα πειράματα που ακολουθούν το SNR που χρησιμοποιήθηκε είναι 20db. Σε κάθε γράφημα οι τρεις αλγόριθμοι προσεγγίζουν το ίδιο αραιό διάνυσμα. Επίσης ισχύουν οι ίδιες παραδοχές με τις προηγούμενες δοκιμές, όσον αφορά την τυχαία δημιουργία των αραιών διανυσμάτων και τη δημιουργία των τυχαίων διανυσμάτων εισόδου.

## 7.2 Σύγκριση των αλγορίθμων ως προς την ακρίβεια προσέγγισης για διάφορα μήκη αραιών διανυσμάτων

Η επιλογή των παραμέτρων στις παρακάτω δοκιμές έγινε έτσι ώστε για κάθε προσέγγιση να έχουμε το μικρότερο σφάλμα MSE.



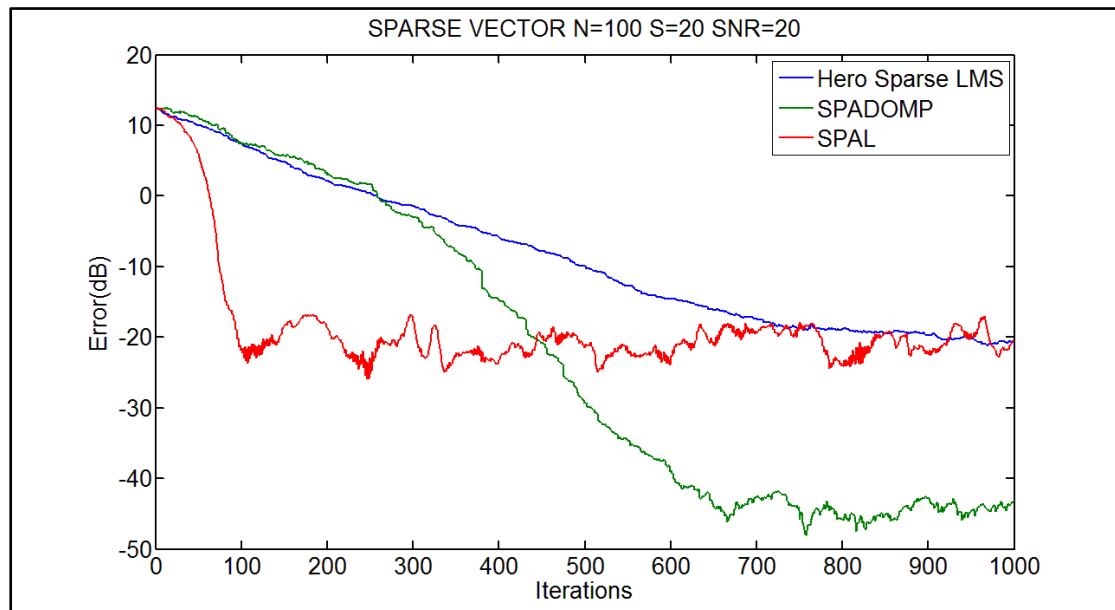
**Εικόνα 23:** Σύγκριση των αλγορίθμων για ένα διάνυσμα 100 στοιχείων με 10 μη μηδενικά.

Παρατηρούμε ότι σε αυτήν την περίπτωση με διαφορά πιο γρήγορος αλγόριθμος είναι ο SPAL, ο οποίος έχει τελικό μέσο σφάλμα περίπου -28db. Μετά από 350 επαναλήψεις ενώ ο SPAL δεν βελτιώνει σημαντικά την προσέγγισή του, ο αλγόριθμος SPADOMP πραγματοποιεί ακριβέστερη προσέγγιση του sparse διανύσματος και έτσι έχει μία τελική τιμή του MSE περίπου -43db. Για τον Hero Sparse LMS αλγόριθμο (απλούστερος τύπος εξίσωση (8)) η καλύτερη προσέγγιση που μπορεί να κάνει περιορίζεται στα -20 db και η ταχύτητά του σε σχέση με τους άλλους αλγορίθμους είναι κατά πολύ μικρότερη. Οι παράμετροι που χρησιμοποιήθηκαν είναι: για τον Hero Sparse LMS (απλούστερος τύπος εξίσωση (8)):  $\mu=0.01$  για τον SPADOMP  $\lambda=0.1$   $\mu=0.02$  και για τον SPAL:

- Το εύρος του hyperslab  $\epsilon=0.1*\sqrt{\text{noise\_variance}} = 0.1*0.1=0.01$  (εξίσωση (24))
- Η ακτίνα της  $l_1$  μπάλας και ισούται με  $S$  δηλαδή είναι ίση με το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων του sparse διανύσματος (εξίσωση (23))
- Το πλήθος των hyperslabs που συμμετέχουν στην εκτίμηση που γίνεται σε κάθε χρονική στιγμή  $n$ , είναι  $q=50$

(εξισώσεις (26), (27))

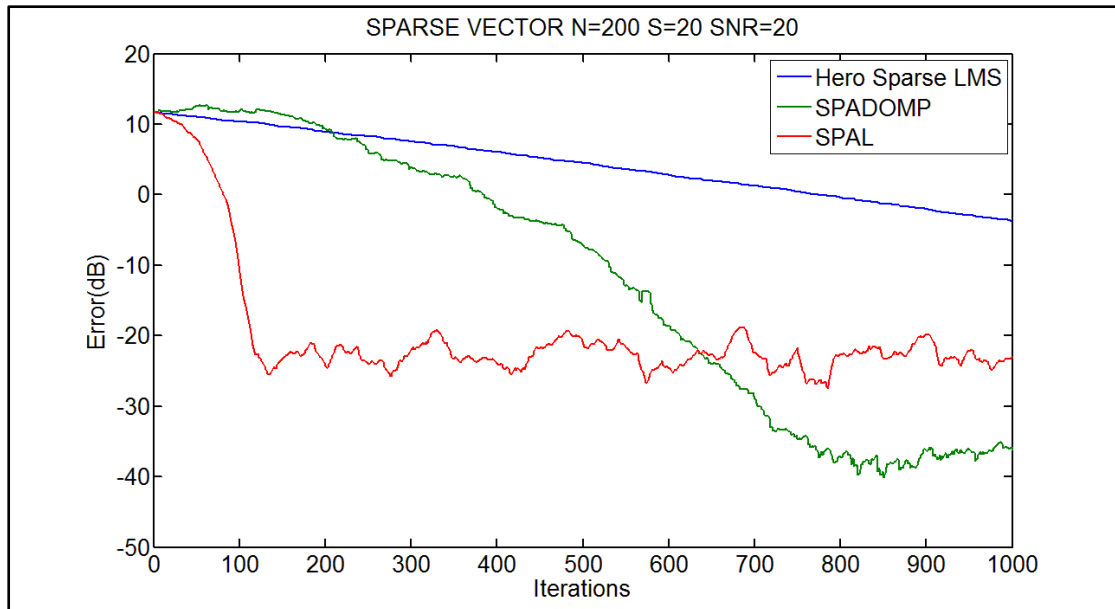
- Η μεταβλητή  $\epsilon_n$  που χρησιμοποιείται στη στάθμιση της  $l_1$  μπάλας, ώστε να μην γίνεται διαίρεση με το μηδέν ισούται με 0.0005,  $\epsilon_n = 0.0005$  (εξίσωση (32))



**Εικόνα 24:** Σύγκριση των αλγορίθμων για ένα διάνυσμα 100 στοιχείων με 20 μη μηδενικά.

Τα συμπεράσματα παραμένουν ίδια με το προηγούμενο παράδειγμα, επίσης οι τελικές τιμές των σφαλμάτων είναι περίπου ίδιες με τη διαφορά, ότι επειδή διπλασιάζονται τα μη μηδενικά στοιχεία του sparse διανύσματος οι αλγόριθμοι χρειάζονται περισσότερες επαναλήψεις για να επιτύχουν το ίδιο σφάλμα. Οι παράμετροι που χρησιμοποιήθηκαν είναι: για τον Hero Sparse LMS (απλούστερος τύπος εξίσωση (8)):  $\mu=0.01$  για τον SPADOMP  $\lambda=0.3$   $\mu=0.02$  και για τον SPAL:

- Το εύρος του hyperslab  $\epsilon=0.1*\sqrt{\text{noise\_variance}} = 0.1*0.1=0.01$  (εξίσωση (24))
- Η ακτίνα της  $l_1$  μπάλας και ισούται με  $S$  δηλαδή είναι ίση με το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων του sparse διανύσματος (εξίσωση (23))
- Το πλήθος των hyperslabs που συμμετέχουν στην εκτίμηση που γίνεται σε κάθε χρονική στιγμή  $n$ , είναι  $q=50$  (εξισώσεις (26), (27))
- Η μεταβλητή  $\epsilon_n$  που χρησιμοποιείται στη στάθμιση της  $l_1$  μπάλας, ώστε να μην γίνεται διαίρεση με το μηδέν ισούται με 0.0005,  $\epsilon_n = 0.0005$  (εξίσωση (32))

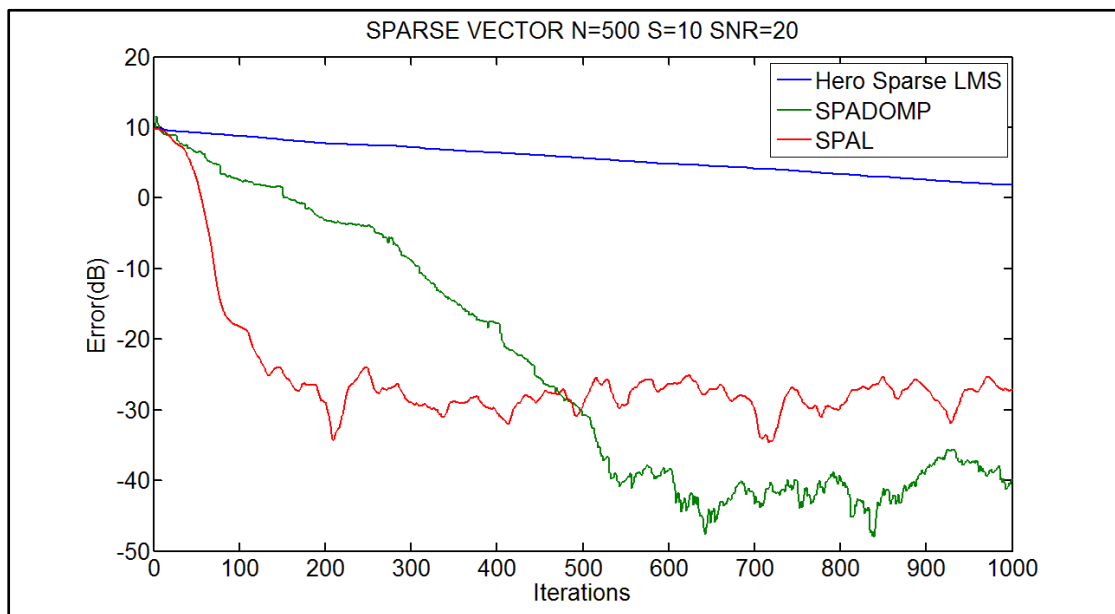


**Εικόνα 25:** Σύγκριση των αλγορίθμων για ένα διάνυσμα 200 στοιχείων με 20 μη μηδενικά.

Οι παράμετροι που χρησιμοποιήθηκαν είναι: για τον Hero Sparse LMS (απλούστερος τύπος εξίσωση (8)):  $\mu=0.00555$  για τον SPADOMP  $\lambda=0.33$   $\mu=0.02$  και για τον SPAL:

- Το εύρος του hyperslab  $\epsilon=0.1*\sqrt{\text{noise\_variance}} = 0.1*0.1=0.01$  (εξίσωση (24))
- Η ακτίνα της  $l_1$  μπάλας και ισούται με  $S$  δηλαδή είναι ίση με το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων του sparse διανύσματος (εξίσωση (23))
- Το πλήθος των hyperslabs που συμμετέχουν στην εκτίμηση που γίνεται σε κάθε χρονική στιγμή  $n$ , είναι  $q=50$  (εξισώσεις (26), (27))
- Η μεταβλητή  $\epsilon'_n$  που χρησιμοποιείται στη στάθμιση της  $l_1$  μπάλας, ώστε να μην γίνεται διαίρεση με το μηδέν ισούται με  $0.0005$ ,  $\epsilon'_n=0.0005$  (εξίσωση (32))

Οι αλγόριθμοι επειδή αυξάνεται το μήκος του αραιού διανύσματος καθυστερούν περισσότερο από τα προηγούμενα πειράματα. Ο SPAL εξακολουθεί να είναι με διαφορά ο γρηγορότερος και ο SPADOMP είναι ο πιο ακριβής και πετυχαίνει σφάλμα περίπου -37 dB. Ο SPAL έχει ακρίβεια περίπου -24 dB. Ο LMS προσεγγίζει και αυτός το αραιό διάνυσμα αλλά χρειάζεται περίπου 5000 επαναλήψεις για να φτάσει τα -20 dB. Για να έχουμε το ίδιο σφάλμα περίπου -24 dB ο αλγόριθμος SPAL χρειάζεται 110 επαναλήψεις και ο SPADOMP 650, ενώ ο Hero Sparse LMS χρειάζεται πολύ περισσότερες.

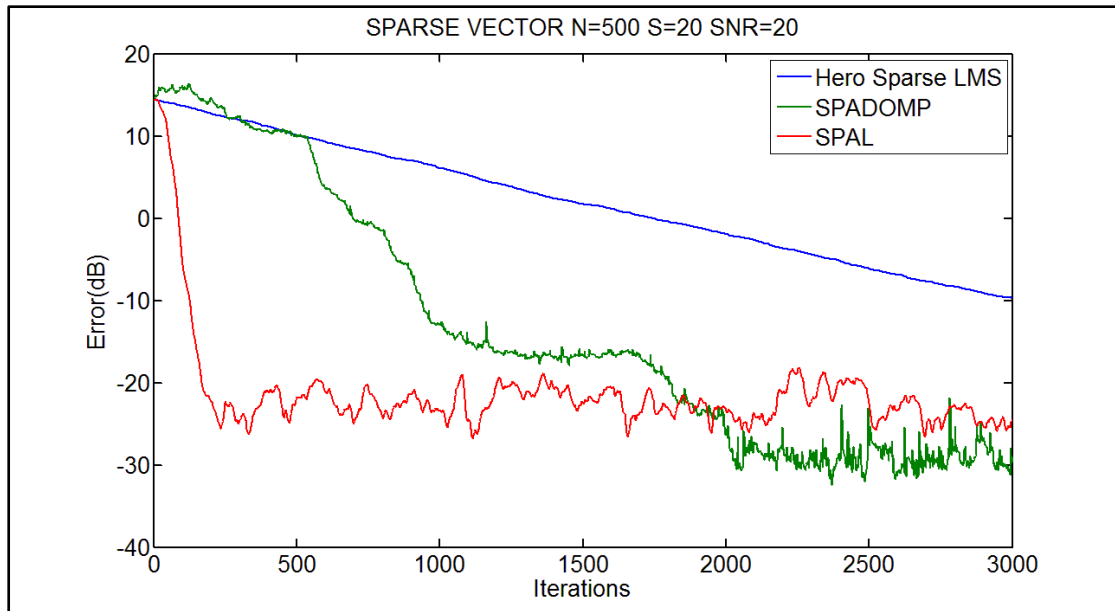


**Εικόνα 26:** Σύγκριση των αλγορίθμων για ένα διάνυσμα 500 στοιχείων με 10 μη μηδενικά.

Οι παράμετροι που χρησιμοποιήθηκαν είναι: για τον Hero Sparse LMS (απλούστερος τύπος εξίσωση (8)):  $\mu=0.00237$  για τον SPADOMP  $\lambda=0.3$   $\mu=0.02$  και για τον SPAL:

- Το εύρος του hyperslab  $\epsilon=0.1*\sqrt{\text{noise\_variance}} = 0.1*0.1=0.01$  (εξίσωση (24))
- Η ακτίνα της  $l_1$  μπάλας και ισούται με  $S$  δηλαδή είναι ίση με το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων του sparse διανύσματος (εξίσωση (23))
- Το πλήθος των hyperslabs που συμμετέχουν στην εκτίμηση που γίνεται σε κάθε χρονική στιγμή  $n$ , είναι  $q=50$  (εξισώσεις (26), (27))
- Η μεταβλητή  $\epsilon'_n$  που χρησιμοποιείται στη στάθμιση της  $l_1$  μπάλας, ώστε να μην γίνεται διαίρεση με το μηδέν ισούται με  $0.0005$ ,  $\epsilon'_n=0.0005$  (εξίσωση (32))

Οι προσεγγίσεις που κάνουν οι αλγόριθμοι και σε αυτό το παράδειγμα είναι όπως και στα προηγούμενα περίπου ίδιες. Η επανάληψη στην οποία έχουμε ίδια προσέγγιση από τον SPADOMP και τον SPAL είναι η  $500^n$ .



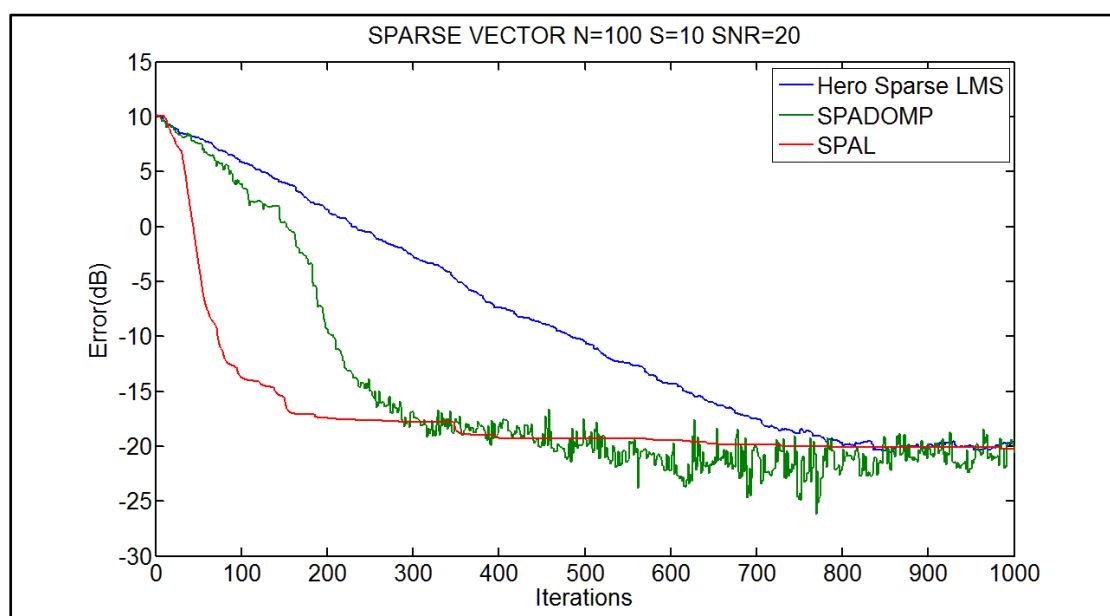
**Εικόνα 27:** Σύγκριση των αλγορίθμων για ένα διάνυσμα 500 στοιχείων με 20 μη μηδενικά.

Σε αυτήν τη περίπτωση χρειαζόμαστε 3000 επαναλήψεις για να συγκρίνουμε τους αλγορίθμους. Οι βέλτιστες προσεγγίσεις είναι περίπου ίδιες -28 db για τον SPAL και -30 db για τον SPADOMP. Ο SPAL είναι πιο γρήγορος και ο SPADOMP πιο ακριβής ο Hero Sparse LMS (απλούστερος τύπος εξίσωση (8)) χρειάζεται περισσότερες επαναλήψεις από 3000. Οι παράμετροι που χρησιμοποιήθηκαν είναι: για τον Hero Sparse LMS:  $\mu=0.00237$  για τον SPADOMP  $\lambda=0.1$   $\mu=0.02$  και για τον SPAL:

- Το εύρος του hyperslab  $\epsilon=0.1*\sqrt{\text{noise\_variance}} = 0.1*0.1=0.01$  (εξίσωση (24))
- Η ακτίνα της  $l_1$  μπάλας και ισούται με  $S$  δηλαδή είναι ίση με το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων του sparse διανύσματος (εξίσωση (23))
- Το πλήθος των hyperslabs που συμμετέχουν στην εκτίμηση που γίνεται σε κάθε χρονική στιγμή  $n$ , είναι  $q=50$  (εξισώσεις (26), (27))
- Η μεταβλητή  $\epsilon'_n$  που χρησιμοποιείται στη στάθμιση της  $l_1$  μπάλας, ώστε να μην γίνεται διαίρεση με το μηδέν ισούται με  $0.0005$ ,  $\epsilon'_n=0.0005$  (εξίσωση (32))

### 7.3 Σύγκριση των αλγορίθμων ως προς την ταχύτητα προσέγγισης διαφόρων αραιών διανυσμάτων

Σε αυτήν τη σειρά πειραμάτων χρησιμοποιούνται οι κατάλληλες παράμετροι στους αλγορίθμους ώστε και οι τρεις να βρίσκονται στο ίδιο πλατό (στο ίδιο περίπου MSE) μετά από κάποιον αριθμό επαναλήψεων ώστε να μελετηθεί η ταχύτητα με την οποία προσεγγίζουν το αραιό διάνυσμα. Η τιμή αυτή του MSE είναι -20dB και καθορίστηκε από τον αλγόριθμο Hero Sparse LMS (εξίσωση 8), γιατί δεν μπορεί να επιτευχθεί καλύτερη προσέγγιση απ' αυτόν.

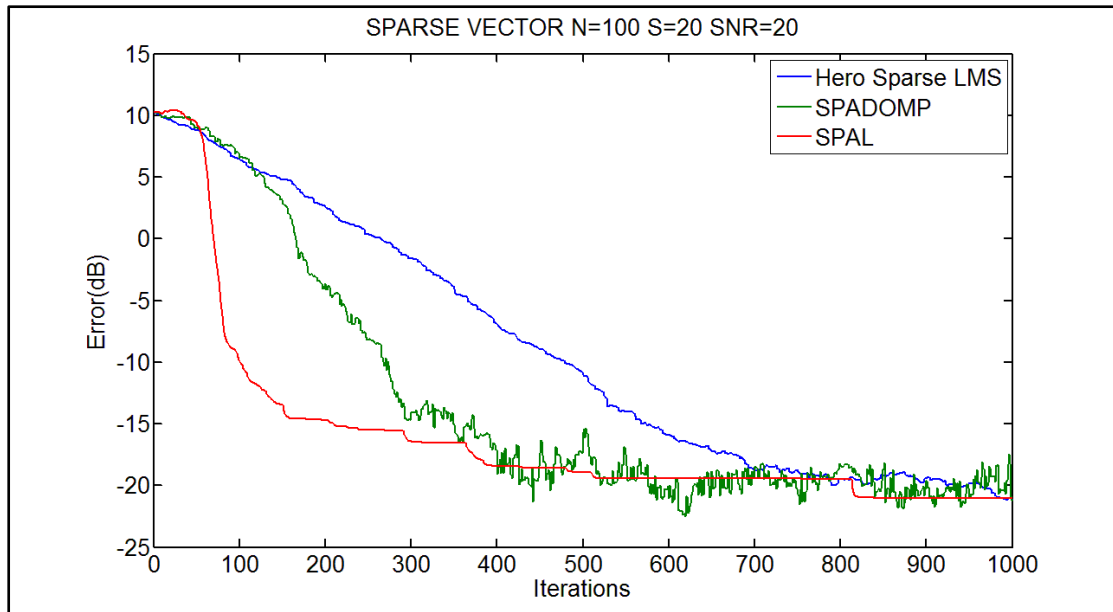


**Εικόνα 28:** Σύγκριση των αλγορίθμων για ένα διάνυσμα 100 στοιχείων με 10 μη μηδενικά.

Έτσι για να έχουμε μια προσέγγιση της τάξης των -20 dB χρειάζονται 150 επαναλήψεις από τον SPAL, 300 επαναλήψεις από τον SPADOMP και 800 επαναλήψεις από τον Hero Sparse LMS. Ο SPAL επομένως είναι πιο γρήγορος και σε αυτήν την περίπτωση. Οι σταθερές για το παράδειγμα αυτό είναι: για τον Hero Sparse LMS (απλούστερος τύπος εξίσωση (8))  $\mu=0.01$ , για τον SPADOMP  $\lambda=0.007$  και  $\mu=0.02$  και για τον SPAL :

- Το εύρος του hyperslab  $\varepsilon=3*\sqrt{\text{noise\_variance}} = 3*0.1=0.3$  (εξίσωση (24))
- Η ακτίνα της  $l_1$  μπάλας και ισούται με  $S$  δηλαδή είναι ίση με το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων του sparse διανύσματος (εξίσωση (23))

- Το πλήθος των hyperslabs που συμμετέχουν στην εκτίμηση που γίνεται σε κάθε χρονική στιγμή  $n$ , είναι  $q=200$  (εξισώσεις (26), (27))
- Η μεταβλητή  $\epsilon'_n$  που χρησιμοποιείται στη στάθμιση της  $l_1$  μπάλας, ώστε να μην γίνεται διαίρεση με το μηδέν ισούται με  $0.05$ ,  $\epsilon'_n=0.05$  (εξίσωση (32))



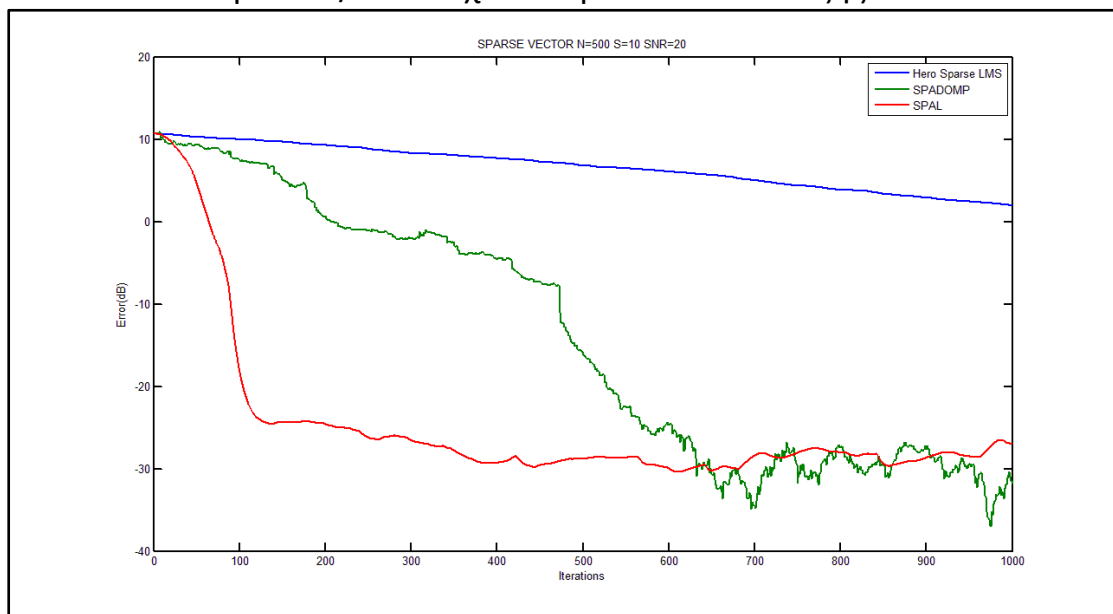
**Εικόνα 29:** Σύγκριση των αλγορίθμων για ένα διάνυσμα 100 στοιχείων με 20 μη μηδενικά.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα για να έχουμε μια προσέγγιση της τάξης των  $-20$  dB χρειάζονται 400 επαναλήψεις από τον SPAL και τον SPADOMP και 800 επαναλήψεις από τον Hero Sparse LMS (απλούστερος τύπος εξίσωση (8)). Οι σταθερές για το παράδειγμα αυτό είναι: για τον Hero Sparse LMS  $\mu=0.01$ , για τον SPADOMP  $\lambda=0.0068$  και  $\mu=0.02$  και για τον SPAL :

- Το εύρος του hyperslab  $\epsilon=3*\sqrt{\text{noise\_variance}} = 3*0.1=0.3$  (εξίσωση (24))
- Η ακτίνα της  $l_1$  μπάλας και ισούται με  $S$  δηλαδή είναι ίση με το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων του sparse διανύσματος (εξίσωση (23))
- Το πλήθος των hyperslabs που συμμετέχουν στην εκτίμηση που γίνεται σε κάθε χρονική στιγμή  $n$ , είναι  $q=200$  (εξισώσεις (26), (27))
- Η μεταβλητή  $\epsilon'_n$  που χρησιμοποιείται στη στάθμιση της  $l_1$  μπάλας, ώστε να μην γίνεται διαίρεση με το μηδέν ισούται με  $0.01$ ,  $\epsilon'_n=0.01$  (εξίσωση (32))



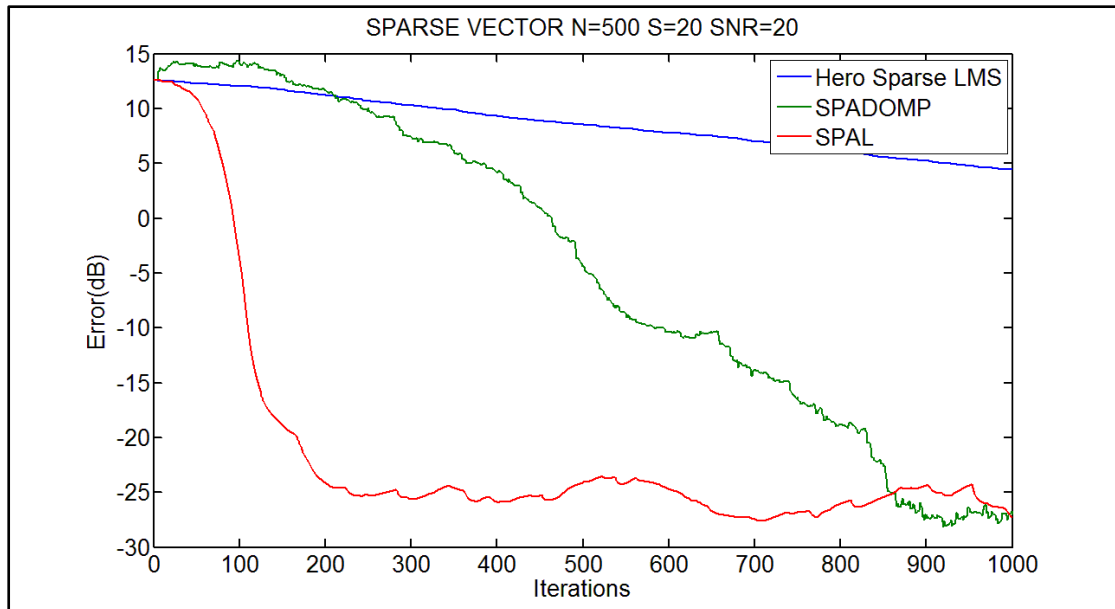
Για ένα διάνυσμα 500/10 στοιχείων προκύπτουν τα εξής:



**Εικόνα 30:** Σύγκριση των αλγορίθμων για ένα διάνυσμα 500 στοιχείων με 10 μη μηδενικά.

Με τον αλγόριθμο SPAL χρειάζονται 350 επαναλήψεις ενώ ο SPADOMP χρειάζεται 650 για μια προσέγγιση των -30 db. Ο Hero Sparse LMS (απλούστερος τύπος εξίσωση (8)) συγκλίνει πολύ αργά και χρειάζεται πολύ περισσότερες επαναλήψεις, περίπου 5000 για να έχουμε σφάλμα περίπου -20 db. Οι σταθερές για το παράδειγμα αυτό είναι: για τον Hero Sparse LMS  $\mu=0.00237$ , για τον SPADOMP  $\lambda=0.07$  και  $\mu=0.02$  και για τον SPAL :

- Το εύρος του hyperslab  $\varepsilon=2.7*\text{sqrt}(\text{noise\_variance}) = 2.7*0.1=0.27$ (εξίσωση (24))
- Η ακτίνα της  $l_1$  μπάλας και ισούται με  $S$  δηλαδή είναι ίση με το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων του sparse διανύσματος (εξίσωση (23))
- Το πλήθος των hyperslabs που συμμετέχουν στην εκτίμηση που γίνεται σε κάθε χρονική στιγμή  $n$ , είναι  $q=250$  (εξισώσεις (26), (27))
- Η μεταβλητή  $\varepsilon'_n$  που χρησιμοποιείται στη στάθμιση της  $l_1$  μπάλας, ώστε να μην γίνεται διαίρεση με το μηδέν ισούται με 0.05,  $\varepsilon'_n=0.05$  (εξίσωση (32))



**Εικόνα 31:** Σύγκριση των αλγορίθμων για ένα διάνυσμα 500 στοιχείων με 20 μη μηδενικά.

Για τον αλγόριθμο SPAL χρειάζονται μόνο 200 επαναλήψεις για να υπάρχει ένα σφάλμα περίπου -25db ενώ για τον αλγόριθμο SPADOMP χρειάζονται για την ίδια προσέγγιση 850 περίπου επαναλήψεις. Ο αλγόριθμος Hero Sparse LMS (απλούστερος τύπος εξίσωση (8)) προσεγγίζει πολύ αργά το αραιό διάνυσμα και χρειάζονται πολύ περισσότερες επαναλήψεις συγκριτικά με τους άλλους αλγορίθμους. Γενικά διαπιστώνουμε από όλες τις δοκιμές ότι η προσέγγιση του SPAL είναι με διαφορά η ταχύτερη και με μικρό σφάλμα. Η προσέγγιση του SPADOMP είναι αρκετά πιο αργή αλλά ακριβέστερη και ο Hero LMS αλγόριθμος υστερεί και σε ταχύτητα και ακρίβεια.

Οι σταθερές για το παράδειγμα αυτό είναι: για τον LMS  $\mu=0.00237$ , για τον SPADOMP  $\lambda=0.3$  και  $\mu=0.02$  και για τον SPAL :

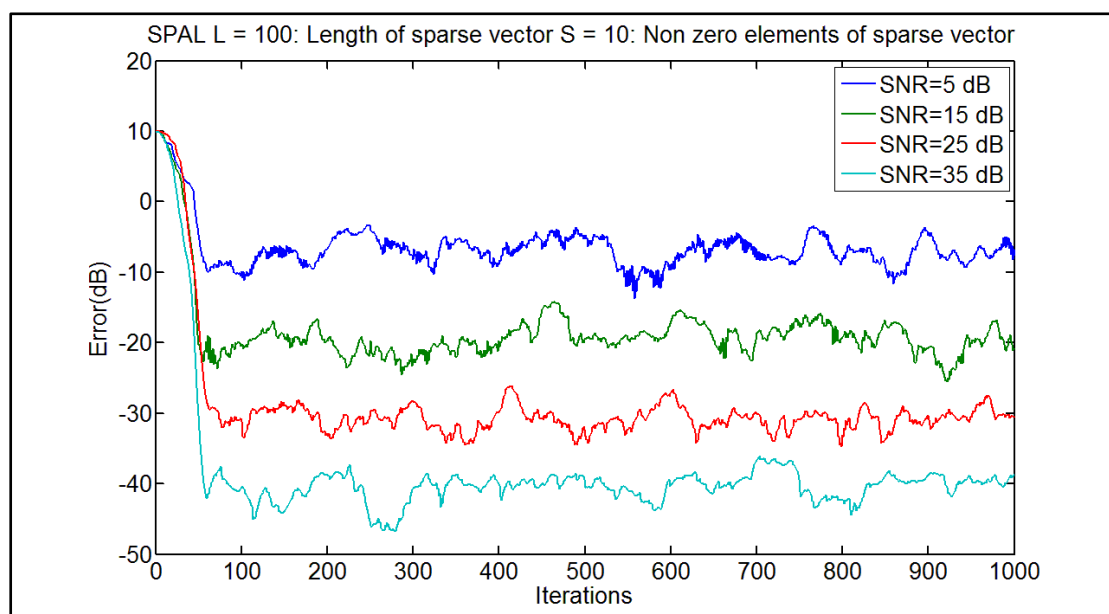
- Το εύρος του hyperslab  $\varepsilon=2.5*\sqrt{\text{noise\_variance}} = 2.5*0.1=0.25$  (εξίσωση (24))
- Η ακτίνα της  $l_1$  μπάλας και ισούται με  $S$  δηλαδή είναι ίση με το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων του sparse διανύσματος (εξίσωση (23))
- Το πλήθος των hyperslabs που συμμετέχουν στην εκτίμηση που γίνεται σε κάθε χρονική στιγμή  $n$ , είναι  $q=200$  (εξισώσεις (26), (27))
- Η μεταβλητή  $\varepsilon_n$  που χρησιμοποιείται στη στάθμιση της  $l_1$  μπάλας, ώστε να μην γίνεται διαίρεση με το μηδέν ισούται με  $0.005$ ,  $\varepsilon_n=0.005$  (εξίσωση (32))

## 8. Εφαρμογή των αλγορίθμων για διαφορετικά SNR και διαφορετικά μήκη αραιών διανυσμάτων

### 8.1 Εισαγωγή

Μέσω του SNR που επιλέγουμε καθορίζεται η διακύμανση  $\sigma_n^2$  του λευκού γκαουσιανού προσθετικού θορύβου, από τον τύπο:  $SNR = \frac{A}{\sigma_n^2}$  όπου A: το πλάτος του σήματος εισόδου που είναι 1 (2-PAM). Στις εφαρμογές που ακολουθούν η επιλογή των παραμέτρων έγινε έτσι ώστε να έχουμε το μικρότερο MSE και την ταχύτερη προσέγγιση.

### 8.2 Αλγόριθμος SPAL

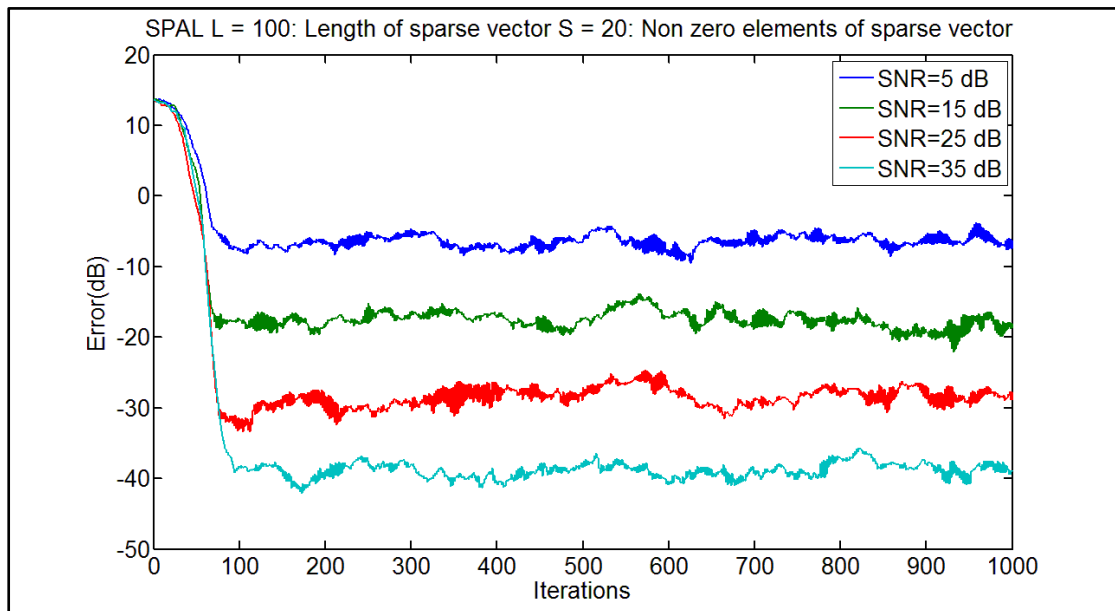


**Εικόνα 32:** Διαφορετικά SNR για ένα αραιό διάνυσμα 100 στοιχείων με 10 μη μηδενικά.

Οι παράμετροι για κάθε καμπύλη με το αντίστοιχο SNR είναι:

- Το εύρος του hyperslab  $\epsilon = 0.1 * \sqrt{\text{noise\_variance}} = 0.1 * 0.1 = 0.01$  (εξίσωση (24))

- Η ακτίνα της  $l_1$  μπάλας και ισούται με  $S$  δηλαδή είναι ίση με το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων του sparse διανύσματος (εξίσωση (23))
- Το πλήθος των hyperslabs που συμμετέχουν στην εκτίμηση που γίνεται σε κάθε χρονική στιγμή  $n$ , είναι  $q=100$  (εξισώσεις (26), (27))
- Η μεταβλητή  $\epsilon_n$  που χρησιμοποιείται στη στάθμιση της  $l_1$  μπάλας, ώστε να μην γίνεται διαίρεση με το μηδέν ισούται με 0.005,  $\epsilon_n = 0.005$  (εξίσωση (32))

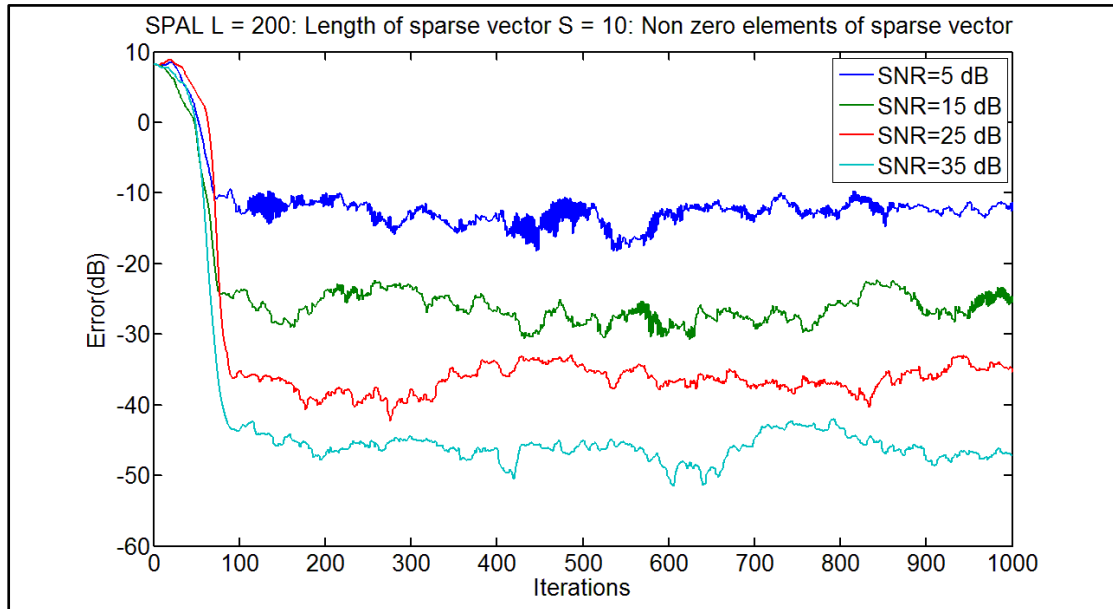


**Εικόνα 33:** Διαφορετικά SNR για ένα αραιό διάνυσμα 100 στοιχείων με 20 μη μηδενικά.

Οι παράμετροι για κάθε καμπύλη με το αντίστοιχο SNR είναι:

- Το εύρος του hyperslab  $\epsilon = 0.1 * \sqrt{\text{noise\_variance}} = 0.1 * 0.1 = 0.01$  (εξίσωση (24))
- Η ακτίνα της  $l_1$  μπάλας και ισούται με  $S$  δηλαδή είναι ίση με το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων του sparse διανύσματος (εξίσωση (23))
- Το πλήθος των hyperslabs που συμμετέχουν στην εκτίμηση που γίνεται σε κάθε χρονική στιγμή  $n$ , είναι  $q=100$  (εξισώσεις (26), (27))

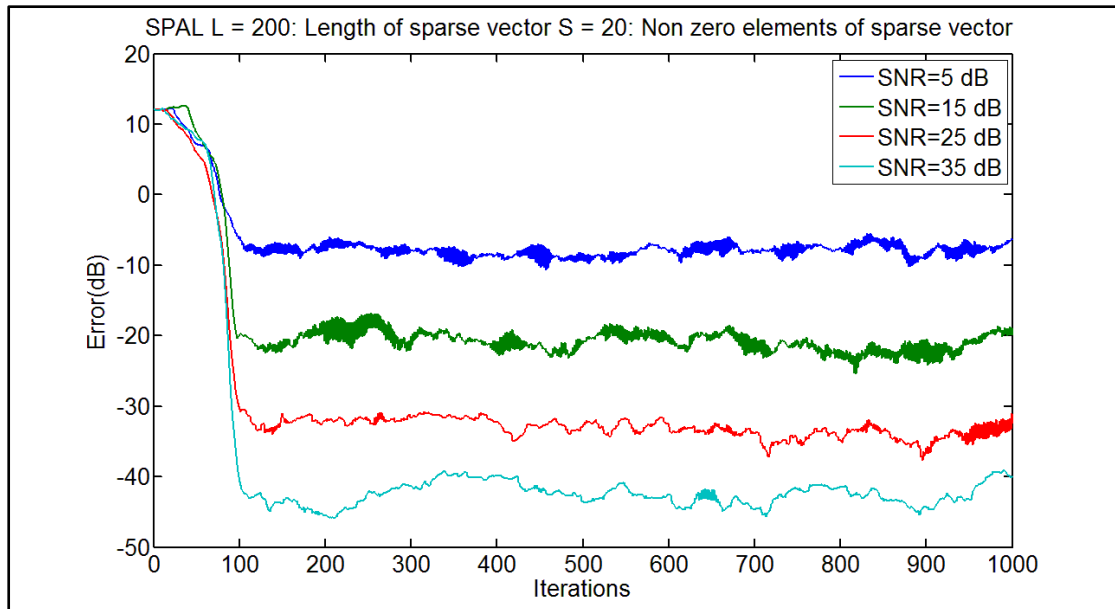
- Η μεταβλητή  $\epsilon'_n$  που χρησιμοποιείται στη στάθμιση της  $l_1$  μπάλας, ώστε να μην γίνεται διαίρεση με το μηδέν ισούται με 0.005,  $\epsilon'_n = 0.005$  (εξίσωση (32))



**Εικόνα 34:** Διαφορετικά SNR για ένα αραιό διάνυσμα 200 στοιχείων με 10 μη μηδενικά.

Οι παράμετροι για κάθε καμπύλη με το αντίστοιχο SNR είναι:

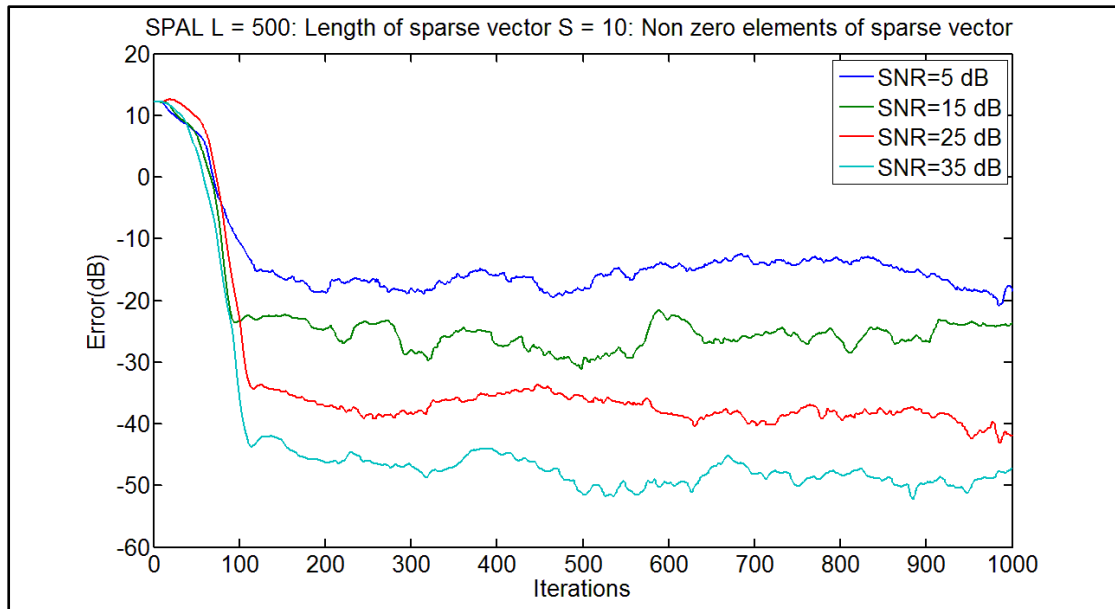
- Το εύρος του hyperslab  $\epsilon = 0.1 * \sqrt{\text{noise\_variance}} = 0.1 * 0.1 = 0.01$  (εξίσωση (24))
- Η ακτίνα της  $l_1$  μπάλας και ισούται με S δηλαδή είναι ίση με το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων του sparse διανύσματος (εξίσωση (23))
- Το πλήθος των hyperslabs που συμμετέχουν στην εκτίμηση που γίνεται σε κάθε χρονική στιγμή n, είναι  $q=100$  (εξισώσεις (26), (27))
- Η μεταβλητή  $\epsilon'_n$  που χρησιμοποιείται στη στάθμιση της  $l_1$  μπάλας, ώστε να μην γίνεται διαίρεση με το μηδέν ισούται με 0.005,  $\epsilon'_n = 0.005$  (εξίσωση (32))



**Εικόνα 35:** Διαφορετικά SNR για ένα αραιό διάνυσμα 200 στοιχείων με 20 μη μηδενικά.

Οι παράμετροι για κάθε καμπύλη με το αντίστοιχο SNR είναι:

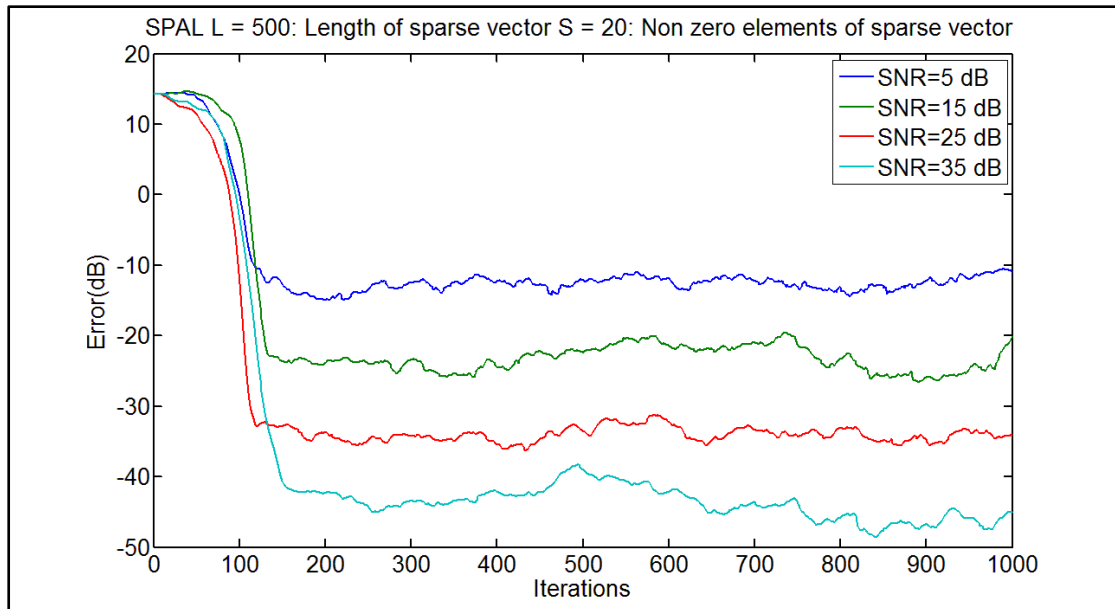
- Το εύρος του hyperslab  $\varepsilon = 0.1 \cdot \sqrt{\text{noise\_variance}} = 0.1 \cdot 0.1 = 0.01$  (εξίσωση (24))
- Η ακτίνα της  $l_1$  μπάλας και ισούται με  $S$  δηλαδή είναι ίση με το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων του sparse διανύσματος (εξίσωση (23))
- Το πλήθος των hyperslabs που συμμετέχουν στην εκτίμηση που γίνεται σε κάθε χρονική στιγμή  $n$ , είναι  $q=100$  (εξισώσεις (26), (27))
- Η μεταβλητή  $\varepsilon'_n$  που χρησιμοποιείται στη στάθμιση της  $l_1$  μπάλας, ώστε να μην γίνεται διαίρεση με το μηδέν ισούται με  $0.005$ ,  $\varepsilon'_n = 0.005$  (εξίσωση (32))



**Εικόνα 36:** Διαφορετικά SNR για ένα αραιό διάνυσμα 500 στοιχείων με 10 μη μηδενικά.

Οι παράμετροι για κάθε καμπύλη με το αντίστοιχο SNR είναι:

- Το εύρος του hyperslab  $\varepsilon=0.1*\sqrt{\text{noise\_variance}} = 0.1*0.1=0.01$  (εξίσωση (24))
- Η ακτίνα της  $l_1$  μπάλας και ισούται με  $S$  δηλαδή είναι ίση με το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων του sparse διανύσματος (εξίσωση (23))
- Το πλήθος των hyperslabs που συμμετέχουν στην εκτίμηση που γίνεται σε κάθε χρονική στιγμή  $n$ , είναι  $q=200$  (εξισώσεις (26), (27))
- Η μεταβλητή  $\varepsilon'_n$  που χρησιμοποιείται στη στάθμιση της  $l_1$  μπάλας, ώστε να μην γίνεται διαίρεση με το μηδέν ισούται με  $0.0005$ ,  $\varepsilon'_n=0.0005$  (εξίσωση (32))

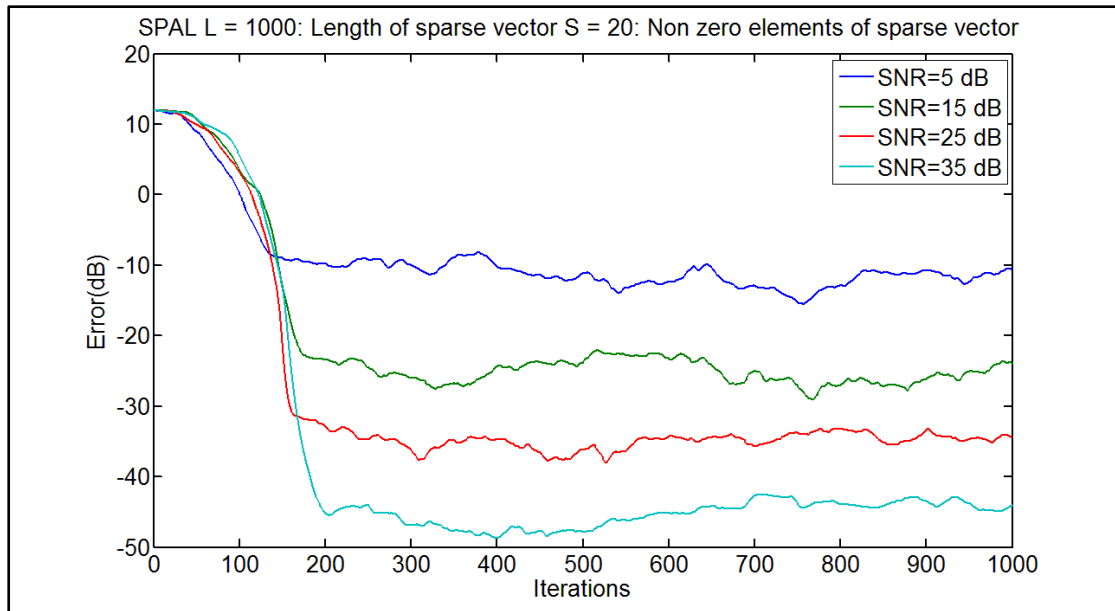


**Εικόνα 37:** Διαφορετικά SNR για ένα αραιό διάνυσμα 500 στοιχείων με 20 μη μηδενικά.

Οι παράμετροι για κάθε καμπύλη με το αντίστοιχο SNR είναι:

- Το εύρος του hyperslab  $\varepsilon=0.1*\sqrt{\text{noise\_variance}} = 0.1*0.1=0.01$  (εξίσωση (24))
- Η ακτίνα της  $l_1$  μπάλας και ισούται με  $S$  δηλαδή είναι ίση με το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων του sparse διανύσματος (εξίσωση (23))
- Το πλήθος των hyperslabs που συμμετέχουν στην εκτίμηση που γίνεται σε κάθε χρονική στιγμή  $n$ , είναι  $q=200$  (εξισώσεις (26), (27))
- Η μεταβλητή  $\varepsilon'_n$  που χρησιμοποιείται στη στάθμιση της  $l_1$  μπάλας, ώστε να μην γίνεται διαίρεση με το μηδέν ισούται με  $0.0005$ ,  $\varepsilon'_n=0.0005$  (εξίσωση (32))





**Εικόνα 38:** Διαφορετικά SNR για ένα αραιό διάνυσμα 1000 στοιχείων με 20 μη μηδενικά.

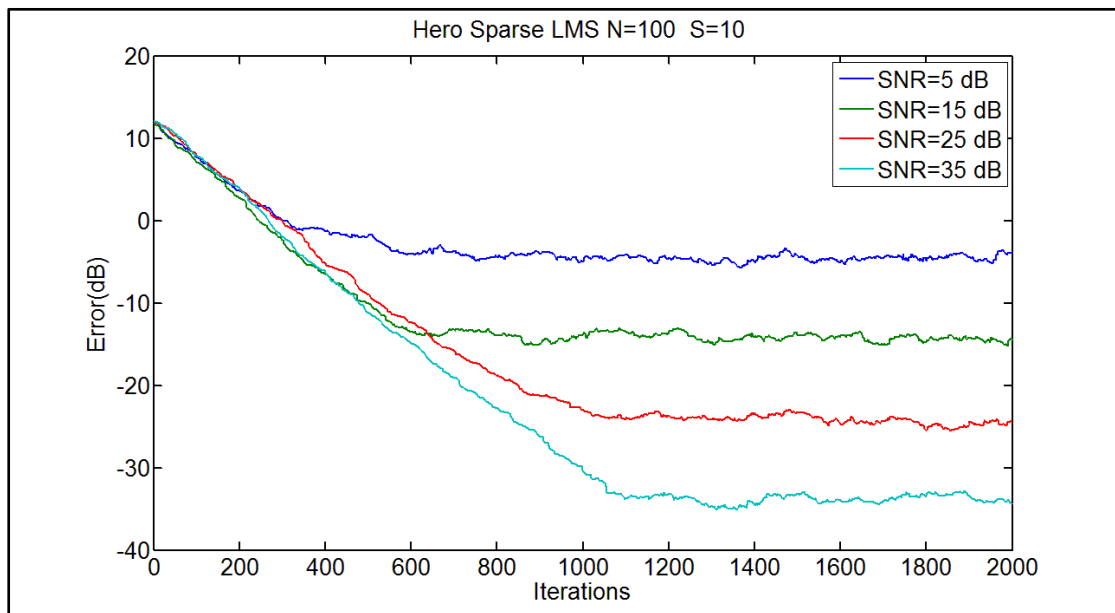
Οι παράμετροι για κάθε καμπύλη με το αντίστοιχο SNR είναι:

- Το εύρος του hyperslab  $\varepsilon=0.1*\sqrt{\text{noise\_variance}} = 0.1*0.1=0.01$  (εξίσωση (24))
- Η ακτίνα της  $l_1$  μπάλας και ισούται με  $S$  δηλαδή είναι ίση με το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων του sparse διανύσματος (εξίσωση (23))
- Το πλήθος των hyperslabs που συμμετέχουν στην εκτίμηση που γίνεται σε κάθε χρονική στιγμή  $n$ , είναι  $q=200$  (εξισώσεις (26), (27))
- Η μεταβλητή  $\varepsilon'_n$  που χρησιμοποιείται στη στάθμιση της  $l_1$  μπάλας, ώστε να μην γίνεται διαίρεση με το μηδέν ισούται με  $0.0005$ ,  $\varepsilon'_n=0.0005$  (εξίσωση (32))

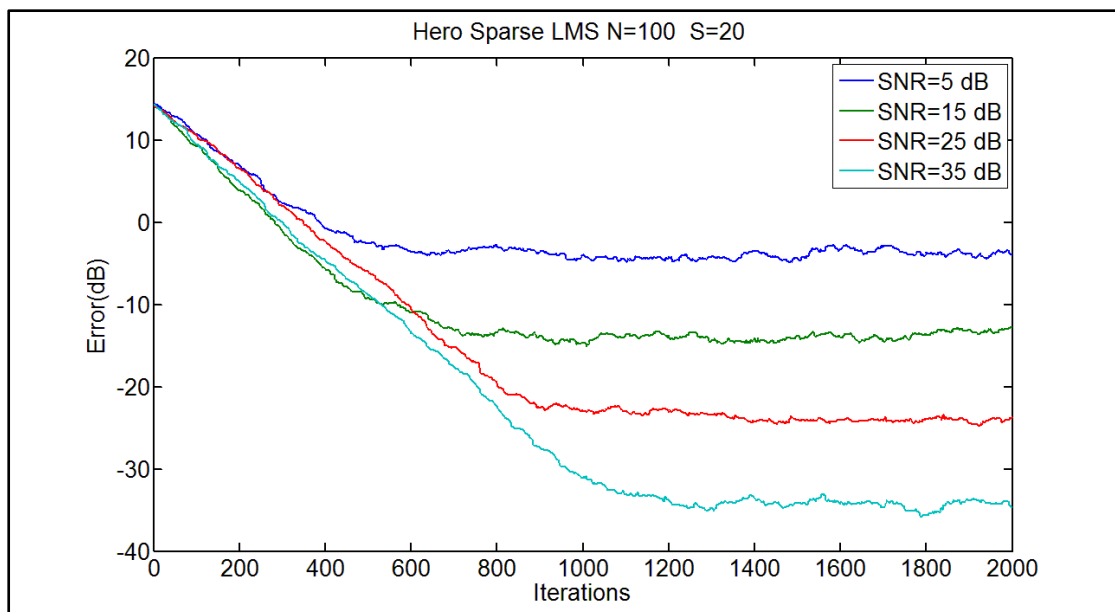
Συμπερασματικά για SNR 5dB έχουμε μια προσέγγιση του αραιού διανύσματος με ακρίβεια περίπου -10dB, για SNR 15dB έχουμε μια προσέγγιση με ακρίβεια περίπου -20 dB, για SNR 25dB έχουμε μια προσέγγιση με MSE που κυμαίνεται από -35 dB μέχρι -30 dB και για SNR 35dB έχουμε μια προσέγγιση από -45 dB μέχρι -40 dB, ανεξάρτητα από το μήκος του αραιού διανύσματος.

### 8.3 Αλγόριθμος Hero Sparse LMS:

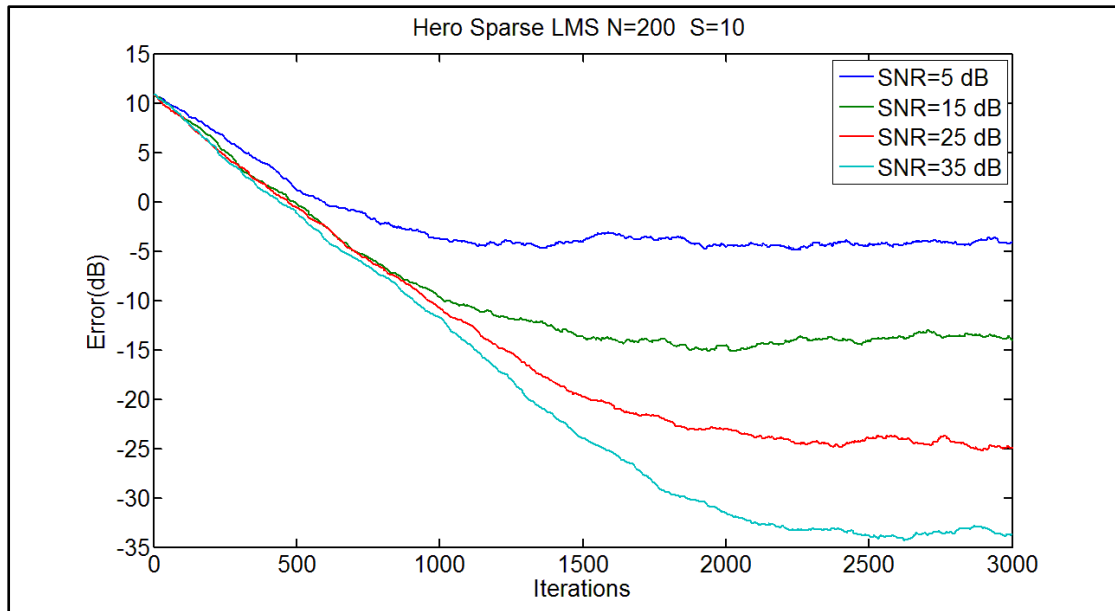
Από την εφαρμογή του απλούστερου αναδρομικού τύπου LMS (εξίσωση (8)) για διάφορα διανύσματα προκύπτουν τα παρακάτω γραφήματα:



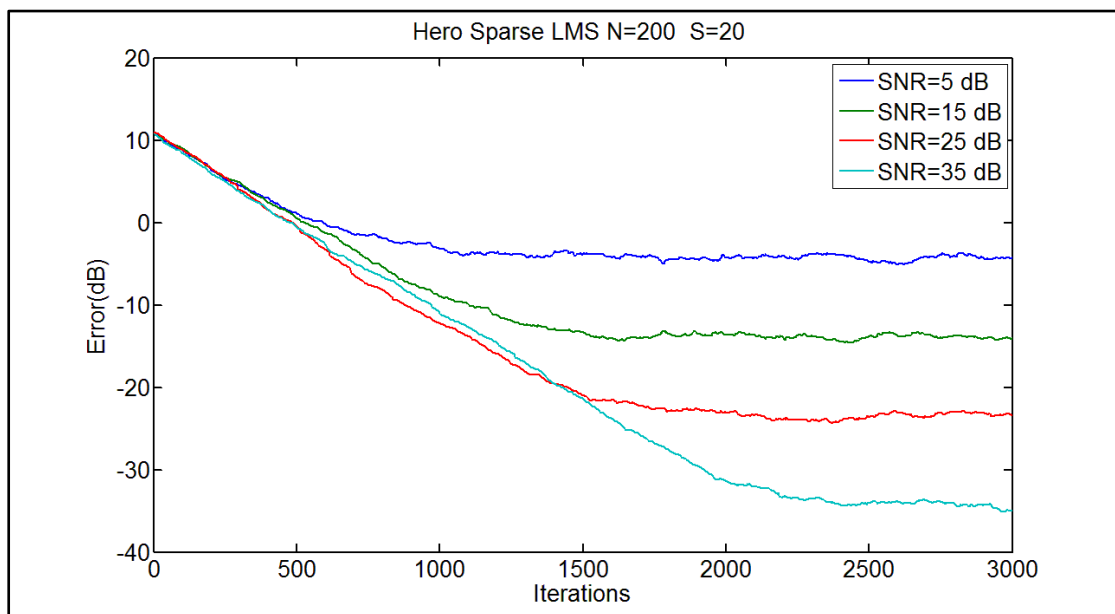
**Εικόνα 39:** Διαφορετικά SNR για ένα αραιό διάνυσμα 100 στοιχείων με 10 μη μηδενικά. Η παράμετρος  $\mu$  είναι  $\mu=0.011$



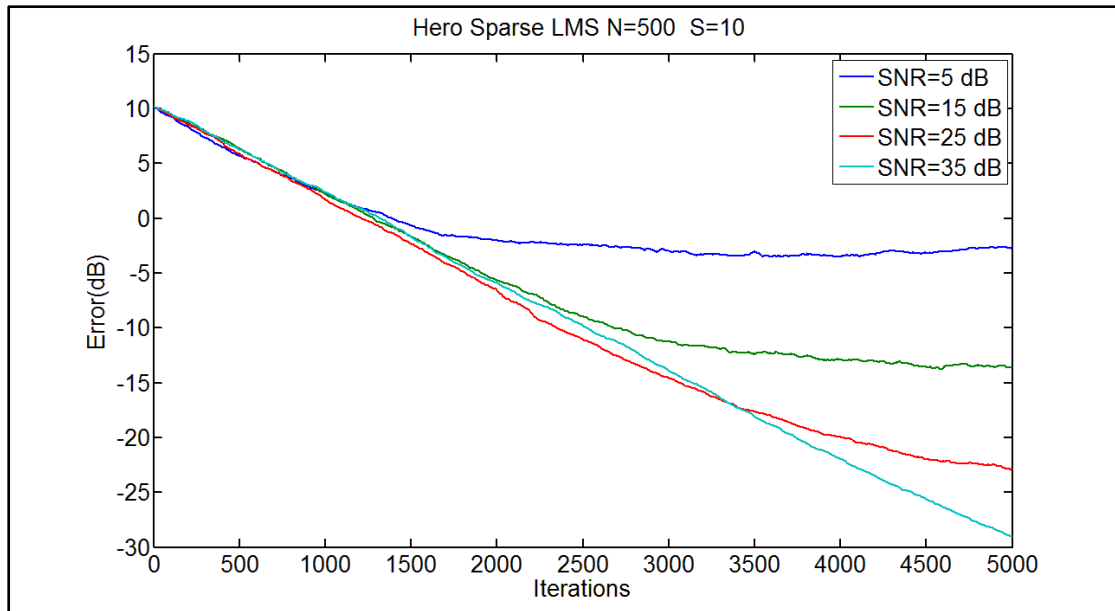
**Εικόνα 40:** Διαφορετικά SNR για ένα αραιό διάνυσμα 100 στοιχείων με 20 μη μηδενικά. Η παράμετρος  $\mu$  είναι  $\mu=0.011$



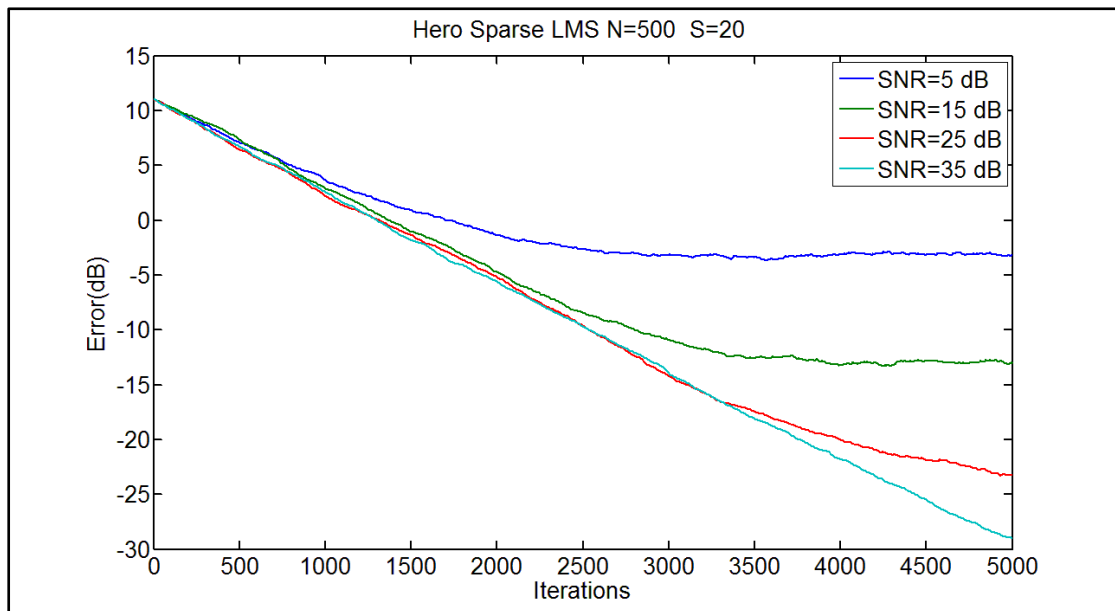
**Εικόνα 41:** Διαφορετικά SNR για ένα αραιό διάνυσμα 200 στοιχείων με 10 μη μηδενικά. Η παράμετρος  $\mu$  είναι  $\mu=0.00555$



**Εικόνα 42:** Διαφορετικά SNR για ένα αραιό διάνυσμα 200 στοιχείων με 20 μη μηδενικά. Η παράμετρος  $\mu$  είναι  $\mu=0.00555$



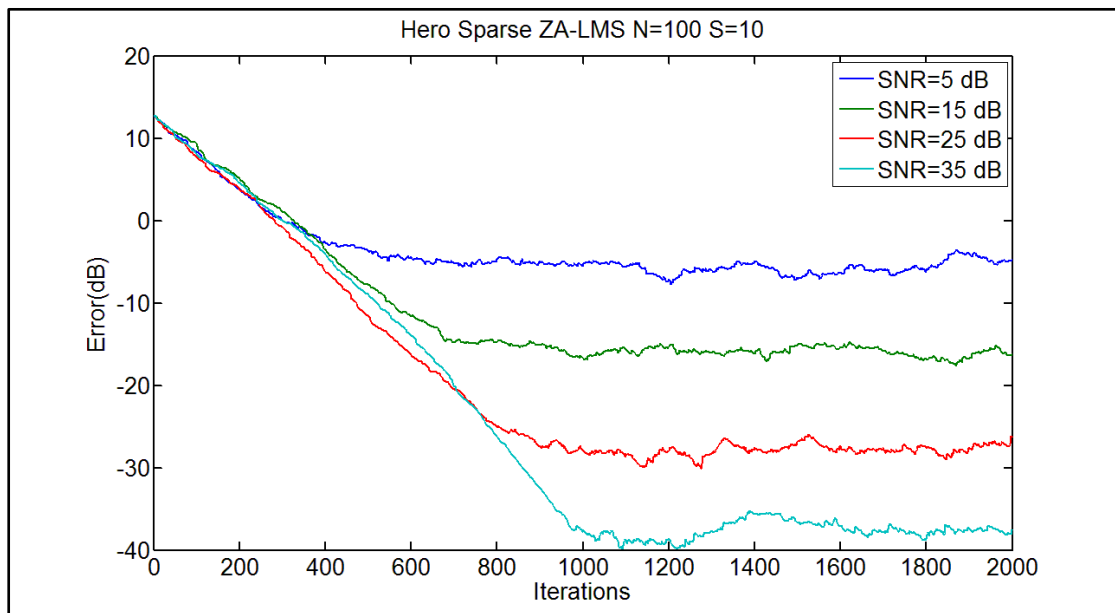
**Εικόνα 43:** Διαφορετικά SNR για ένα αραιό δάνυσμα 500 στοιχείων με 10 μη μηδενικά. Η παράμετρος  $\mu$  είναι  $\mu=0.00237$



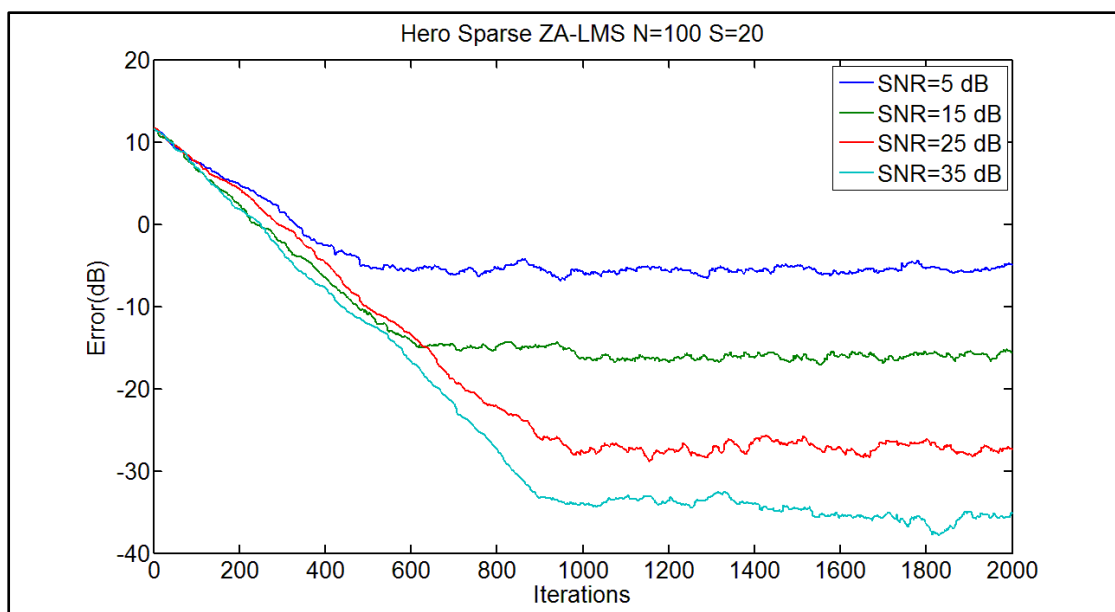
**Εικόνα 44:** Διαφορετικά SNR για ένα αραιό δάνυσμα 500 στοιχείων με 20 μη μηδενικά. Η παράμετρος  $\mu$  είναι  $\mu=0.00237$

## 8.4 Αλγόριθμος ZA-LMS:

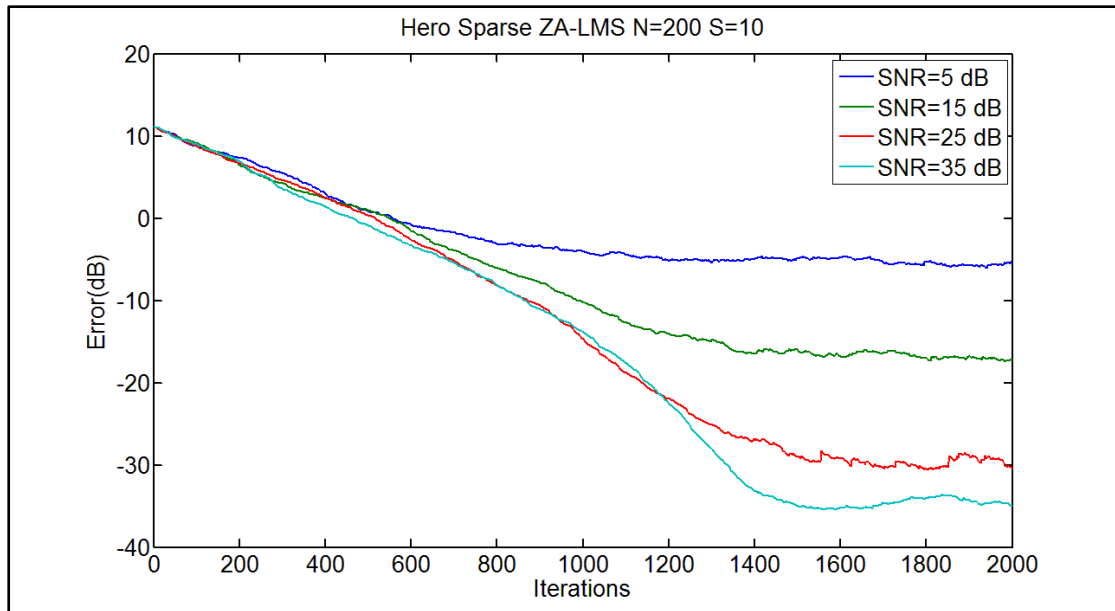
Από την εφαρμογή του αναδρομικού τύπου ZA-LMS (εξίσωση (11)) για διάφορα διανύσματα προκύπτουν τα παρακάτω γραφήματα:



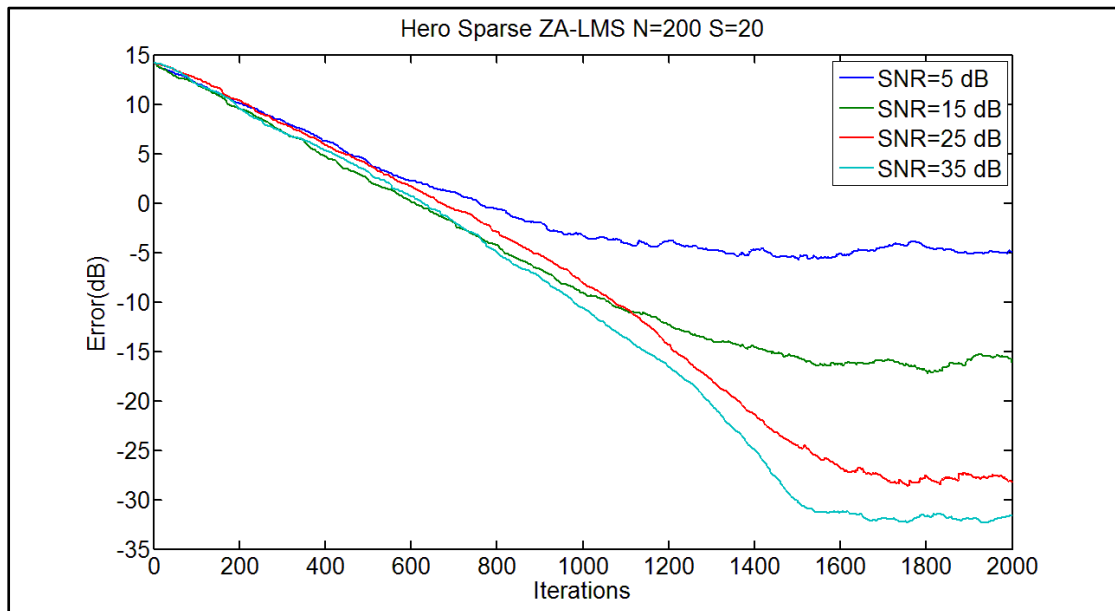
**Εικόνα 45:** Διαφορετικά SNR για ένα αραιό διάνυσμα 100 στοιχείων με 10 μη μηδενικά. Οι παράμετροι είναι  $\mu=0.01$   $\rho=0.00003$ .



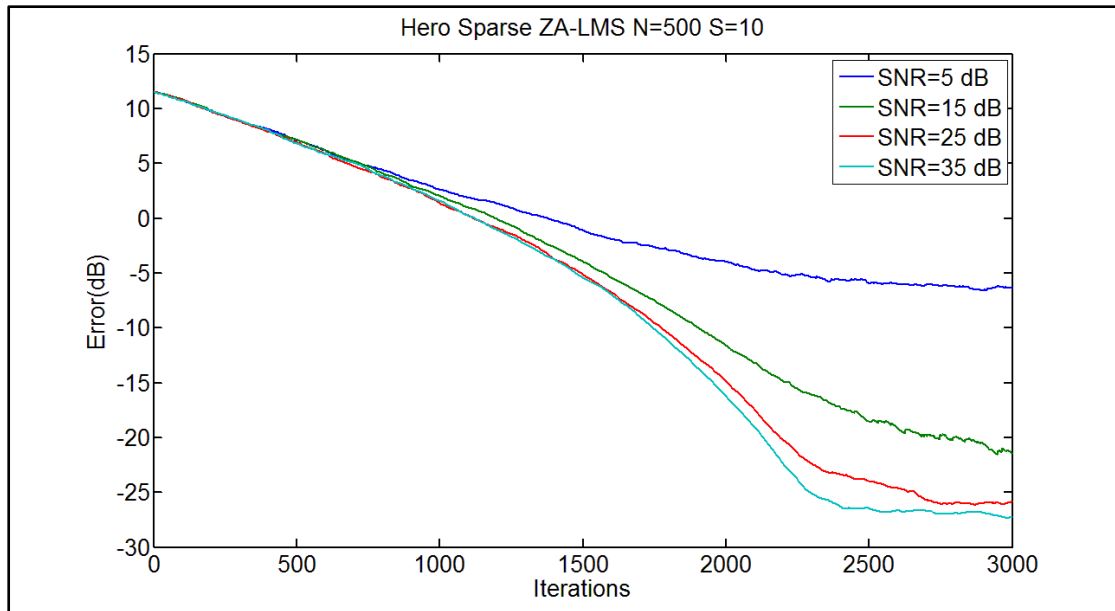
**Εικόνα 46:** Διαφορετικά SNR για ένα αραιό διάνυσμα 100 στοιχείων με 20 μη μηδενικά. Οι παράμετροι είναι  $\mu=0.01$   $\rho=0.00003$ .



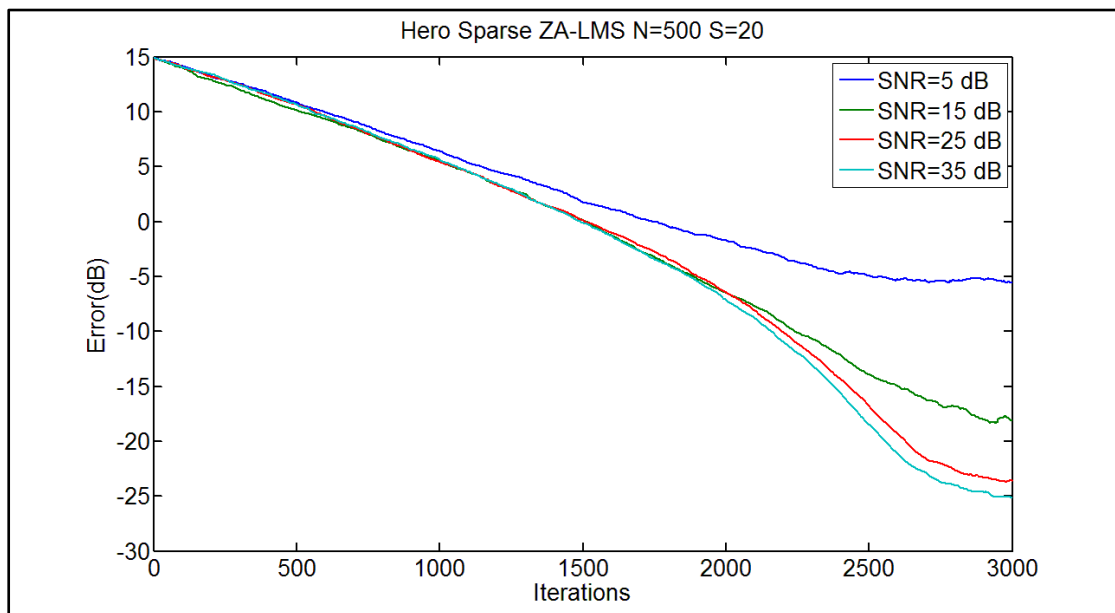
**Εικόνα 47:** Διαφορετικά SNR για ένα αραιό διάνυσμα 200 στοιχείων με 10 μη μηδενικά. Οι παράμετροι είναι  $\mu=0.00555$   $\rho=0.00003$ .



**Εικόνα 48:** Διαφορετικά SNR για ένα αραιό διάνυσμα 200 στοιχείων με 20 μη μηδενικά. Οι παράμετροι είναι  $\mu=0.00555$   $\rho=0.00003$ .



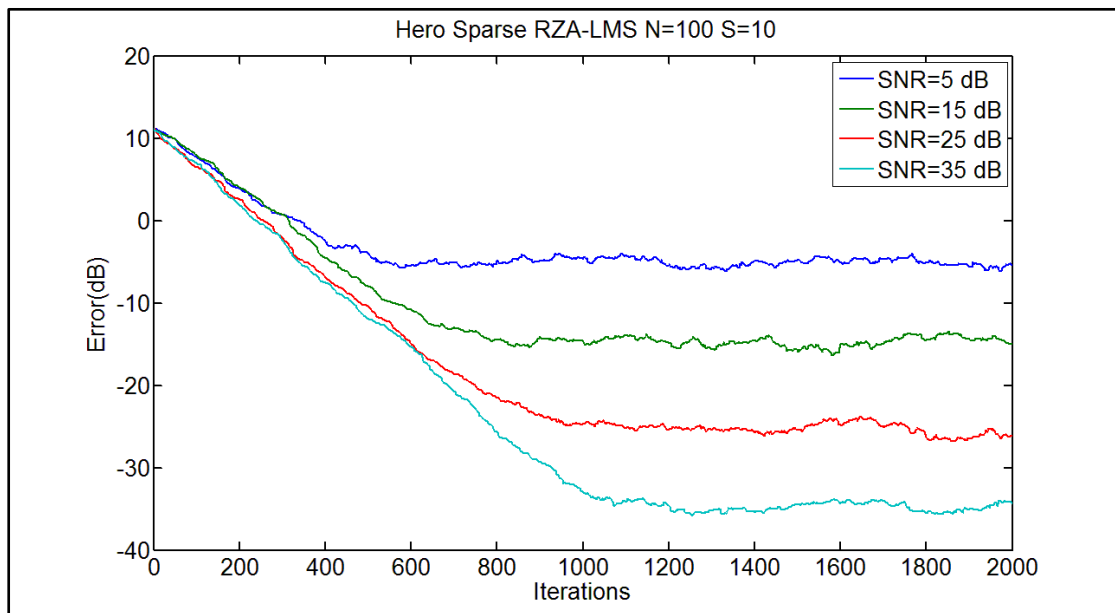
**Εικόνα 49:** Διαφορετικά SNR για ένα αραιό διάνυσμα 500 στοιχείων με 10 μη μηδενικά. Οι παράμετροι είναι  $\mu=0.00243$   $\rho=0.00003$ .



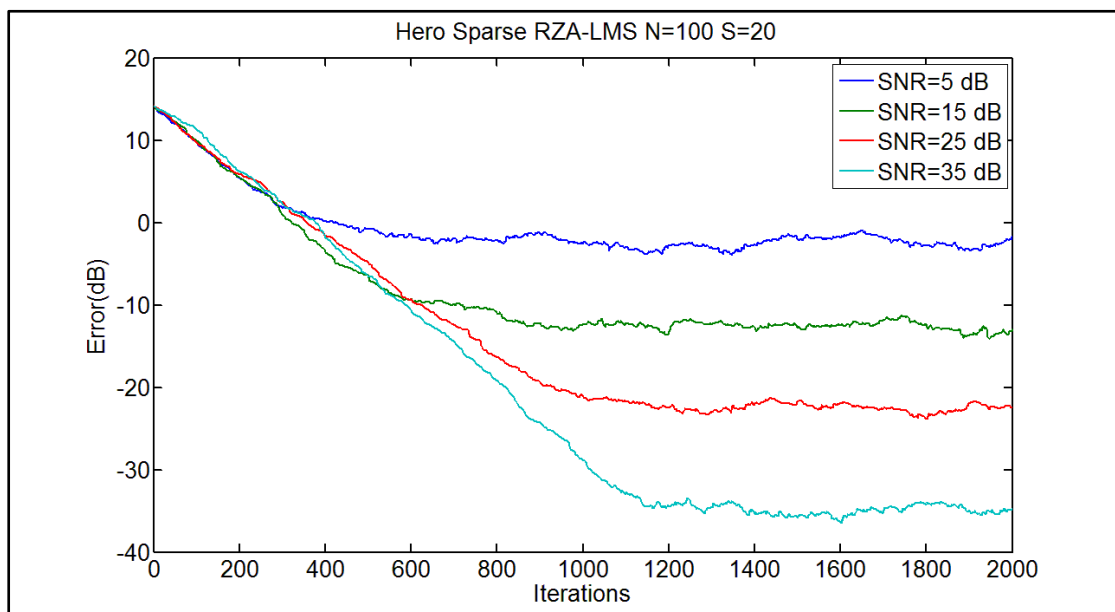
**Εικόνα 50:** Διαφορετικά SNR για ένα αραιό διάνυσμα 500 στοιχείων με 20 μη μηδενικά. Οι παράμετροι είναι  $\mu=0.00243$   $\rho=0.00003$ .

## 8.5 Αλγόριθμος RZA-LMS:

Από την εφαρμογή του αναδρομικού τύπου RZA-LMS (εξίσωση (14)) για διάφορα διανύσματα προκύπτουν τα παρακάτω γραφήματα:

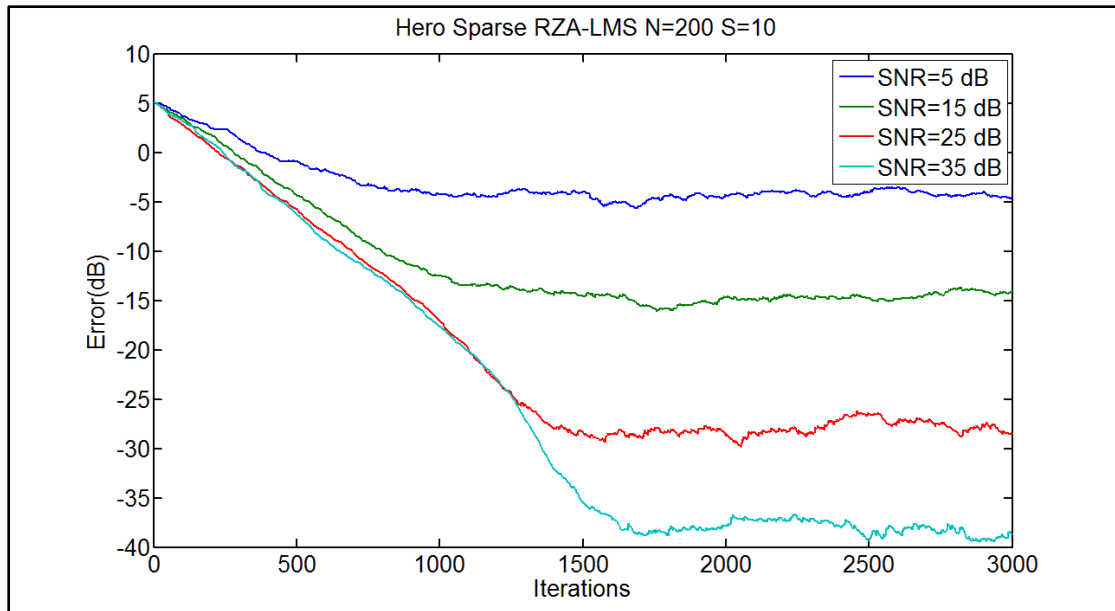


**Εικόνα 51:** Διαφορετικά SNR για ένα αραιό διάνυσμα 100 στοιχείων με 10 μη μηδενικά. Οι παράμετροι είναι  $\mu=0.01$   $\rho=0.00002$  και  $\varepsilon=200$ .

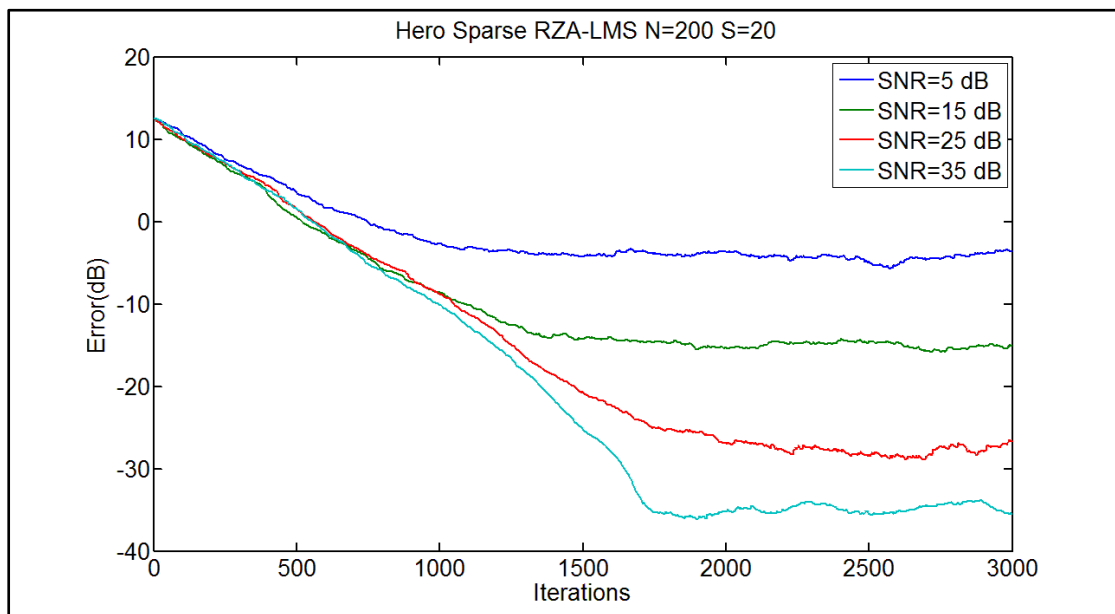


**Εικόνα 52:** Διαφορετικά SNR για ένα αραιό διάνυσμα 100 στοιχείων με 20 μη μηδενικά. Οι παράμετροι είναι  $\mu=0.01$   $\rho=0.00002$  και  $\varepsilon=200$ .

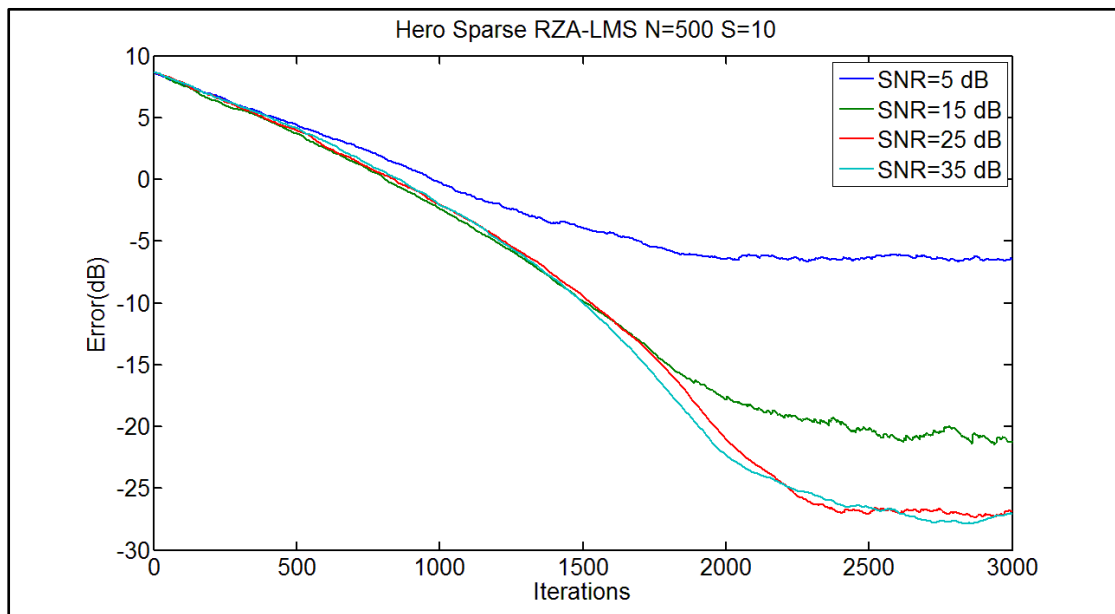




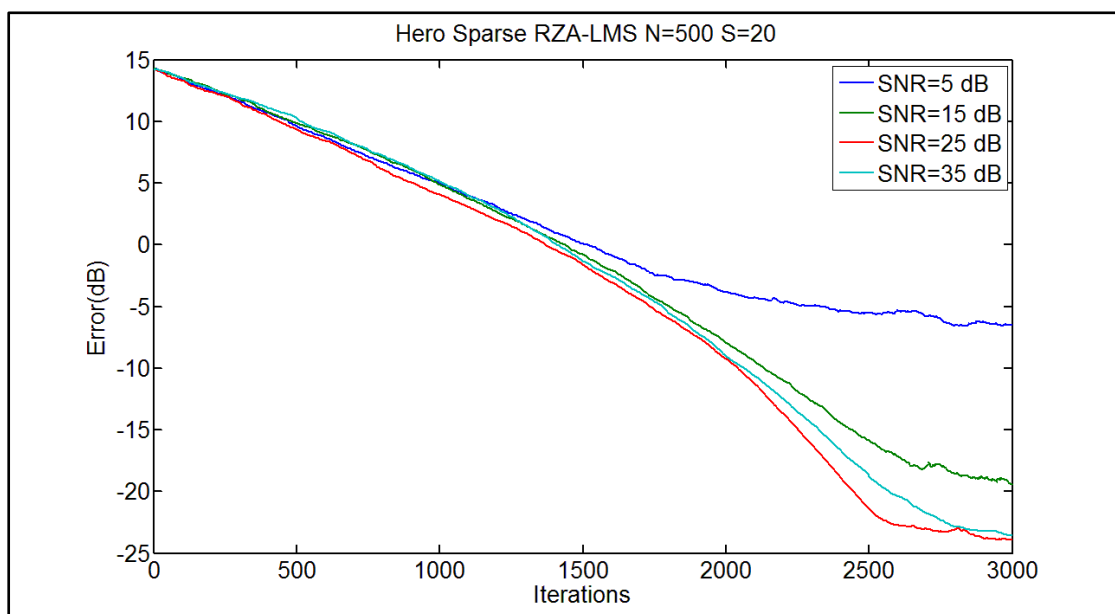
**Εικόνα 53:** Διαφορετικά SNR για ένα αραιό διάνυσμα 200 στοιχείων με 10 μη μηδενικά. Οι παράμετροι είναι  $\mu=0.00555$   $\rho=0.00002$  και  $\varepsilon=200$ .



**Εικόνα 54:** Διαφορετικά SNR για ένα αραιό διάνυσμα 200 στοιχείων με 10 μη μηδενικά. Οι παράμετροι είναι  $\mu=0.00555$   $\rho=0.00002$  και  $\varepsilon=200$ .

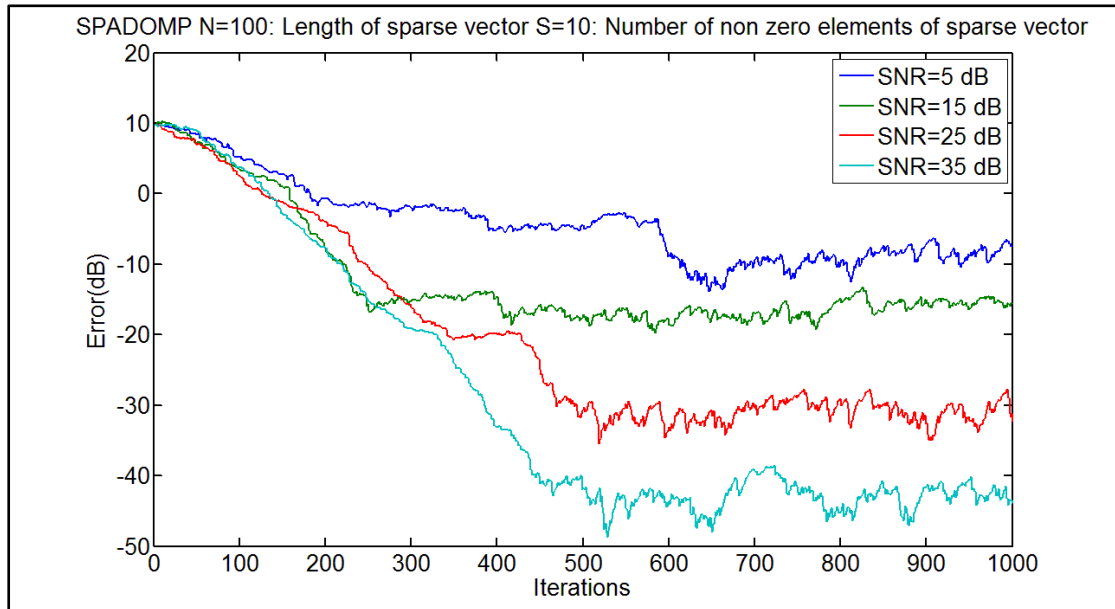


**Εικόνα 55:** Διαφορετικά SNR για ένα αραιό διάνυσμα 500 στοιχείων με 10 μη μηδενικά. Οι παράμετροι είναι  $\mu=0.00237$   $\rho=0.00002$  και  $\varepsilon=0.2$ .

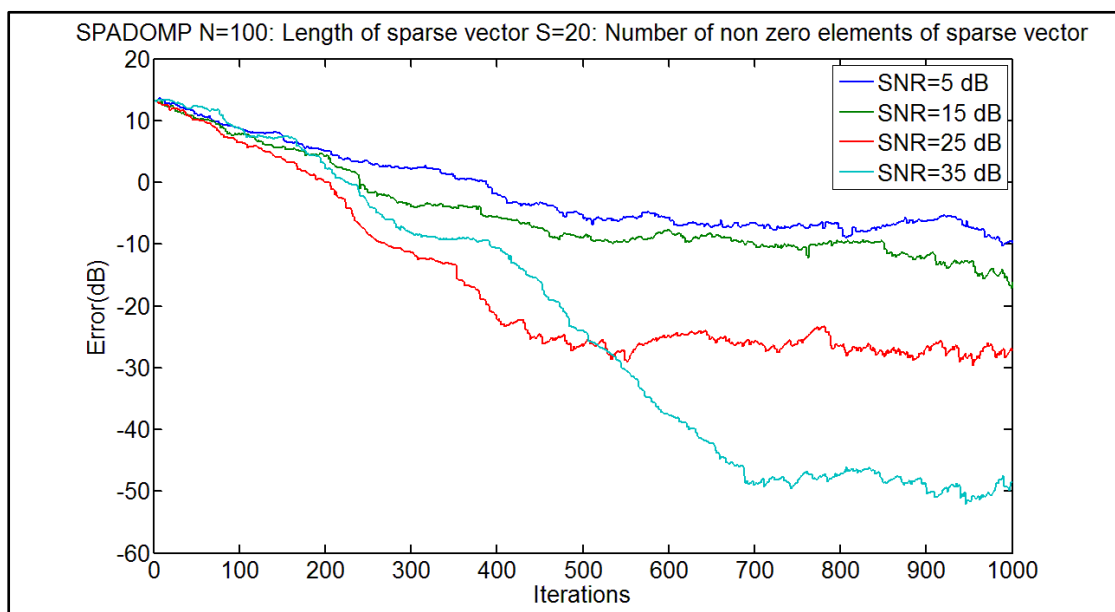


**Εικόνα 56:** Διαφορετικά SNR για ένα αραιό διάνυσμα 500 στοιχείων με 20 μη μηδενικά. Οι παράμετροι είναι  $\mu=0.00237$   $\rho=0.00002$  και  $\varepsilon=0.2$ .

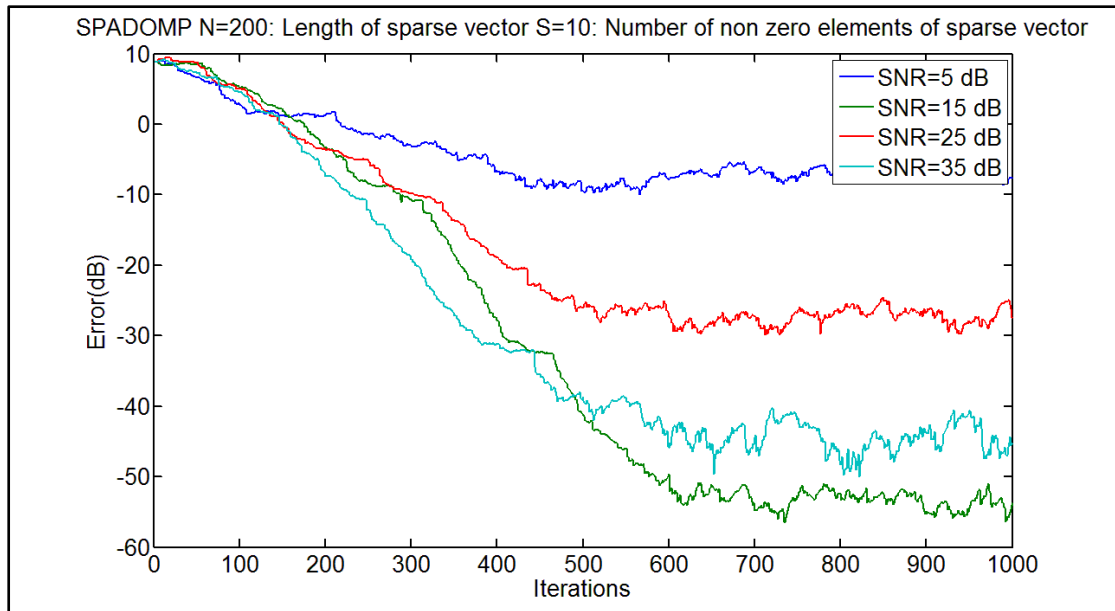
## 8.6 Αλγόριθμος SPADOMP



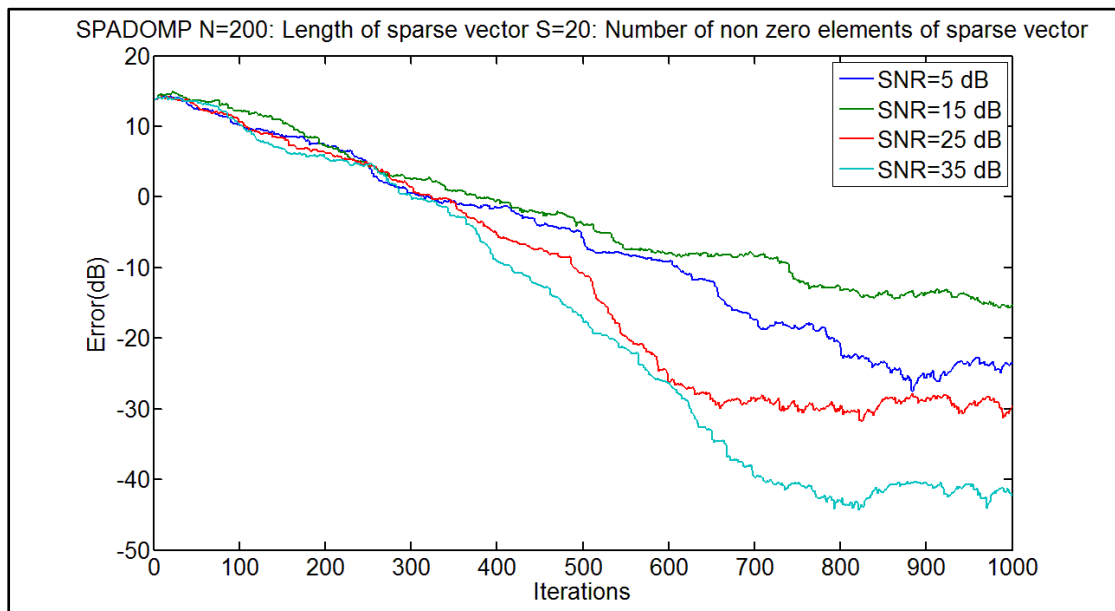
**Εικόνα 57:** Διαφορετικά SNR για ένα αραιό διάνυσμα 100 στοιχείων με 10 μη μηδενικά. Οι παράμετροι είναι  $\lambda=0.1$  και  $\mu=0.02$ .



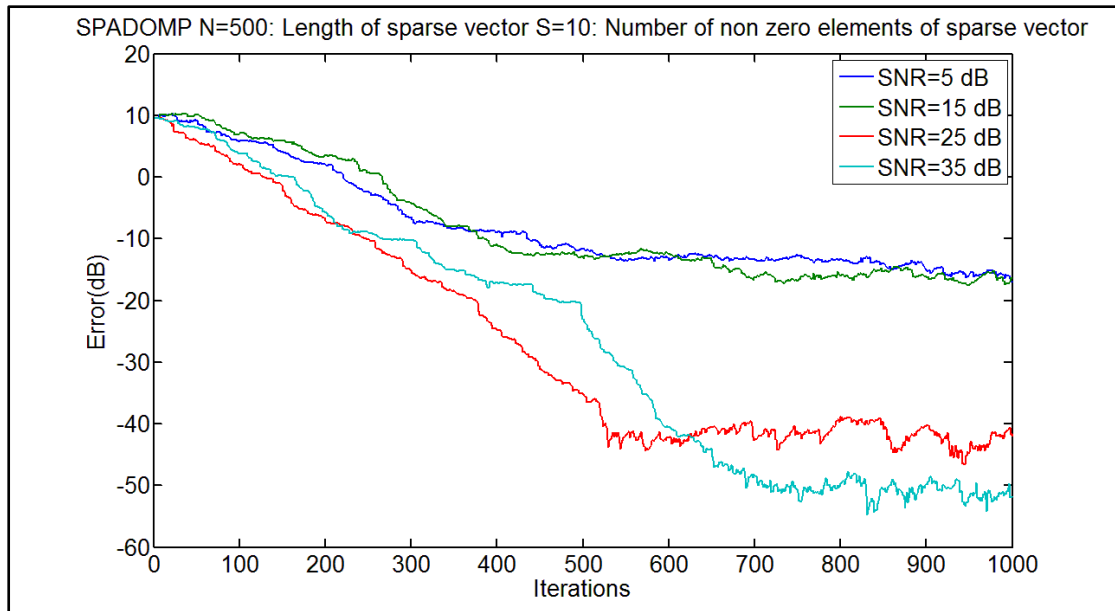
**Εικόνα 58:** Διαφορετικά SNR για ένα αραιό διάνυσμα 100 στοιχείων με 20 μη μηδενικά. Οι παράμετροι είναι  $\lambda=0.1$  και  $\mu=0.02$ .



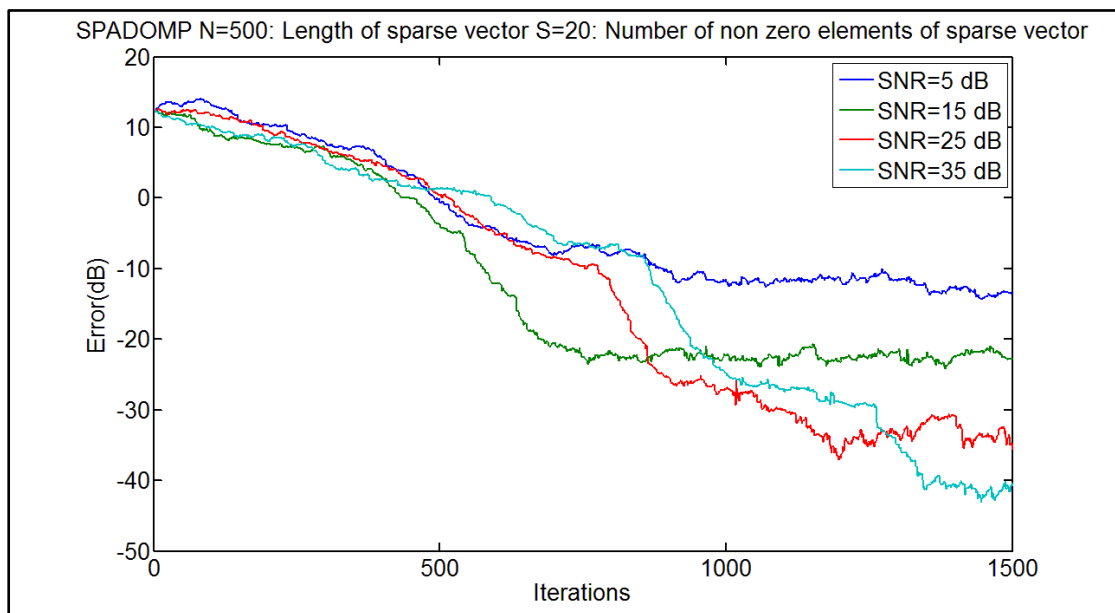
**Εικόνα 59:** Διαφορετικά SNR για ένα αραιό διάνυσμα 200 στοιχείων με 10 μη μηδενικά. Οι παράμετροι είναι  $\lambda=0.15$  και  $\mu=0.02$ .



**Εικόνα 60:** Διαφορετικά SNR για ένα αραιό διάνυσμα 200 στοιχείων με 20 μη μηδενικά. Οι παράμετροι είναι  $\lambda=0.17$  και  $\mu=0.02$ .



**Εικόνα 61:** Διαφορετικά SNR για ένα αραιό διάνυσμα 500 στοιχείων με 10 μη μηδενικά. Οι παράμετροι είναι  $\lambda=0.3$  και  $\mu=0.02$ .



**Εικόνα 62:** Διαφορετικά SNR για ένα αραιό διάνυσμα 500 στοιχείων με 20 μη μηδενικά. Οι παράμετροι είναι  $\lambda=0.3$  και  $\mu=0.02$ .

## 9. Αποτελέσματα από την αλλαγή του αρχικού αραιού διανύσματος που προσεγγίζουν οι αλγόριθμοι κατά την διάρκεια εκτέλεσής τους

Στις παρακάτω δοκιμές ενώ ο αλγόριθμος προσεγγίζει ένα αρχικό αραιό διάνυσμα, κατά την εκτέλεσή το διάνυσμα αυτό αλλάζει και ο αλγόριθμος πρέπει να προσεγγίσει ένα νέο διάνυσμα. Έτσι παρουσιάζονται δοκιμές στις οποίες α) μεταβάλλονται οι θέσεις και οι τιμές των μη μηδενικών στοιχείων και β) δοκιμές στις οποίες μεταβάλλεται το πλήθος, οι θέσεις, και οι τιμές των μη μηδενικών στοιχείων. Το SNR είναι 20 db.

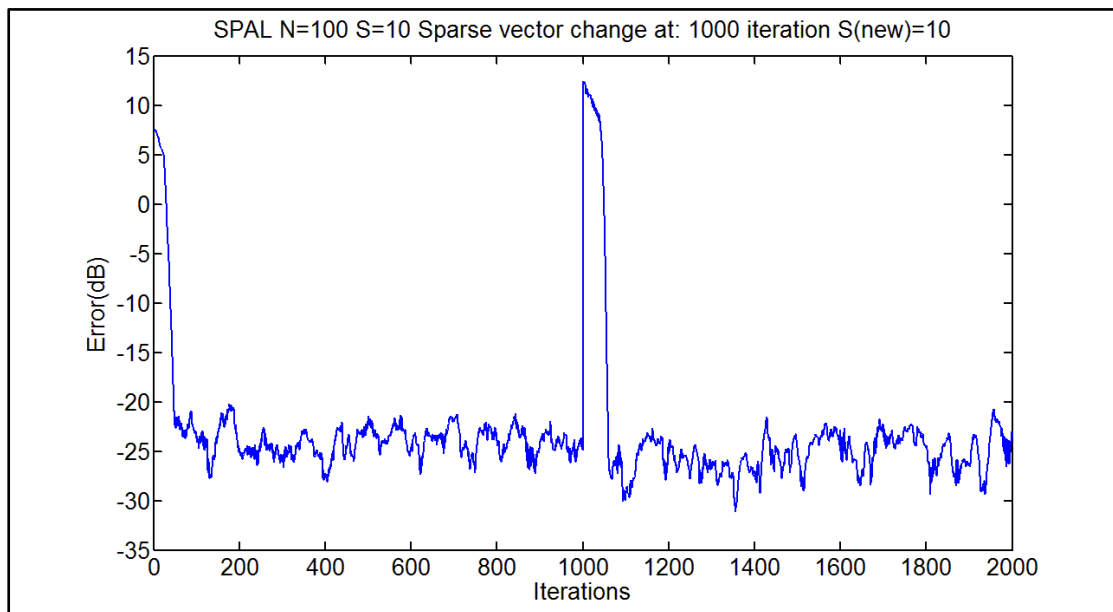
### 9.1 Αλγόριθμος SPAL

Αποτελέσματα από την αλλαγή αραιών διανυσμάτων με διαφορετικά μήκη στην 1000στη επανάληψη από τον αλγόριθμο SPAL. Το μήκος του διανύσματος και το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων παραμένουν ίδια και αλλάζουν οι τιμές και οι θέσεις τους. Οι παράμετροι που χρησιμοποιήθηκαν επιλέχτηκαν έτσι ώστε να έχουμε την ταχύτερη και ακριβέστερη προσέγγιση του διανύσματος. Γενικά οι παράμετροι στον αλγόριθμο SPAL δεν χρειάζονται μεγάλη ακρίβεια στη ρύθμιση τους όπως συμβαίνει με τους άλλους αλγορίθμους και για αρκετά διαφορετικές τιμές τους έχουμε πολύ ικανοποιητικές προσεγγίσεις.

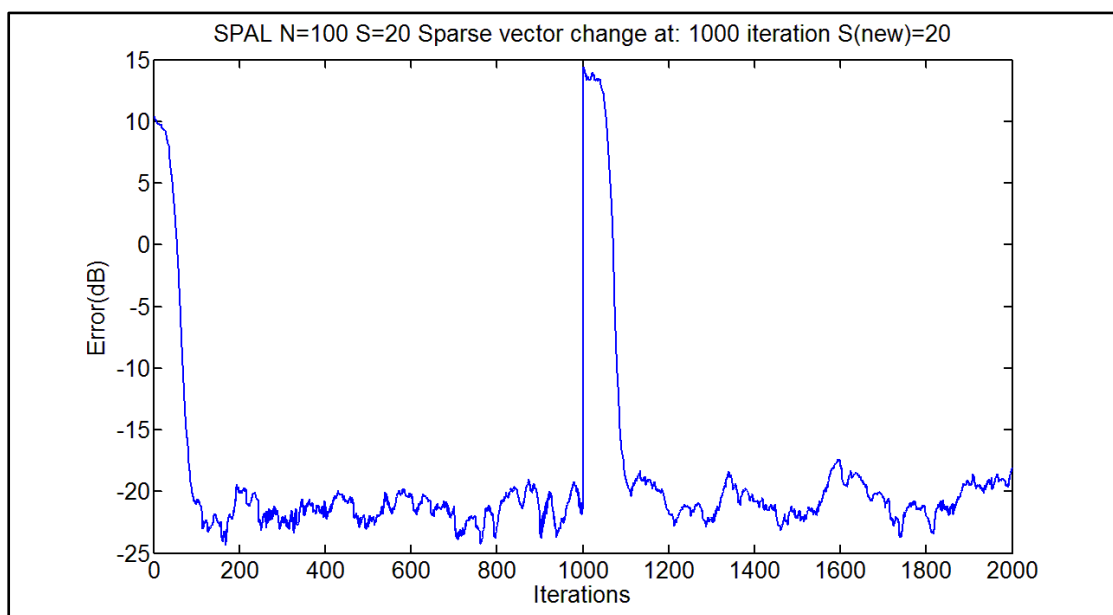
Οι παράμετροι για τον spal είναι:

- Το εύρος του hyperslab  $\epsilon=0.1*\sqrt{\text{noise\_variance}} = 0.1*0.1=0.01$  (εξίσωση (24))
- Η ακτίνα της  $l_1$  μπάλας και ισούται με  $S$  δηλαδή είναι ίση με το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων του sparse διανύσματος (εξίσωση (23))
- Το πλήθος των hyperslabs που συμμετέχουν στην εκτίμηση που γίνεται σε κάθε χρονική στιγμή  $n$ , είναι  $q=50$  (εξισώσεις (26), (27))
- Η μεταβλητή  $\epsilon'_n$  που χρησιμοποιείται στη στάθμιση της  $l_1$  μπάλας, ώστε να μην γίνεται διαίρεση με το μηδέν ισούται με 0.05,  $\epsilon'_n=0.05$  (εξίσωση (32))

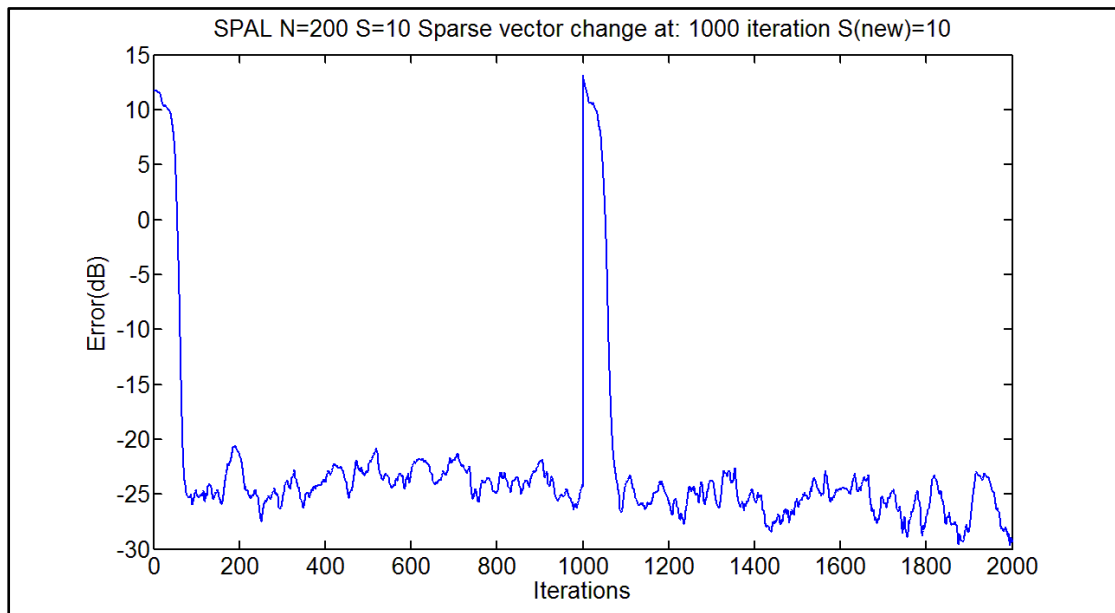
Οι παραπάνω παράμετροι παραμένουν σταθερές καθ' όλη την διάρκεια του πειράματος, δηλαδή κατά τη διάρκεια και των 2000 επαναλήψεων.



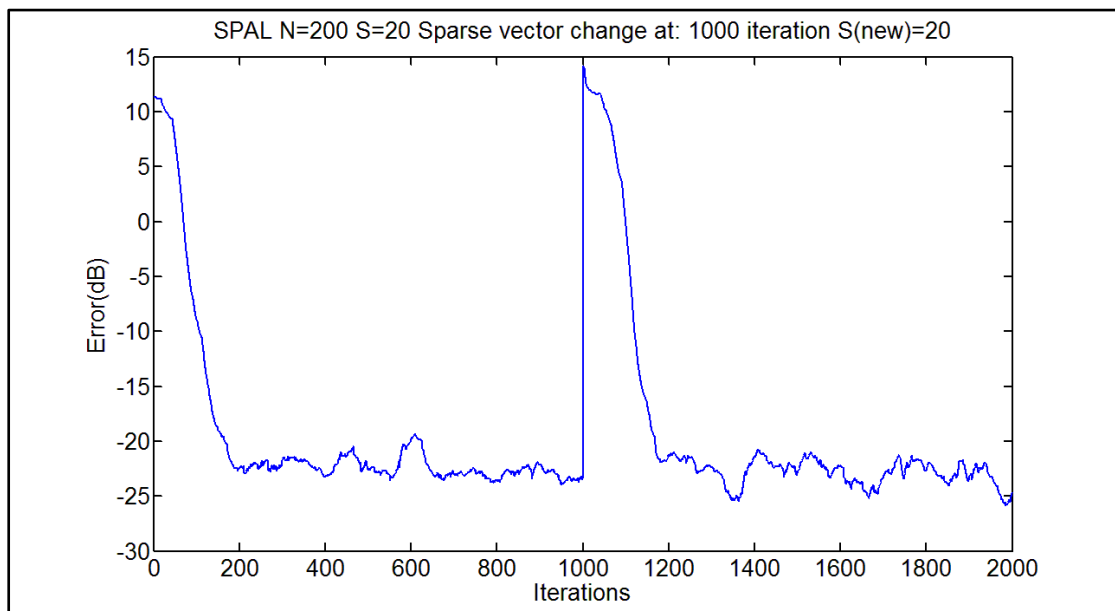
**Εικόνα 63:** Αποτελέσματα από την αλλαγή του sparse vector (100/10) στην 1000στη επανάληψη για τον αλγόριθμο SPAL. Το μήκος του διανύσματος και το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων παραμένουν ίδια.



**Εικόνα 64:** Αποτελέσματα από την αλλαγή του sparse vector (100/20) στην 1000στη επανάληψη από τον αλγόριθμο SPAL. Το μήκος του διανύσματος και το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων παραμένουν ίδια. Οι παράμετροι είναι ίδιες με το παράδειγμα της εικόνας 63.

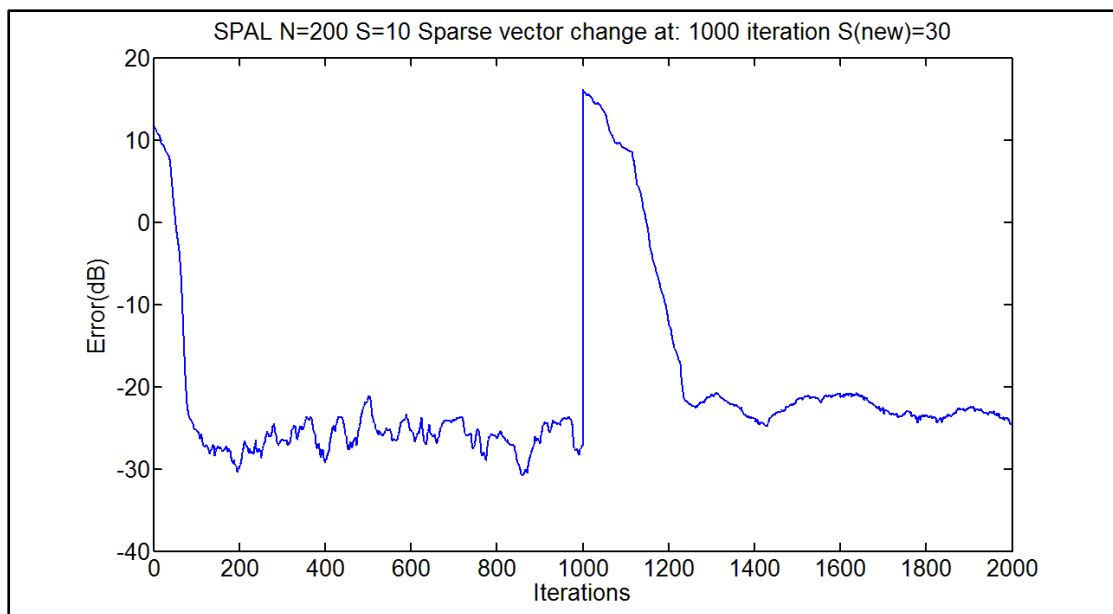


**Εικόνα 65:** Αποτελέσματα από την αλλαγή του sparse vector (200/10) στην 1000στη επανάληψη από τον αλγόριθμο SPAL. Το μήκος του διανύσματος και το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων παραμένουν ίδια. Οι παράμετροι είναι ίδιες με το παράδειγμα της εικόνας 63.



**Εικόνα 66:** Αποτελέσματα από την αλλαγή του sparse vector (200/20) στην 1000στη επανάληψη από τον αλγόριθμο SPAL. Το μήκος του διανύσματος και το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων παραμένουν ίδια. Οι παράμετροι είναι ίδιες με το παράδειγμα της εικόνας 63.





**Εικόνα 67:** Αποτελέσματα από την αλλαγή του sparse vector στην 1000στη επανάληψη από τον αλγόριθμο spal. Το αρχικό διάνυσμα είναι (200/10) και μετά την αλλαγή γίνεται (200/30). Οι θέσεις, οι τιμές των μη μηδενικών στοιχείων καθώς και το πλήθος τους αλλάζουν.

Οι παράμετροι που παραμένουν σταθερές καθ' όλη τη διάρκεια του πειράματος της εικόνας 59 είναι:

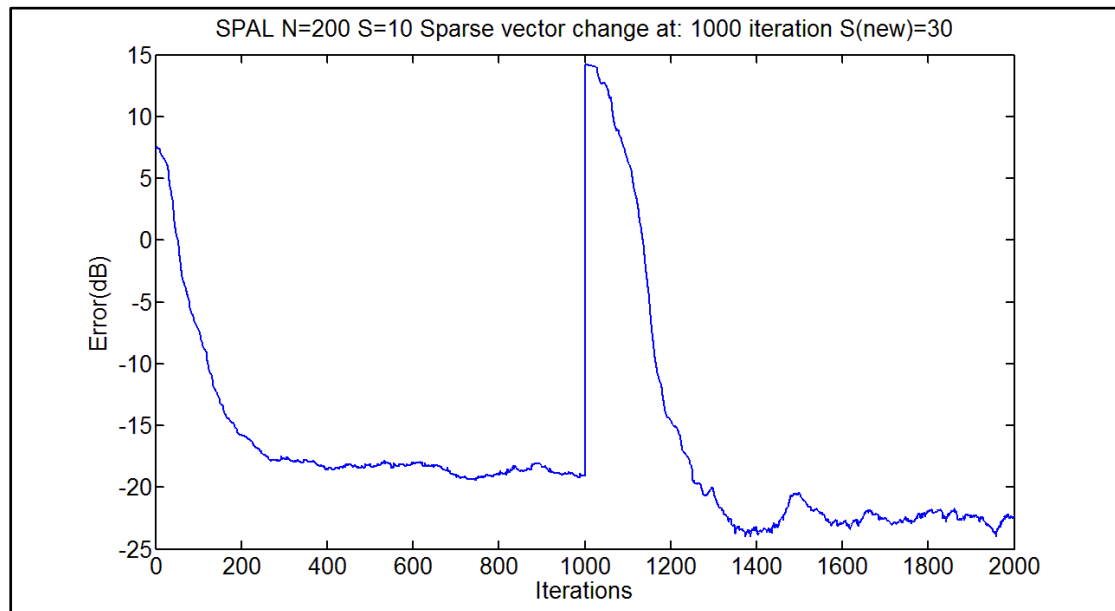
- Το εύρος του hyperslab  $\epsilon = 0.1 * \text{sqrt}(\text{noise\_variance}) = 0.1 * 0.1 = 0.01$  (εξίσωση (24))
- Το πλήθος των hyperslabs που συμμετέχουν στην εκτίμηση που γίνεται σε κάθε χρονική στιγμή  $n$ , είναι  $q = 50$  (εξισώσεις (26), (27))
- Η μεταβλητή  $\epsilon'_n$  που χρησιμοποιείται στη στάθμιση της  $l_1$  μπάλας, ώστε να μην γίνεται διαίρεση με το μηδέν ισούται με 0.05,  $\epsilon'_n = 0.05$  (εξίσωση (32))

Η παράμετρος που αλλάζει είναι:

- Αρχικά η ακτίνα της  $l_1$  μπάλας,  $\delta$ , ισούται με  $S$  δηλαδή είναι ίση με το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων του αρχικού sparse διανύσματος δηλαδή 10 (εξίσωση (23)), στην 1000στη επανάληψη το  $\delta$  αλλάζει και γίνεται ίσο με το καινούργιο  $S$  δηλαδή 30.

Σε αυτήν την περίπτωση που αλλάζει και το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων ο αλγόριθμος πρέπει να έχει ως είσοδο το πλήθος των μη

μηδενικών στοιχείων του αρχικού και του τελικού διανύσματος. Αλλά και στην περίπτωση που απλώς γνωρίζει μόνο το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων του τελικού διανύσματος, ο αλγόριθμος λειτουργεί πάλι αποτελεσματικά, όπως φαίνεται από το παρακάτω σχήμα.



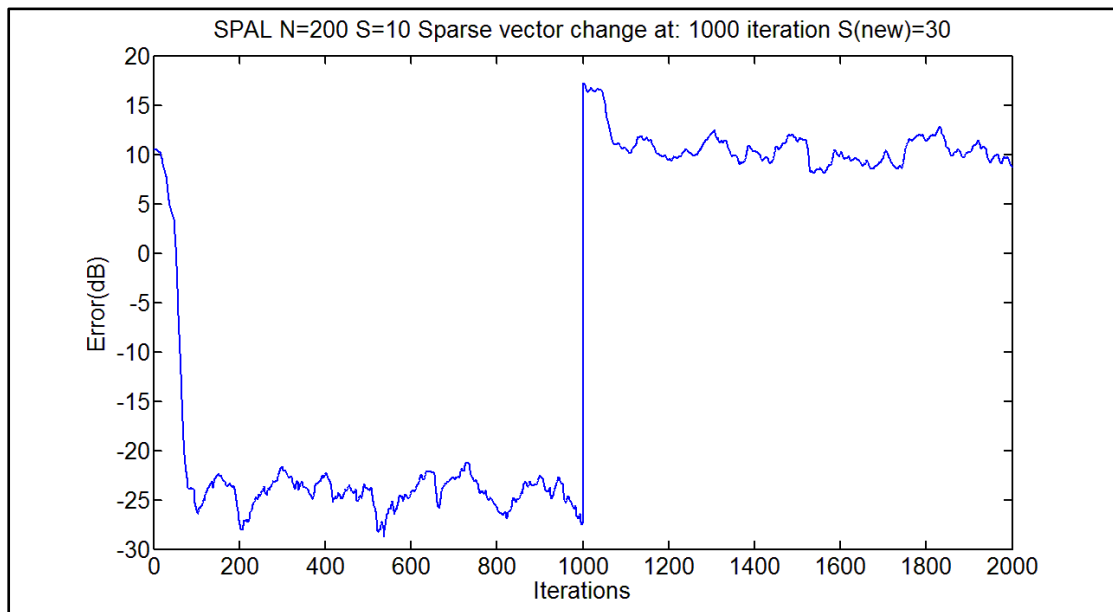
**Εικόνα 68:** Αποτελέσματα από την αλλαγή του sparse vector στην 1000στη επανάληψη από τον αλγόριθμο spal. Το αρχικό διάνυσμα είναι (200/10) και μετά την αλλαγή γίνεται (200/30). Οι θέσεις, οι τιμές των μη μηδενικών στοιχείων καθώς και το πλήθος τους αλλάζουν.

Οι παρακάτω παράμετροι παραμένουν σταθερές καθ' όλη τη διάρκεια του πειράματος της εικόνας 68

- Το εύρος του hyperslab  $\varepsilon=0.1*\sqrt{\text{noise\_variance}} = 0.1*0.1=0.01$  (εξίσωση (24))
- Η ακτίνα της  $l_1$  μπάλας και ισούται με  $S(\text{new})$  δηλαδή είναι ίση με το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων του τελικού sparse διανύσματος (εξίσωση (23))
- Το πλήθος των hyperslabs που συμμετέχουν στην εκτίμηση που γίνεται σε κάθε χρονική στιγμή  $n$ , είναι  $q=50$  (εξισώσεις (26), (27))
- Η μεταβλητή  $\varepsilon'_n$  που χρησιμοποιείται στη στάθμιση της  $l_1$  μπάλας, ώστε να μην γίνεται διαίρεση με το μηδέν ισούται με  $0.05$ ,  $\varepsilon'_n=0.05$  (εξίσωση (32))

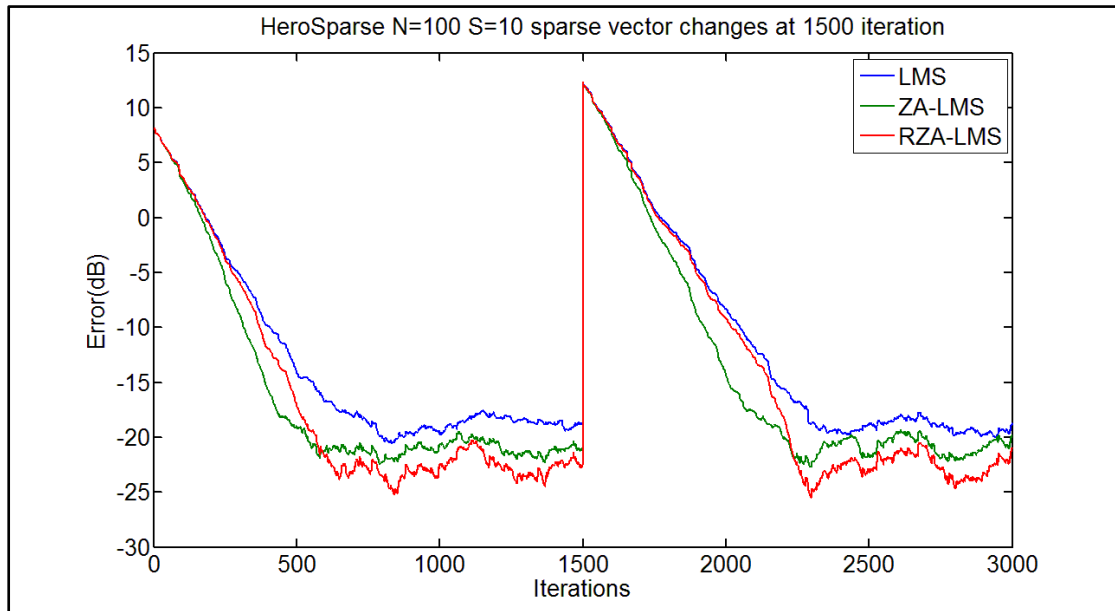
Θα πρέπει να τονιστεί ότι στο πείραμα της εικόνας 68 η ακτίνα της  $l_1$  μπάλας σε όλες τις επαναλήψεις ισούται με πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων του τελικού διανύσματος.

Σε περίπτωση όμως που ο αλγόριθμος δεν έχει γνώση του πλήθους των μη μηδενικών στοιχείων του τελικού διανύσματος και η ακτίνα της  $l_1$  μπάλας παραμένει σταθερή και ίση με το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων του αρχικού διανύσματος τότε δεν γίνεται αποτελεσματική προσέγγιση του τελικού διανύσματος, όπως φαίνεται στην εικόνα 69.

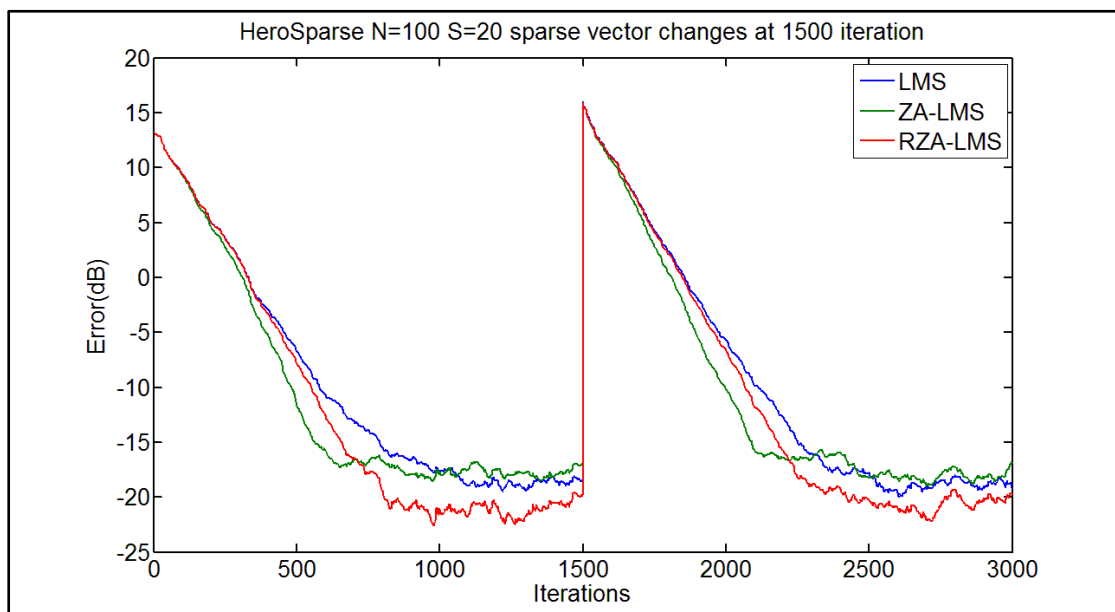


**Εικόνα 69:** Αποτελέσματα από την αλλαγή του sparse vector στην 1000στη επανάληψη από τον αλγόριθμο spal. Το αρχικό διάνυσμα είναι (200/10) και μετά την αλλαγή γίνεται (200/30). Οι θέσεις, οι τιμές των μη μηδενικών στοιχείων καθώς και το πλήθος τους αλλάζουν. Η ακτίνα της  $l_1$  μπάλας παραμένει σταθερή.

## 9.2 Αλγόριθμος Hero Sparse LMS

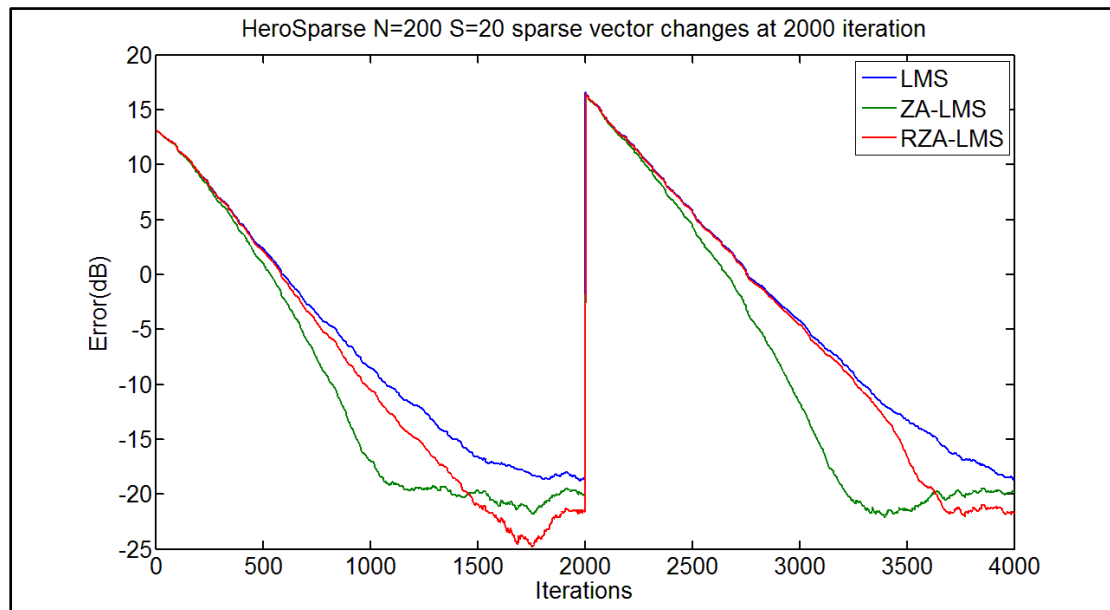


**Εικόνα 70:** Αποτελέσματα από την αλλαγή του sparse vector (100/10) στην 1500στη επανάληψη. Το μήκος του διανύσματος και το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων παραμένουν ίδια και αλλάζουν οι θέσεις και οι τιμές τους. Οι παράμετροι είναι: για τον LMS:  $\mu=0.011$ , για τον ZA-LMS:  $\mu=0.011$  και  $\rho=0.00025$  και για τον RZA-LMS:  $\mu=0.011$   $\rho=0.00025$  και  $\epsilon=220$  και παραμένουν σταθερές σε όλο το πλήθος των επαναλήψεων. Το SNR είναι 20 dB.

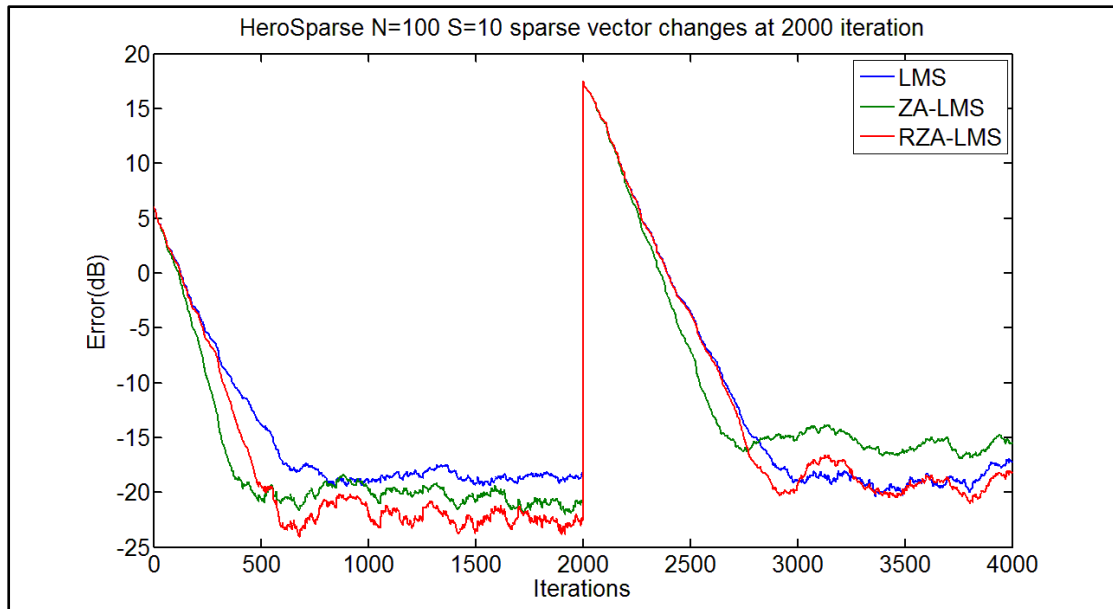


**Εικόνα 71:** Αποτελέσματα από την αλλαγή του sparse vector (100/20) στην 1500στη επανάληψη. Το μήκος του διανύσματος και το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων παραμένουν ίδια και αλλάζουν οι θέσεις

και οι τιμές τους. Οι παράμετροι είναι: για τον LMS:  $\mu=0.011$ , για τον ZA-LMS:  $\mu=0.011$  και  $\rho=0.00025$  και για τον RZA-LMS:  $\mu=0.011$   $\rho=0.00025$  και  $\varepsilon=220$  και παραμένουν σταθερές σε όλο το πλήθος των επαναλήψεων. Το SNR είναι 20 dB.



**Εικόνα 72:** Αποτελέσματα από την αλλαγή του sparse vector (200/20) στην 2000στη επανάληψη. Το μήκος του διανύσματος και το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων παραμένουν ίδια και αλλάζουν οι θέσεις και οι τιμές τους. Οι παράμετροι είναι: για τον LMS:  $\mu=0.0055$ , για τον ZA-LMS:  $\mu=0.0055$  και  $\rho=0.0001$  και για τον RZA-LMS:  $\mu=0.0055$   $\rho=0.0001$  και  $\varepsilon=220$  και παραμένουν σταθερές σε όλο το πλήθος των επαναλήψεων. Το SNR είναι 20 dB.



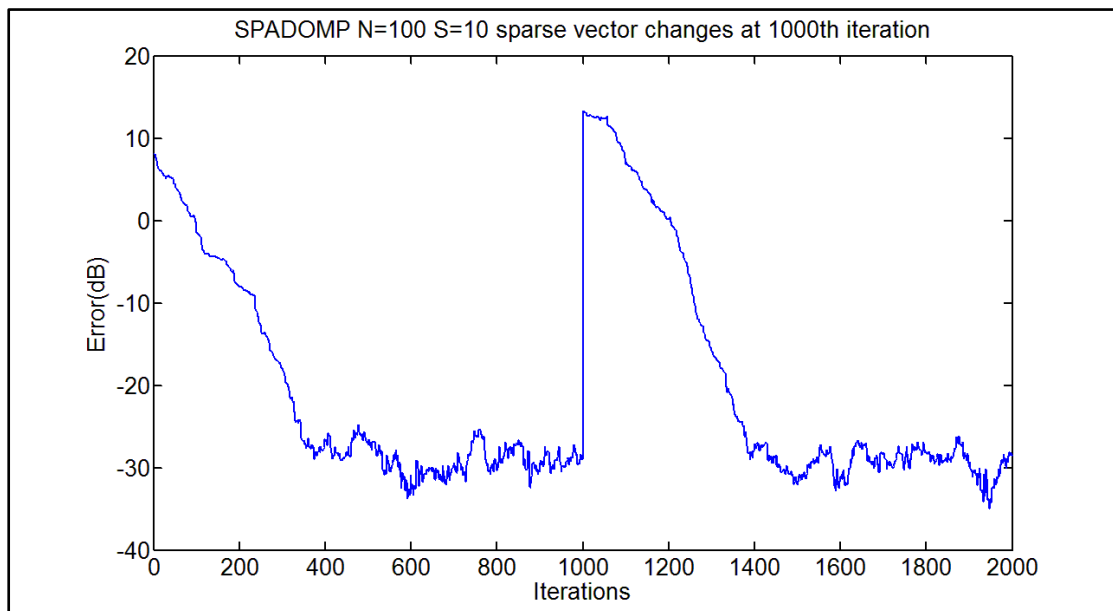
**Εικόνα 73:** Αποτελέσματα από την αλλαγή του sparse vector από (100/10) σε (100/30) στην επανάληψη 2000 από τον αλγόριθμο Hero Sparse LMS. Το μήκος του διανύσματος παραμένει ίδιο και αλλάζουν οι θέσεις, οι τιμές τους και το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων. Οι παράμετροι είναι: για τον LMS:  $\mu=0.011$ , για τον ZA-LMS:  $\mu=0.011$  και  $\rho=0.00025$  και για τον RZA-LMS:  $\mu=0.011$   $\rho=0.00025$  και  $\varepsilon=220$  και παραμένουν σταθερές σε όλο το πλήθος των επαναλήψεων. Το SNR είναι 20 dB.

Στην εφαρμογή της εικόνας 73 παρατηρούμε ότι μετά την αλλαγή του διανύσματος οι δύο εκδοχές του Hero Sparse LMS παρουσιάζουν διαφορετική ακρίβεια στο τελικό και το αρχικό διάνυσμα. Πιο συγκεκριμένα ο απλός LMS παρουσιάζει την ίδια ακρίβεια, όμως στους ZA-LMS και RZA-LMS μειώνεται η ακρίβεια προσέγγισης στο τελικό διάνυσμα. Αυτό συμβαίνει γιατί χρειάζονται ρύθμιση οι παράμετροι τους για το διάνυσμα 100/30, ώστε να έχουμε τη βέλτιστη προσέγγιση. Το πλεονέκτημα με τον LMS είναι ότι δεν χρειάζεται να έχει ως δεδομένο ο αλγόριθμος το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων ούτε του αρχικού, ούτε του τελικού διανύσματος. Όμως πρέπει να υπενθυμίσουμε ότι για διαφορετικά μήκη διανυσμάτων π.χ. 100, 200 στοιχείων χρειάζονται διαφορετικές παράμετροι ώστε να επιτευχθεί η βέλτιστη προσέγγιση είτε αφορά την ταχύτητα είτε την ακρίβεια. Επίσης παρατηρούμε ότι όταν διπλασιάζεται το μήκος του αραιού διανύσματος η σταθερά  $\mu$  πρέπει να υποδιπλασιαστεί. Έτσι για το διάνυσμα 100 στοιχείων είχαμε  $\mu=0.011$  για 200 στοιχεία είχαμε  $\mu=0.0055$  για 500 στοιχεία είχαμε  $\mu=0.00237$ . Αντίθετα στον αλγόριθμο SPAL δεν είναι αναγκαία αυτή η ρύθμιση παραμέτρων, καθώς με τις ίδιες σταθερές

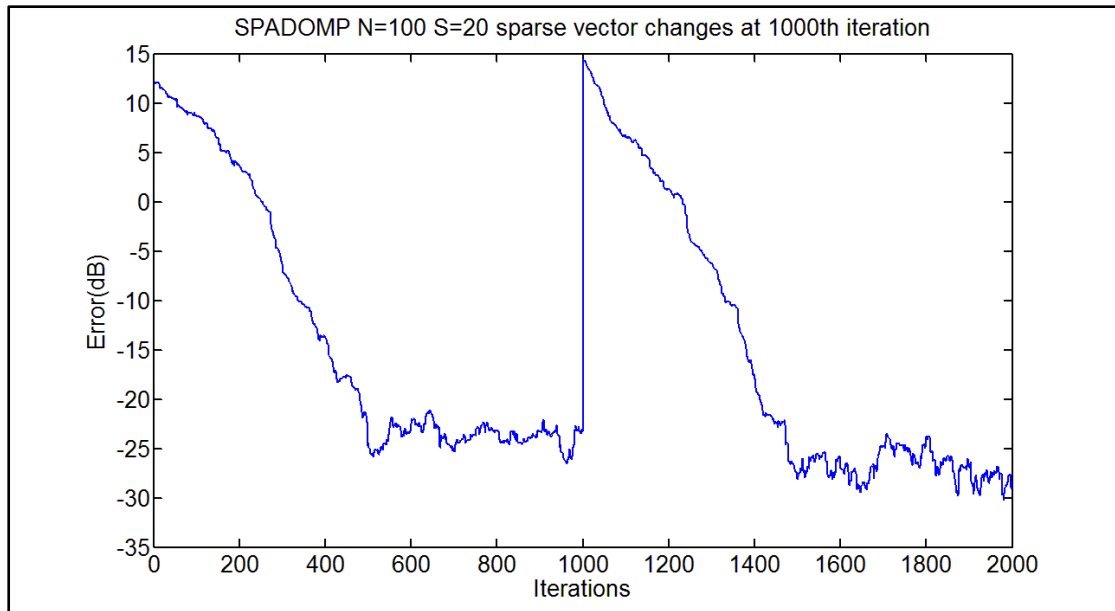
μπορούν να υπολογιστούν πολύ καλά διανύσματα από 100 μέχρι 1000 στοιχεία, μόνο που αυτός ο αλγόριθμος πρέπει να έχει ως δεδομένο το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων του αραιού διανύσματος.

### 9.3 Αλγόριθμος SPADOMP

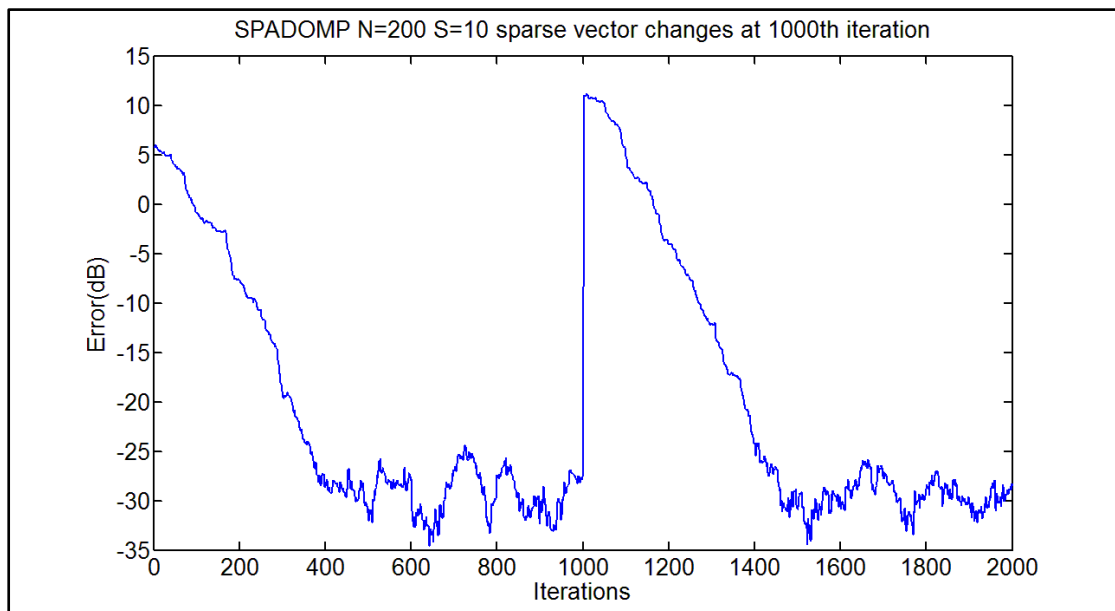
Στις παρακάτω δοκιμές χρησιμοποιήθηκαν τέτοιες σταθερές ώστε να έχουμε τη βέλτιστη προσέγγιση.



**Εικόνα 74:** Το sparse vector (100/10) αλλάζει στην 1000στη επανάληψη και παραμένει πάλι (100/10). Η αλλαγή που γίνεται αφορά τις θέσεις και τις τιμές των μη μηδενικών στοιχείων, το SNR είναι 20 db. Το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων παραμένει ίδιο. Οι τιμές των σταθερών στο συγκεκριμένο παράδειγμα είναι  $\lambda=0.3$  και  $\mu=0.02$ .

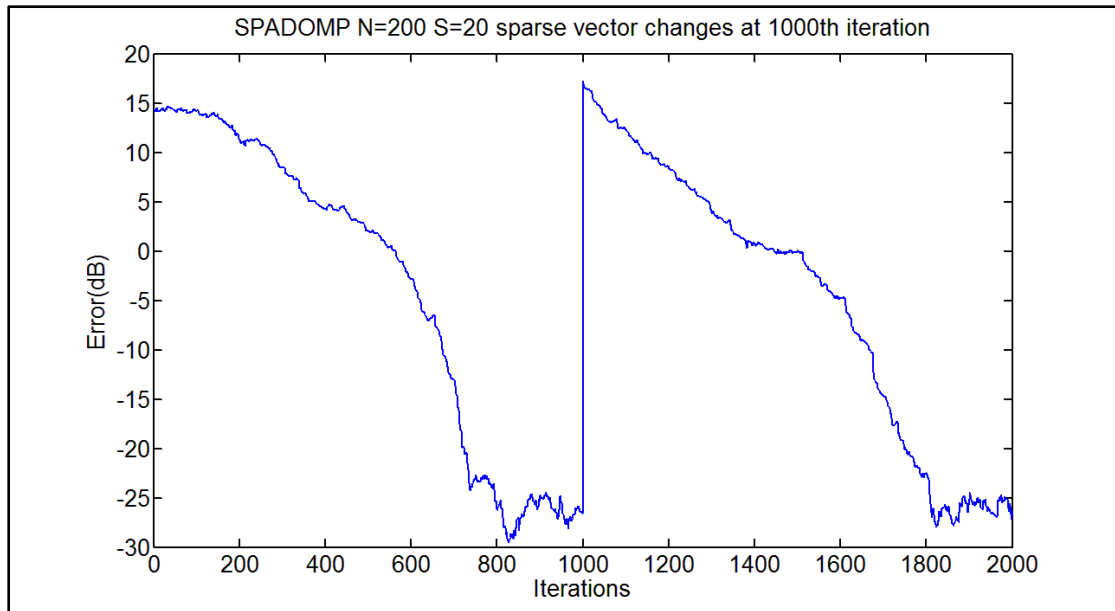


**Εικόνα 75:** Αλλαγή ενός διανύσματος 100/20 στην 1000στη επανάληψη  
 Οι τιμές των σταθερών στο συγκεκριμένο παράδειγμα είναι πάλι  $\lambda=0.3$   
 και  $\mu=0.02$ .

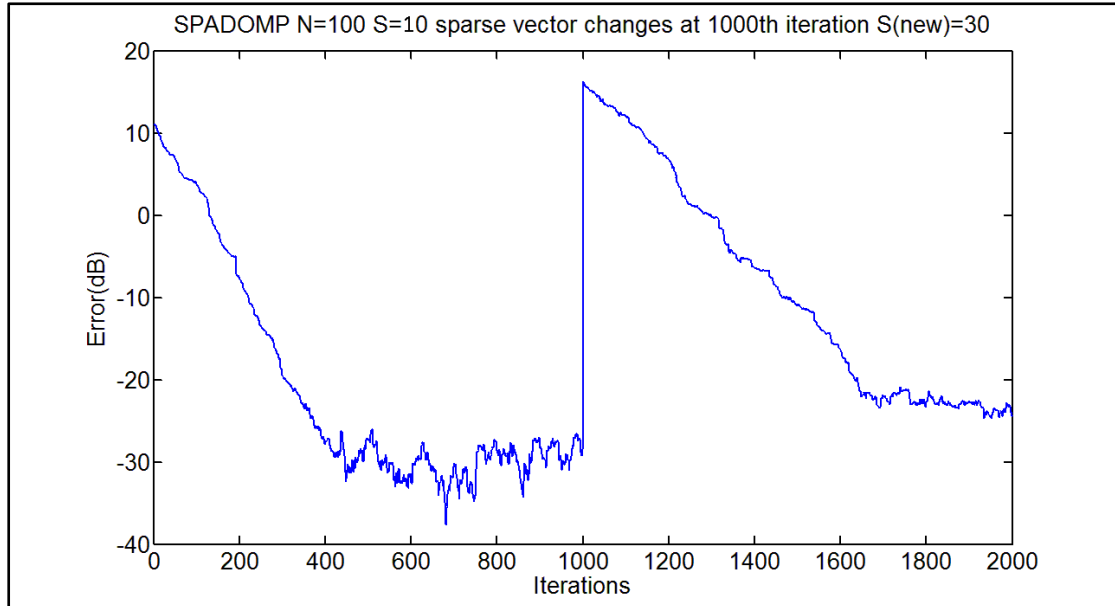


**Εικόνα 76:** Αλλαγή ενός διανύσματος 200/20 στην 1000στη επανάληψη  
 Οι τιμές των σταθερών στο συγκεκριμένο παράδειγμα είναι  $\lambda=0.15$  και  
 $\mu=0.02$ .





**Εικόνα 77:** Αλλαγή ενός διανύσματος 200/20 στην 1000στη επανάληψη. Οι τιμές των σταθερών στο συγκεκριμένο παράδειγμα είναι  $\lambda=0.17$  και  $\mu=0.02$ .



**Εικόνα 78:** Αλλαγή ενός διανύσματος 100/10 σε ένα διάνυσμα 100/30 στην 1000στη επανάληψη. Οι τιμές των σταθερών στο συγκεκριμένο παράδειγμα είναι  $\lambda=0.1$  και  $\mu=0.02$  και παραμένουν σταθερές και στις 2000 επαναλήψεις.

Στην εφαρμογή της εικόνας 78, παρατηρούμε, όπως είναι φυσιολογικό, ότι χρειάζονται περισσότερες επαναλήψεις για να προσεγγιστεί το 2<sup>ο</sup> διάλυσμα και η ακρίβεια είναι μικρότερη για το τελικό διάλυσμα με τα 30 μη μηδενικά στοιχεία. Επίσης στον SPADOMP είναι απαραίτητη η «γνώση» του πλήθους των μη μηδενικών στοιχείων του αρχικού και του τελικού αραιού διανύσματος, για να εκτελεστεί ο αλγόριθμος. Τέλος οι σταθερές δεν χρειάζονται τόσο μεγάλες διαφοροποιήσεις, όσο στον αλγόριθμο LMS, καθώς μεταβάλλεται το μήκος του sparse vector.

## **10. Χρησιμοποίηση διαφορετικών κατανομών για τις τιμές των μη μηδενικών στοιχείων των αραιών διανυσμάτων.**

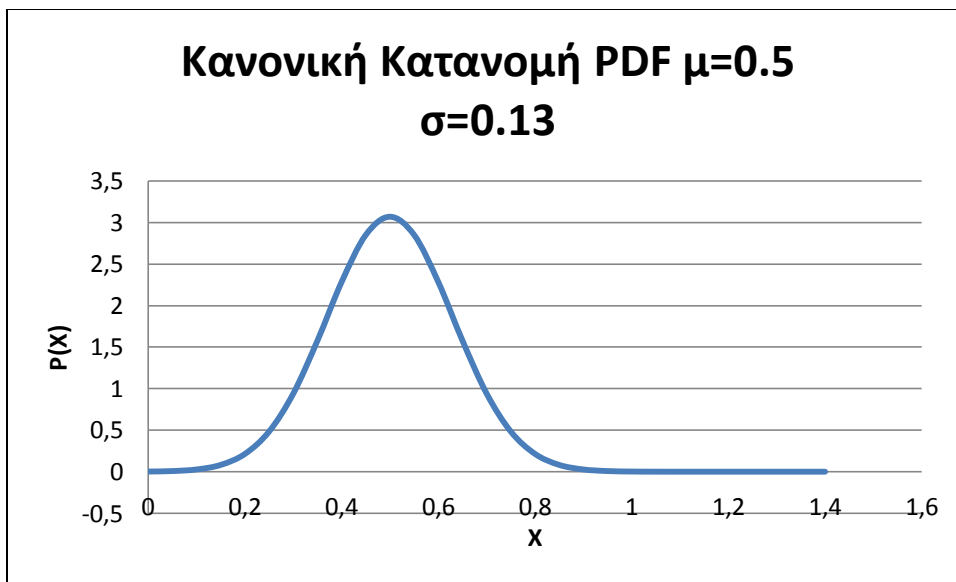
Επιπλέον της κανονικής κατανομής χρησιμοποιήθηκαν για τη δοκιμή των αλγορίθμων και άλλες κατανομές (beta, exponential, gamma, lognormal, weibull). Παρακάτω παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από τις δοκιμές για αυτές τις κατανομές των μη μηδενικών στοιχείων των sparse διανυσμάτων με αριθμό στοιχείων 200/20. Οι παράμετροι των κατανομών επιλέχτηκαν έτσι ώστε για όλες τις κατανομές η αθροιστική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για το μηδέν να έχει τιμή κοντά στο μηδέν ή και μηδέν και για το 1 να έχει τιμή κοντά στο 1 ή ακριβώς ένα. Δηλαδή οι τιμές που παίρνουν τα μη μηδενικά στοιχεία για όλες τις κατανομές βρίσκονται μεταξύ του μηδενός και του ένα. Αυτό συμβαίνει στην πρώτη σειρά πειραμάτων (εικόνες: 85, 86, 87). Στη δεύτερη σειρά πειραμάτων (εικόνες: 94, 95, 96) οι τιμές που παίρνουν τα μη μηδενικά στοιχεία των αραιών διανυσμάτων δεν περιορίζονται στο διάστημα [0,1]. Έτσι δίνονται και οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας (PDF Probability Density Function) για κάθε κατανομή, η οποία παραμένει ίδια για κάθε αλγόριθμο. Το SNR που επιλέχθηκε είναι 20 db.

## 10.1 Χαρακτηριστικά κανονικής κατανομής

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για την κανονική κατανομή δίνεται από τον τύπο:

$$y = f(x|\mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (34)$$

Η παράμετρος  $\mu$  είναι 0.5 και η  $\sigma=0.13$ . Για τις παραμέτρους αυτές η γραφική παράσταση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας (PDF Probability Density Function) που προκύπτει φαίνεται στην εικόνα 79:



**Εικόνα 79:** Η μέση τιμή είναι 0.5 και η απόκλιση είναι 0.13, έτσι ώστε εκτός του διαστήματος  $[0,1]$  να έχουμε πολύ μικρή πιθανότητα εμφάνισης κάποιου αριθμού.

## 10.2 Χαρακτηριστικά κατανομής βήτα

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για την κατανομή βήτα δίνεται από τον τύπο:

$$y = f(x|\alpha, b) = \frac{1}{B(\alpha, b)} x^{\alpha-1} (1-x)^{b-1} \quad (35)$$

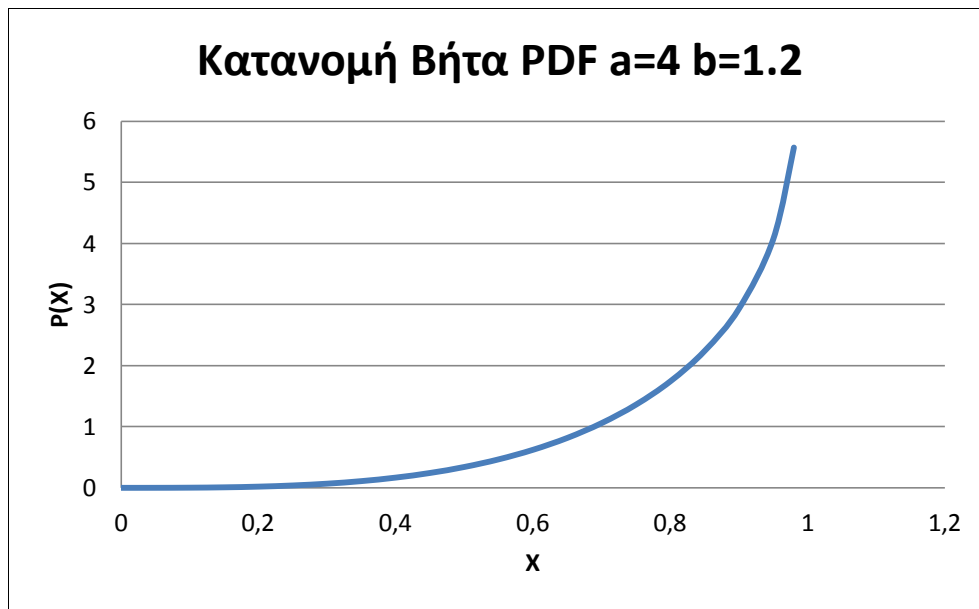
Όπου  $B(\alpha, b)$  είναι η συνάρτηση βήτα

$$B(\alpha, b) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(b)}{\Gamma(\alpha+b)} \quad (36)$$

Όπου  $\Gamma(x)$  είναι η συνάρτηση γάμμα

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (37)$$

Η παράμετρος  $\alpha$  είναι 4 και η  $b=0.76$ . Για τις παραμέτρους αυτές η γραφική παράσταση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας (PDF Probability Density Function) που προκύπτει φαίνεται στην εικόνα 80:



**Εικόνα 80:** Κατανομή βήτα, οι παράμετροι είναι:  $a=4$  και  $b=0.76$

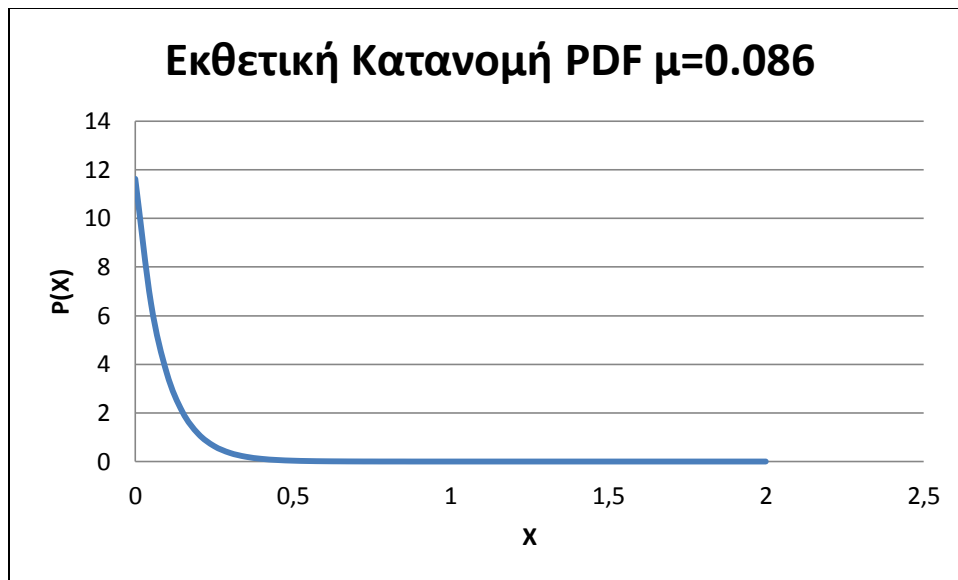
### 10.3 Χαρακτηριστικά εκθετικής κατανομής

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για την εκθετική κατανομή δίνεται από τον τύπο:

$$y = f(x|\mu) = \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x}{\mu}} \quad (38)$$

Όπου  $\Gamma(x)$  είναι η συνάρτηση γάμμα

Για  $\mu=0.086$  προκύπτει η PDF της εικόνας 81:



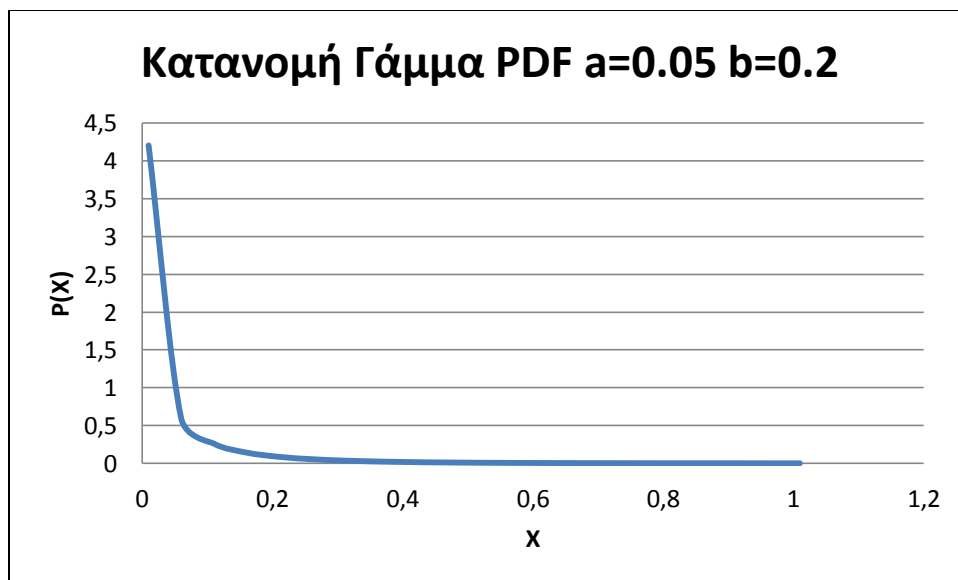
**Εικόνα 81:** Εκθετική κατανομή, οι παράμετρος  $\mu$  είναι 0.086.

### 10.4 Χαρακτηριστικά κατανομής γάμμα

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για την κατανομή γάμμα δίνεται από τον τύπο:

$$y = f(x|\alpha, b) = \frac{1}{b^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{b}} \quad (39)$$

Η παράμετρος  $\alpha$  είναι 0.05 και η  $b=0.2$



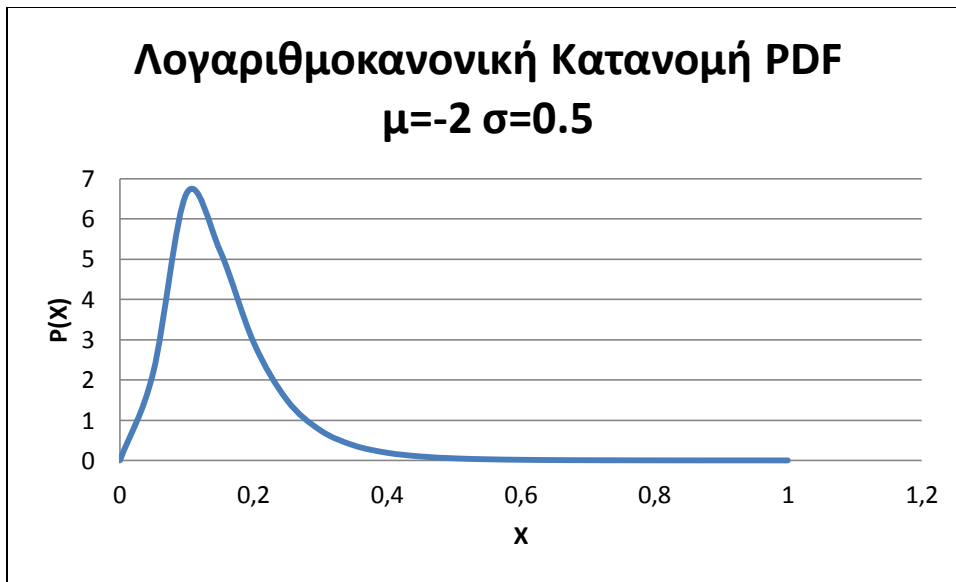
**Εικόνα 82:** Κατανομή γάμμα, οι παράμετροι είναι:  $\alpha=0.05$  και  $b=0.2$ .

## 10.5 Χαρακτηριστικά λογαριθμοκανονικής κατανομής

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για την λογαριθμοκανονική (lognormal) κατανομή δίνεται από τον τύπο:

$$y = f(x|\mu, \sigma) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (40)$$

Για  $\sigma=0.5$  και  $\mu=-2$  έχουμε:



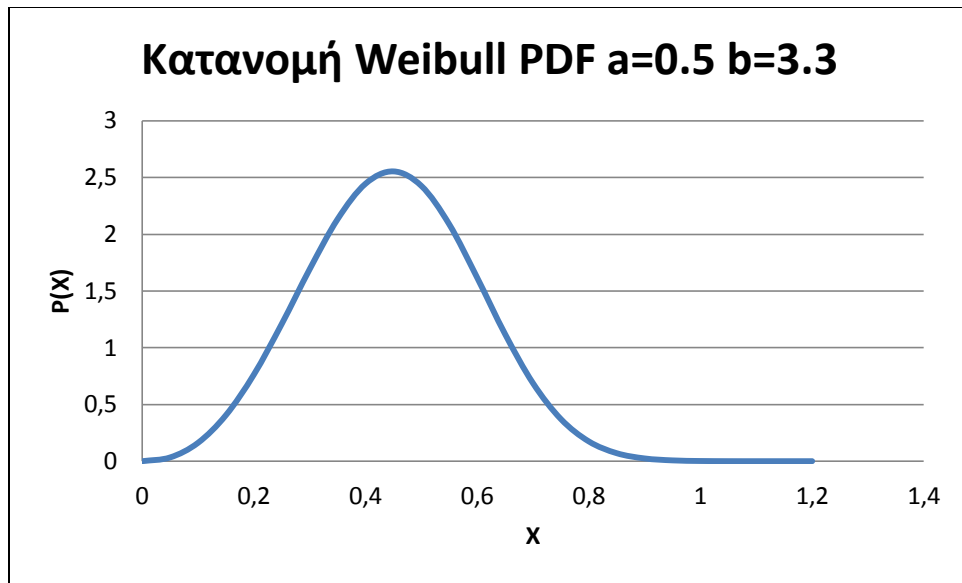
**Εικόνα 83:** Lognormal (λογαριθμοκανονική) κατανομή, οι παράμετροι είναι:  $\mu = -2$  και  $\sigma = 0.5$

## 10.6 Χαρακτηριστικά κατανομής Weibull

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για την κατανομή Weibull δίνεται από τον τύπο:

$$y = f(x|\alpha, b) = b\alpha^{-b} x^{b-1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^b} \quad (41)$$

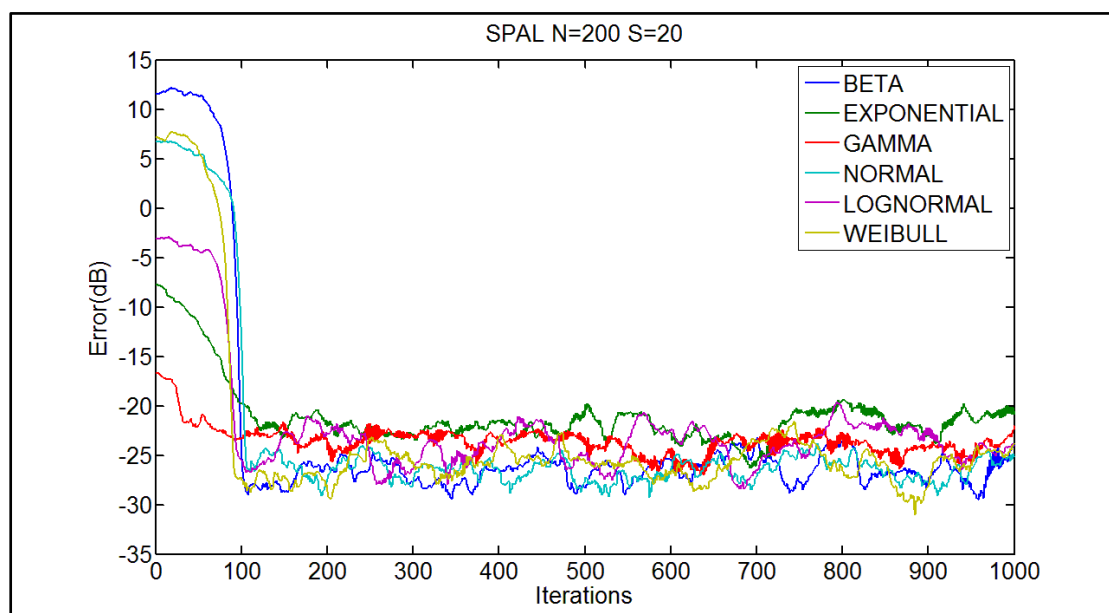
Η παράμετρος  $\alpha$  είναι 0.5 και η  $b=3.3$ .



**Εικόνα 84:** Lognormal (λογαριθμοκανονική) κατανομή, οι παράμετροι είναι:  $\alpha=0.5$  και  $b=3.3$

## 11. Αποτελέσματα από την εκτέλεση των αλγορίθμων και σύγκριση των προσεγγίσεων για τις παραπάνω κατανομές, των μη μηδενικών στοιχείων με εύρος τιμών [0,1], για διάνυσμα 200/20.

### 11.1 Αλγόριθμος SPAL



**Εικόνα 85:** Προσεγγίσεις αραιών διανυσμάτων (200/20) των οποίων τα μη μηδενικά στοιχεία δημιουργούνται από διάφορες κατανομές, από τον αλγόριθμο SPAL.

Ανεξάρτητα από την κατανομή και από το αρχικό σφάλμα, ο αλγόριθμος SPAL χρειάζεται τον ίδιο περίπου αριθμό επαναλήψεων για να επιτύχει την ίδια προσέγγιση. Στο τέλος των επαναλήψεων για κάθε κατανομή το MSE είναι περίπου το ίδιο.

Οι παράμετροι είναι:

- Το εύρος του hyperslab  $\epsilon=0.1*\sqrt{\text{noise\_variance}} = 0.1*0.1=0.01$  (εξίσωση (24))
- Η ακτίνα της  $I_1$  μπάλας και ισούται με  $S=20$  δηλαδή είναι ίση με το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων του sparse διανύσματος (εξίσωση (23))
- Το πλήθος των hyperslabs που συμμετέχουν στην εκτίμηση που γίνεται σε κάθε χρονική στιγμή  $n$ , είναι  $q=100$

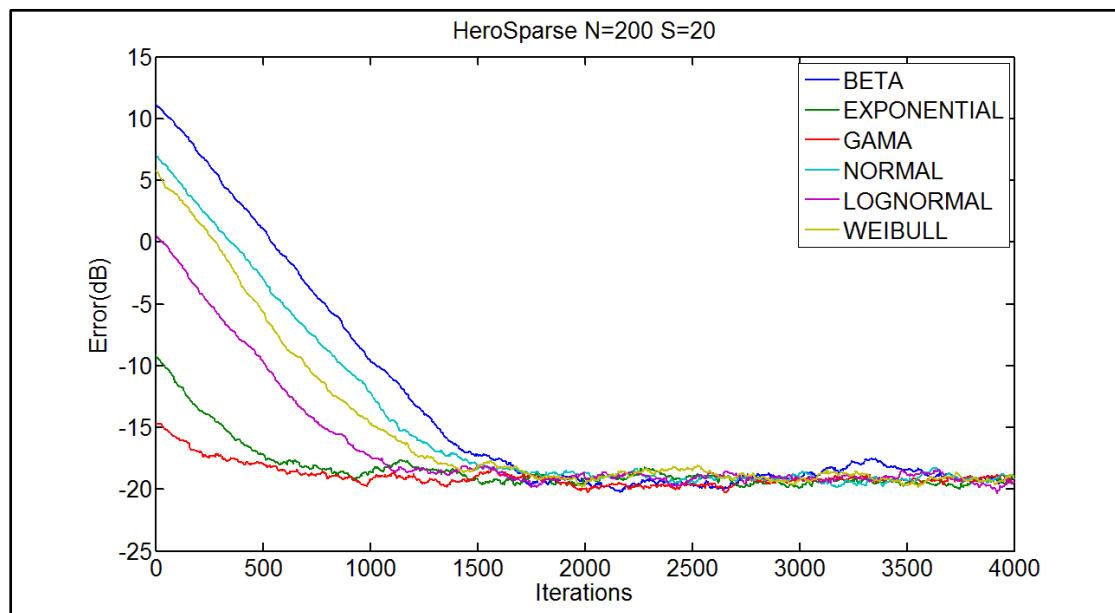


(εξισώσεις (26), (27))

- Η μεταβλητή  $\epsilon_n$  που χρησιμοποιείται στη στάθμιση της  $I_1$  μπάλας, ώστε να μην γίνεται διαίρεση με το μηδέν ισούται με 0.0005,  $\epsilon_n = 0.0005$  (εξίσωση (32))

Οι παράμετροι αυτές επιλέχτηκαν ώστε να έχουμε την βέλτιστη προσέγγιση από πλευράς ταχύτητας και ακρίβειας.

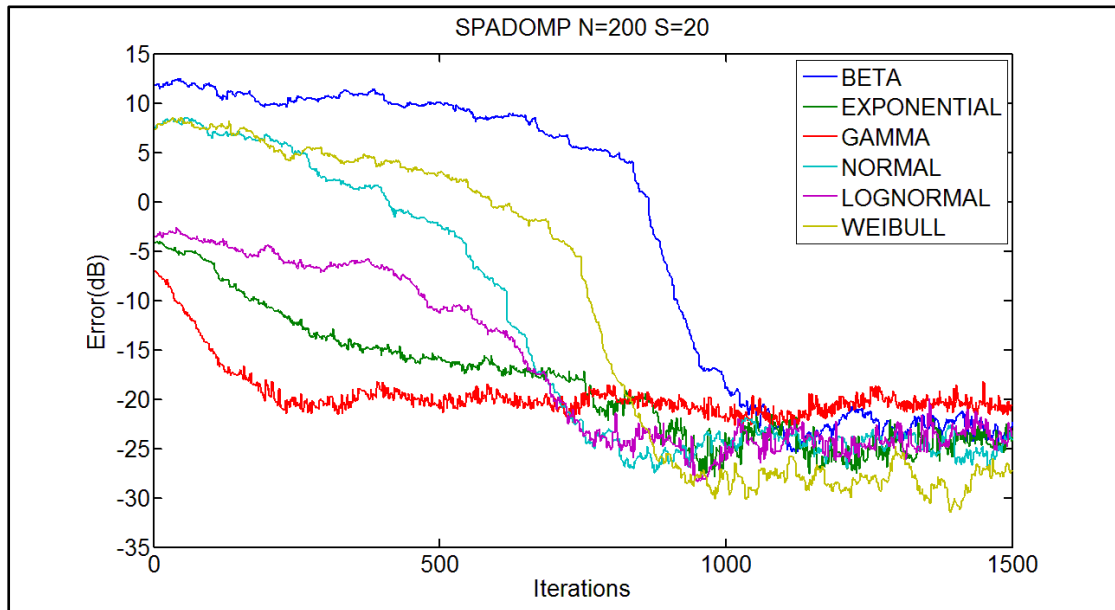
## 11.2 Αλγόριθμος Hero Sparse LMS



**Εικόνα 86:** Προσεγγίσεις αραιών διανυσμάτων (200/20) των οποίων τα μη μηδενικά στοιχεία δημιουργούνται από διάφορες κατανομές, από τον αλγόριθμο Hero Sparse LMS, τον απλούστερο LMS.

Η ταχύτητα προσέγγισης εξαρτάται από το αρχικό σφάλμα, δηλαδή την απόκλιση του αραιού διανύσματος που προσεγγίζεται από το ίδιου μήκους διάνυσμα που αποτελείται από μηδενικά. Όσο η διαφορά του αραιού διανύσματος, που θέλουμε να προσεγγίσουμε από το μηδενικό διάνυσμα είναι μεγαλύτερη τόσο περισσότερες επαναλήψεις χρειάζονται για την προσέγγιση του. Επίσης παρατηρούμε ότι όποιο και αν είναι το αρχικό σφάλμα MSE μετά την εκτέλεση κάποιου αριθμού επαναλήψεων το τελικό σφάλμα είναι ίδιο για όλες τις κατανομές. Η σταθερά  $\mu$  που χρησιμοποιήθηκε είναι  $\mu=0.00555$ , ώστε να έχουμε τη βέλτιστη προσέγγιση.

### 11.3 Αλγόριθμος SPADOMP



**Εικόνα 87:** : Προσεγγίσεις αραιών διανυσμάτων (200/20) των οποίων τα μη μηδενικά στοιχεία δημιουργούνται από διάφορες κατανομές, από τον αλγόριθμο SPADOMP.

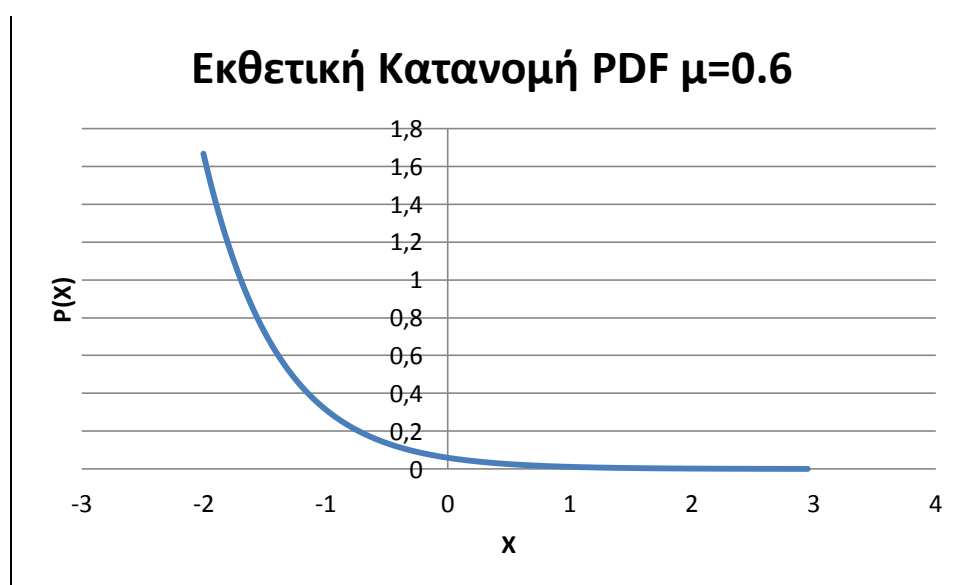
Παρατηρούμε ότι όσο μεγαλύτερο είναι το αρχικό MSE, τόσο περισσότερες επαναλήψεις χρειάζονται για να προσεγγιστεί το αραιό διάνυσμα. Επίσης η προσέγγιση που γίνεται για όλες τις κατανομές είναι περίπου ίδια και το MSE κυμαίνεται στην περιοχή από -25dB μέχρι -20dB. Τέλος βλέπουμε ότι στη κατανομή γάμμα η οποία ξεκινάει από το μικρότερο MSE καταλήγει να έχει το μεγαλύτερο MSE μετά την εκτέλεση των επαναλήψεων σε σχέση με τις άλλες κατανομές. Να υπενθυμίσουμε ότι σε αυτήν την κατανομή μεγαλύτερες πιθανότητες έχουν να εμφανιστούν αριθμοί κοντά στο μηδέν και όχι στο ένα. Οι σταθερές του αλγορίθμου είναι  $\lambda=0.05$  και  $\mu=0.02$ , ώστε να έχουμε τη βέλτιστη προσέγγιση.

## 12. Χρησιμοποίηση διαφορετικών παραμέτρων στις κατανομές ώστε τα μη μηδενικά στοιχεία να παίρνουν τιμές όχι από κάποιο συγκεκριμένο εύρος.

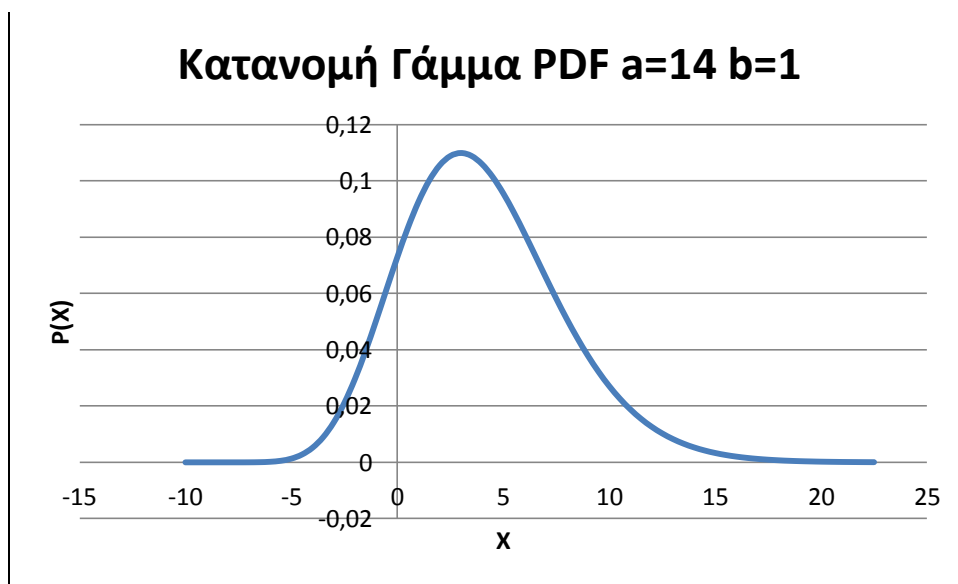
Παρακάτω δίνονται οι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας για τις διάφορες κατανομές και οι παράμετροί τους. Οι εξισώσεις των κατανομών είναι ίδιες με αυτές που αναφέρθηκαν στο προηγούμενο υποκεφάλαιο.



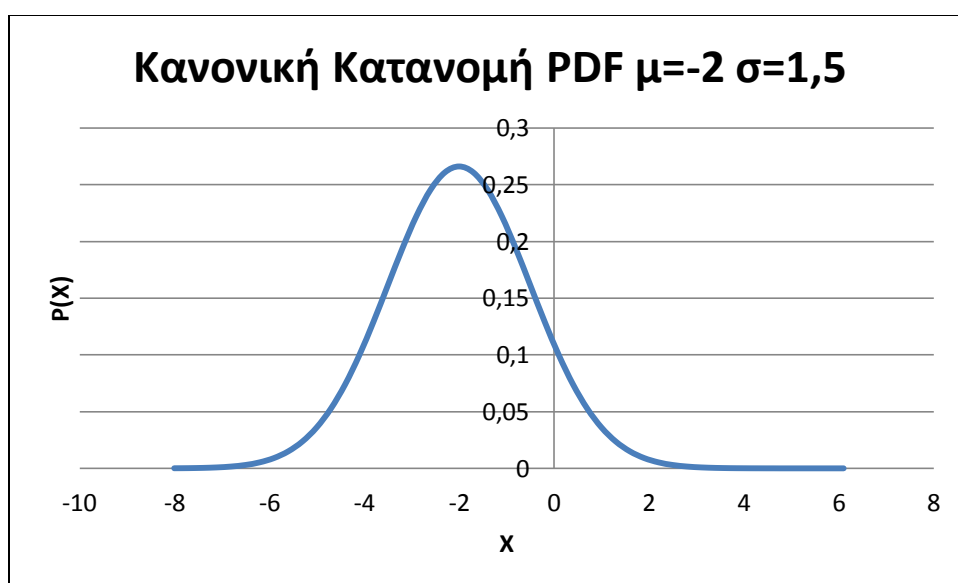
Εικόνα 88: Κατανομή βήτα, οι παράμετροι είναι:  $a=4$  και  $b=1.2$



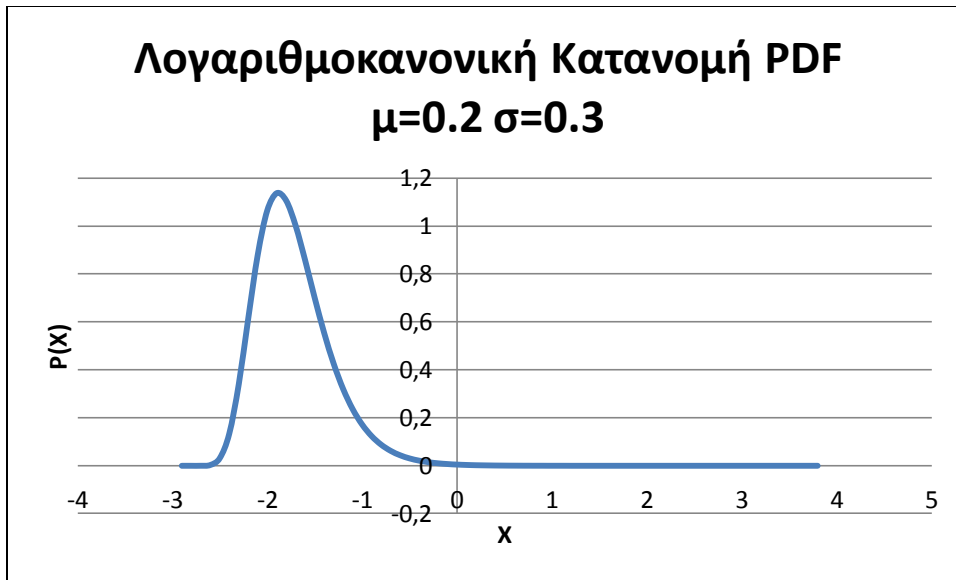
Εικόνα 89: Εκθετική κατανομή, οι παράμετροι είναι:  $\mu=0.6$



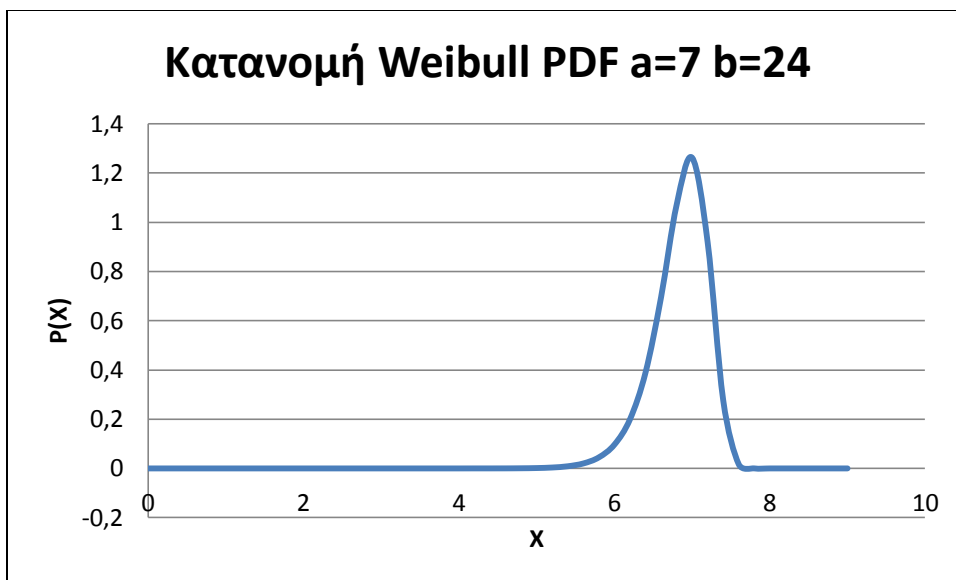
**Εικόνα 90:** Κατανομή γάμμα, οι παράμετροι είναι:  $\alpha=14$  και  $b=1$ .



**Εικόνα 91:**Κανονική κατανομή. Η μέση τιμή είναι -2 και η απόκλιση είναι 1.5 .

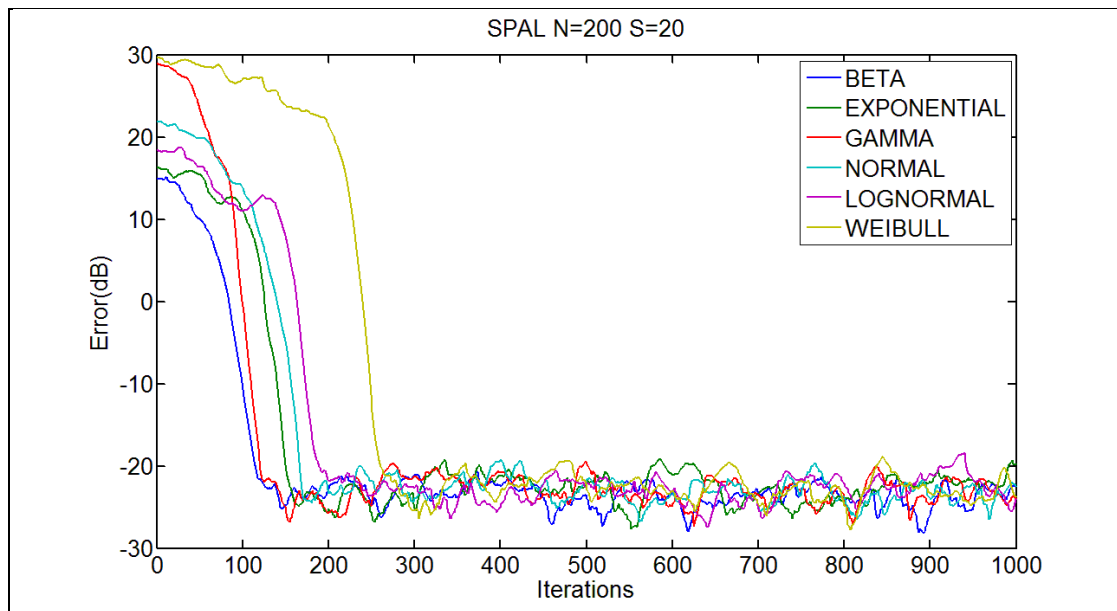


**Εικόνα 92:** Lognormal (λογαριθμοκανονική) κατανομή, οι παράμετροι είναι:  $\mu = 0.2$  και  $\sigma = 0.3$



**Εικόνα 93:** Κατανομή Weibull, οι παράμετροι είναι:  $a=7$  και  $b=24$

## 12.1 Αλγόριθμος SPAL



**Εικόνα 94:** Προσεγγίσεις αραιών διανυσμάτων (200/20) των οποίων τα μη μηδενικά στοιχεία δημιουργούνται από διάφορες κατανομές, από τον αλγόριθμο SPAL.

Παρατηρούμε, αρχικά, ότι για διαφορετικές κατανομές χρειάζεται διαφορετικός αριθμός επαναλήψεων ώστε να έχουμε το ίδιο MSE. Ακόμα μετά την εκτέλεση του απαιτούμενου αριθμού επαναλήψεων το τελικό MSE είναι περίπου το ίδιο για όλες τις κατανομές. Οι κατανομές weibull και gamma παρόλο που ξεκινάνε από το ίδιο MSE χρειάζονται αρκετά διαφορετικό αριθμό επαναλήψεων για την ίδια προσέγγιση, αυτό συμβαίνει γιατί στην κατανομή weibull (εικόνα 93) το εύρος τιμών των στοιχείων του αραιού διανύσματος είναι πιο «στενο» από αυτό της κατανομής γάμμα (εικόνα 90). Το ίδιο συμβαίνει με την lognormal (εικόνα 92) και normal (εικόνα 91) κατανομή, η lognormal που έχει ένα πιο «στενό» εύρος προσεγγίζεται πιο αργά από την κανονική. Τέλος το ίδιο μπορούμε να πούμε για τις κατανομές βήτα (εικόνα 88) και την εκθετική (εικόνα 89), η βήτα προσεγγίζεται πιο γρήγορα.

Οι παράμετροι του είναι:

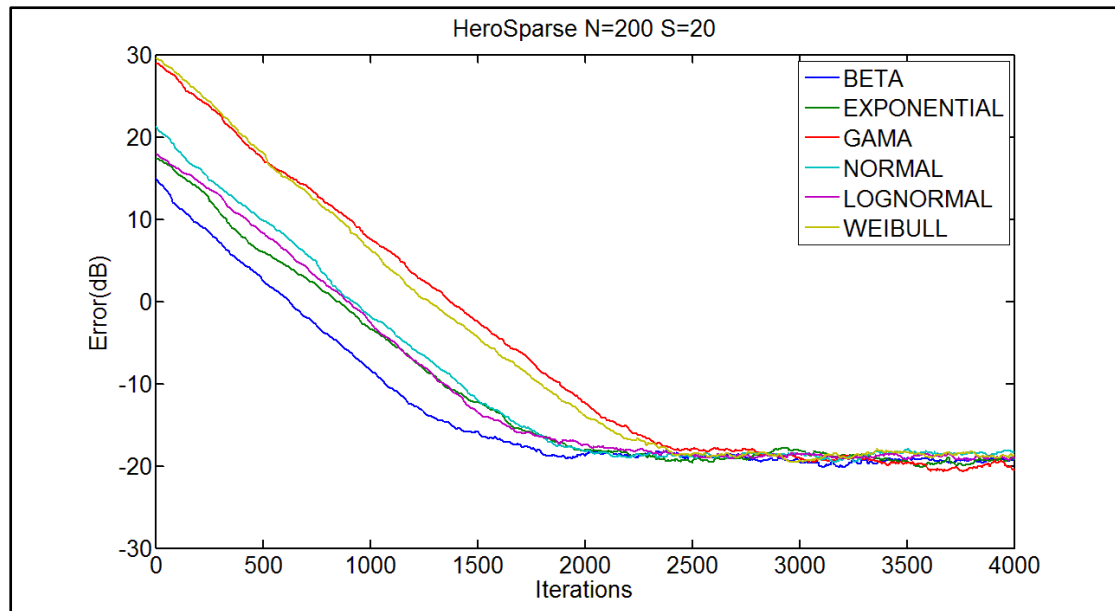
- Το εύρος του hyperslab  $\varepsilon=0.1*\sqrt{\text{noise\_variance}} = 0.1*0.1=0.01$  (εξίσωση (24))
- Η ακτίνα της  $l_1$  μπάλας και ισούται με  $S=20$  δηλαδή είναι ίση με το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων του sparse διανύσματος (εξίσωση (23))
- Το πλήθος των hyperslabs που συμμετέχουν στην εκτίμηση που γίνεται σε κάθε χρονική στιγμή  $n$ , είναι  $q=100$

(εξισώσεις (26), (27))

- Η μεταβλητή  $\epsilon_n$  που χρησιμοποιείται στη στάθμιση της  $I_1$  μπάλας, ώστε να μην γίνεται διαίρεση με το μηδέν ισούται με 0.0005,  $\epsilon_n = 0.0005$  (εξίσωση (32))

Οι παράμετροι είναι ίδιες με αυτές του πειράματος της εικόνας 85.

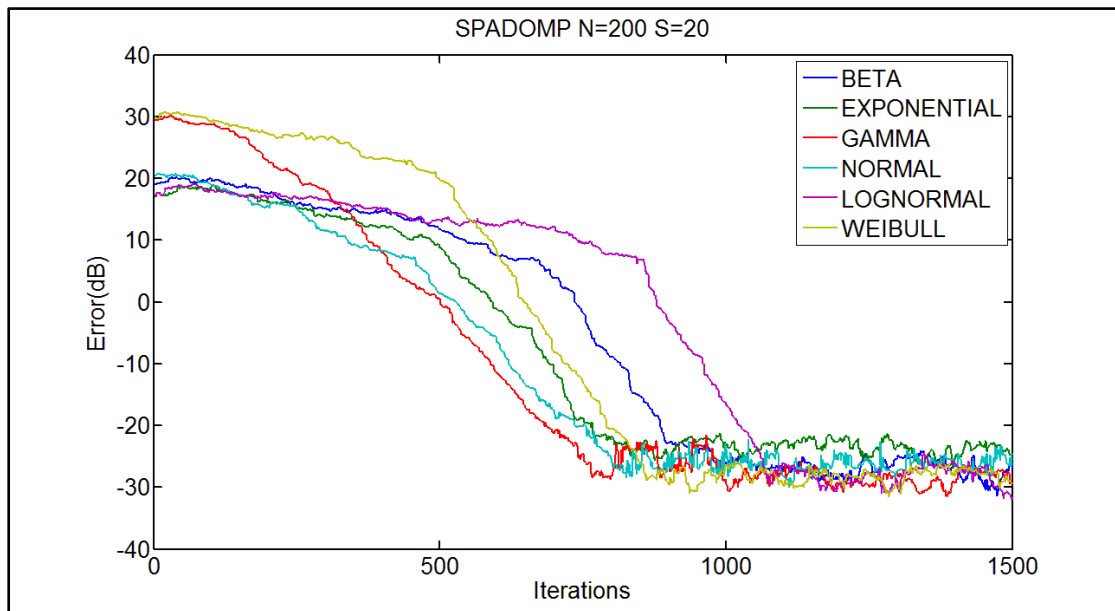
## 12.2 Αλγόριθμος Hero Sparse LMS



**Εικόνα 95:** Προσεγγίσεις αραιών διανυσμάτων (200/20) των οποίων τα μη μηδενικά στοιχεία δημιουργούνται από διάφορες κατανομές, από τον αλγόριθμο Hero Sparse LMS, τον απλούστερο LMS.

Τα συμπεράσματα παραμένουν ίδια με την δοκιμή για τον LMS της εικόνας 86. Η σταθερά  $\mu$  που χρησιμοποιήθηκε είναι  $\mu=0.00555$ , όπως και στο πείραμα της εικόνας 86, για να έχουμε τη βέλτιστη προσέγγιση από πλευράς ταχύτητας και ακρίβειας.

### 12.3 Αλγόριθμος SPADOMP



**Εικόνα 96:** : Προσεγγίσεις αραιών διανυσμάτων (200/20) των οποίων τα μη μηδενικά στοιχεία δημιουργούνται από διάφορες κατανομές, από τον αλγόριθμο SPADOMP.

Παρατηρούμε ότι η ταχύτητα προσέγγισης για τις διάφορες κατανομές διαφέρει αρκετά και δεν εξαρτάται από το αρχικό σφάλμα. Το τελικό σφάλμα MSE είναι περίπου ίδιο για όλες τις κατανομές και βρίσκεται στο εύρος από -30dB μέχρι -25dB. Την πιο αργή προσέγγιση την έχουμε για την lognormal κατανομή και την πιο γρήγορη για την gamma. Στην εικόνα 92 για την PDF της lognormal κατανομής παρατηρούμε ότι έχει ένα «στενό» εύρος τιμών, δηλαδή το  $x$  έχει μεγάλη πιθανότητα σε ένα περιορισμένο εύρος τιμών, ενώ στην κατανομή γάμμα το εύρος αυτό είναι πολύ μεγαλύτερο όπως φαίνεται στην εικόνα 90. Οι σταθερές του αλγορίθμου που επιλέχτηκαν είναι  $\lambda=0.05$  και  $\mu=0.02$  ώστε να έχουμε γρηγορότερη και ακριβέστερη προσέγγιση και είναι ίδιες με το πείραμα της εικόνας 87.



### 13. Συμπεράσματα-Προτάσεις

Ο αλγόριθμος που χρειάζεται τις λιγότερες επαναλήψεις είναι ο SPAL περισσότερες επαναλήψεις χρειάζεται ο SPADOMP ενώ ο Hero LMS προσεγγίζει το αραιό διάνυσμα με πολύ πιο αργό ρυθμό. Από την πλευρά της ακρίβειας ο LMS είναι ο χειρότερος με ελάχιστη βελτίωση από τους ZA-LMS και RZA-LMS, ο SPAL πετυχαίνει πολύ καλή ακρίβεια με MSE που κυμαίνεται από -30 ως -25 και ο SPADOMP πετυχαίνει την καλύτερη ακρίβεια. Οι αλγόριθμοι SPAL και SPADOMP χρειάζεται να «γνωρίζουν» το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων του αραιού διανύσματος που προσεγγίζεται, δηλαδή την  $I_0 \text{ norm}$ , και έτσι σε περίπτωση που αλλάξει αυτή ενώ εκτελείται ο αλγόριθμος δεν θα προσεγγιστεί το καινούργιο διάνυσμα εκτός εάν τη στιγμή που αλλάζει το διάνυσμα ενημερωθούν οι παράμετροι των αλγορίθμων για τη νέα  $I_0 \text{ norm}$  του καινούργιου διανύσματος. Ο LMS ωστόσο δεν απαιτεί τη γνώση αυτής της παραμέτρου. Οι εκδοχές ZA-LMS και RZA-LMS όταν αλλάξει η  $I_0 \text{ norm}$  του διανύσματος θα ήθελαν μια μικρή ρύθμιση στις παραμέτρους  $\rho, \epsilon$  για να έχουμε τη βέλτιστη προσέγγιση ενώ η παράμετρος  $\mu$  δεν χρειάζεται να αλλάξει. Όταν αλλάζει το μήκος του διανύσματος στον LMS χρειάζονται ρύθμιση και οι παράμετροι, έτσι η παράμετρος  $\mu$  όταν διπλασιάζεται το μήκος του διανύσματος πρέπει να υποδιπλασιαστεί. Στον SPADOMP η ακριβής ρύθμιση των παραμέτρων δεν είναι τόσο αναγκαία. Στον SPAL η ρύθμιση αυτή είναι ακόμα πιο χαλαρή και για τις ίδιες παραμέτρους έχουμε πολύ καλά αποτελέσματα για διαφορετικά μήκη αραιών διανυσμάτων. Τέλος παρατηρούμε ότι όταν το διάνυσμα γίνεται μεγάλο της τάξης των 1000 στοιχείων ο SPAL διατηρεί τα πλεονεκτήματα σε σχέση με τους άλλους αλγορίθμους και δεν χάνει ούτε σε ακρίβεια ούτε σε ταχύτητα, ενώ ο χρόνος εκτέλεσης παραμένει μικρός. Στον αλγόριθμο LMS όσο μεγαλύτερο είναι το αρχικό σφάλμα τόσο πιο αργή είναι η προσέγγιση του αραιού διανύσματος. Στους αλγορίθμους SPAL και SPADOMP η ταχύτητα προσέγγισης δεν εξαρτάται τόσο από το αρχικό σφάλμα αλλά από την κατανομή των τιμών των μη μηδενικών στοιχείων του αραιού διανύσματος, όταν το εύρος του διαστήματος που παίρνουν τιμές τα μη μηδενικά στοιχεία είναι «στενό» η προσέγγιση είναι πιο αργή.

Όλοι οι αλγόριθμοι θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν αποτελεσματικά εκτός από τη διαμόρφωση 2-PAM και για m-PAM ακόμα το  $x$  (βλ. εξίσωση (1)  $y_n = x_n^T h_* + u_n, \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ) που στις δοκιμές μας παίρνει τις τιμές +1 και -1, θα μπορούσε να παίρνει τιμές

όχι από ένα σύνολο με διακριτά στοιχεία αλλά από ένα συνεχές διάστημα. Επίσης θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν διαμορφώσεις των οποίων το διάγραμμα αστερισμού έχει παραπάνω από μία διάσταση και με παράλληλη επεξεργασία για κάθε διάσταση θα προσεγγίζονταν το αραιό δάνυσμα στο οποίο αντιστοιχεί η κάθε διάσταση.

## 14. Παράρτημα

Παρακάτω δίνεται ο κώδικας στο matlab των αλγορίθμων.

### 14.1 Παράμετροι των Αλγορίθμων Hero LMS

```
clear all;
clc;
N=100;
S=20;
iterations=1500*N;
iteraver=1;
m=0.011;
eps=200;
r=0.00020;

w=[randn(S,1);zeros(N-S,1)];
w=w(randperm(N));
w=w';

x=randsrc(iterations,1);

for i=1:1:iterations/N
    for j=1:1:N
        x3(j,i)=x(i*j,1);
    end
end

for i=1:1:iterations/N
    y(i)=w*x3(:,i)+sqrt(0.01)*randn;
end

for i=1:1:N
    wcomp(N,i)=0;
end
```

### 14.2 Αλγόριθμος Hero LMS

```
for i=1:1:iterations/N
```

```

        e(i)=y(i)-wcomp(i,:)*x3(:,i);
        wcomp(i+1,:)=wcomp(i,:)+m*e(i)*x3(:,i)';
    end

    for i=1:1:iterations/N
        er1(i)=sum((w-wcomp(i,:)).^2);
    end

    for i=1:1:N
        wcomp(N,i)=0;
    end
end

```

### 14.3 Αλγόριθμος RZA-LMS

```

    for i=1:1:iterations/N
        for j=1:1:N
            if wcomp(i,j)~=0
                sgn(1,j)=wcomp(i,j)/abs(wcomp(i,j));
            else
                sgn(1,j)=0;
            end
        end
        for k=1:1:N
            wnorm=wcomp(i,k)^2;
        end
        wnorm=sqrt(wnorm);
        e(i)=y(i)-wcomp(i,:)*x3(:,i);
        wcomp(i+1,:)=wcomp(i,:)-r*(sgn(1,:)/(1+eps*wnorm))+m*(e(i)*x3(:,i)');
    end

    for i=1:1:iterations/N
        er2(i)=sum((w-wcomp(i,:)).^2);
    end
end

```

### 14.4 Αλγόριθμος ZA-LMS

```

    for i=1:1:N
        wcomp(N,i)=0;
    end

    for i=1:1:iterations/N
        for j=1:1:N
            if wcomp(i,j)~=0
                sgn(1,j)=wcomp(i,j)/abs(wcomp(i,j));
            else
                sgn(1,j)=0;
            end
        end
        e(i)=y(i)-wcomp(i,:)*x3(:,i);
        wcomp(i+1,:)=wcomp(i,:)-r*sgn(1,:)+m*e(i)*x3(:,i)';
    end
end

```

```

for i=1:1:iterations/N
    er3(i)=sum((w-wcomp(i,:)).^2);
end

figure;

plot(1:iterations/N,10*log10(er1),1:iterations/N,10*log10(er3),1:iterations/N,10*log10(er2));
title(['Hero Sparse LMS N=' , num2str(N) , ' S=',num2str(S),]);
legend({'LMS', 'ZA-LMS', 'RZA-LMS'})
ylabel('Error (dB)');
xlabel('Iterations');

```

## 14.5 Αλγόριθμος SPADOMP

```

clear all;
clc;

N=200;           %Αριθμός στοιχείων του αραιού διανύσματος c
S=20;           %Αριθμός στοιχείων του αραιού διανύσματος c τα
                %οποία δεν είναι μηδέν

n=1500;         %Αριθμός επαναλήψεων
l=0.05;         %Σταθερά λ
m=0.02;         %Σταθερά μ
SNR=20;         %SNR σε db
stepas=0.007;

c_or=[randn(S,1);zeros(N-S,1)]; %Δημιουργία του αραιού διανύσματος
c_or(N,1) το οποίο θα προσεγγιστεί με τον αλγόριθμο

c_or=c_or(randperm(N)); %Τυχαία τοποθέτηση των μη μηδενικών στοιχείων
στο sparse διάνυσμα

phi=randsrc(N,n); %Δημιουργία του πίνακα Φ(N,n) που αποτελείται
απο +1 και -1

y=phi'*c_or+sqrt(1/(10^(SNR/10)))*randn; %Δημιουργία του διανύσματος
y(n,1) και προσθήκη θορύβου ανάλογα με το SNR που έχουμε επιλέξει

for b=1:1:N           % ΑΡΧΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΓΙΑ
ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ
    for dr=1:1:n       % [.....
        c(b,dr)=0;
    end
end

for b=1:1:N
    for dr=1:1:n
        wl(b,dr)=0;
    end
end

```

```

end

for v=1:1:N
    p(v,:)=0;
end

u(1,1)=y(1,1);

for b=1:1:n
    mult(b,1)=0;
end

%.....]

for i=2:1:n

p(:,i)=1*p(:,i-1)+phi(:,i-1)*u(i-1,1);
%Υπολογισμός του signal proxy βήμα 1 p(:,i)--->p(n)

max1=-100;

for z=1:1:N %Εύρεση του μεγίστου στοιχείου του p(:,i)--->p(n) που
θα χρησιμοποιηθεί αργότερα για την
if abs(p(z,i))>max1 %εύρεση των 2*S μεγίστων στοιχείων του
p(:,i)--->p(n) για την εύρεση του συνόλου Ω
    max1=abs(p(z,i));
end
end

steps1=round(max1/stepas);
for rt=1:1:steps1
    for o=1:1:N
        pos4(rt,o)=0;
    end
end

%Εύρεση των θέσεων των 2*S μεγαλύτερων στοιχείων του p(:,i)--->p(n).
Δηλαδή σε κάθε επανάληψη του i (από 1 μέχρι n) εκτελείται ένας άλλος
βρόχος και

    f=1;

%η μεταβλητή h μειώνεται με βήμα 0.005 και συγκρίνεται με κάθε
στοιχείο του p(n) μέχρι να βρεθούν οι θέσεις των 2*S μεγίστων
στοιχείων του p(:,i)--->p(n)

    crit=0;

% μόλις γίνει αυτό ο βρόχος σταματάει και στη σειρά thes του πίνακα
pos4 με 1 συμβολίζονται τα 2*S μεγαλύτερα στοιχεία και τα υπόλοιπα
με μηδέν
    for h=max1:-stepas:0
        crit=0;
        for z=1:1:N
            if (abs(p(z,i))>h)
%Δηλαδή υπολογίζεται το σύνολο Ω βήμα 2
                pos4(f,z)=1;

```

```

        else
            pos4(f,z)=0;
        end
        crit=crit+pos4(f,z);
    end

    if (crit>=2*S)
        thes=f;
        break;

    else
        thes=2;
    end
    f=f+1;

end
for k=1:1:N
%Εύρεση της θέσης των στοιχείων του c(k,i-1)--->c(n-1) που δεν είναι
μηδέν
    if (c(k,i-1)>0) | (c(k,i-1)<0)
%βήμα 3        pos2(k)=1;
    else
        pos2(k)=0;
    end
end

for k=1:1:N
%βήμα 3 εύρεση του συνόλου Λ
    if (pos4(thes,k)==1) | (pos2(k)==1)
        pos6(k)=1;
    else
        pos6(k)=0;
    end
end

phit(i,:)=phi(:,i)';
%Εύρεση του γινομένου (Φ|Λ T)*(w|Λ(n-1))---->mult(i,1)
sum=0;
for sk=1:1:N
    if pos6(sk)==1
        sum=sum+phit(i,sk)*wl(sk,i-1);
    end
end
mult(i,1)=sum;

e(i,1)=y(i,1)-mult(i,1);
%Εύρεση του e(n) βήμα 4

for asd=1:1:N
    if pos6(asd)==1
        wl(asd,i)=wl(asd,i-1)+m*phi(asd,i)*e(i,1);
%Υπολογισμός του w|Λ(n) βήμα 5
    end
end

max=-100;

for z=1:1:N

```

```

%Εύρεση του μεγίστου στοιχείου του w1 που θα χρησιμοποιηθεί αργότερα
για την
    if abs(w1(z,i))>max
%εύρεση των S μεγίστων στοιχείων του w1 και τον μηδενισμό των
υπολοίπων στοιχείων
        max=abs(w1(z,i));
    end
end
steps=round(max/stepas);
for rt=1:1:steps
    for o=1:1:N
        pos(rt,o)=0;
    end
end
thes2=2;
if i>=2
%Εύρεση των θέσεων των S μεγαλύτερων στοιχείων του w1(:,i)---
>w|Λs(n). Δηλαδή σε κάθε επανάληψη του i (από 1 μέχρι n) εκτελείται
ένανς άλλος βρόχος και
    h=max;
%η μεταβλητή h μειώνεται με βήμα stepas και συγκρίνεται με κάθε
στοιχείο του w1(:,i)--->w|Λs(n) μεχρι να βρεθούν οι θέσεις των S
μεγίστων στοιχείων του w1(:,i)--->w|Λs(n)
    f=1;
% μόλις γίνει αυτό ο βρόχος σταματάει και στη σειρά thes του πίνακα
pos με 1 συμβολίζονται τα S μεγαλύτερα στοιχεία και τα υπόλοιπα με
μηδέν
    crit=0;
    for h=max:-stepas:0
        crit=0;
        for z=1:1:N
            if (abs(w1(z,i))>h)
                pos(f,z)=1;
            else
                pos(f,z)=0;
            end
            crit=crit+pos(f,z);
        end

        if (crit>=S)
            thes2=f;
            break;

        else
            thes2=2;
        end
        f=f+1;
    end
end
if thes2~=2
%Ενημερώνεται ο πίνακας c σύμφωνα με τον w1, βήμα 7
    for z=1:1:N
        if (pos(thes2,z)==0)
            c(z,i)=0;
        else
            c(z,i)=w1(z,i);
        end
    end
end
end

```

```

end

u(i,1)=y(i,1)-phit(i,:)*c(:,i);

%Υπολογισμός του u(n) βήμα 8

end
for q=2:1:n

%Εδώ υπολογίζεται το σφάλμα για κάθε προσέγγιση του c για n
επαναλήψεις.
sum=0;
for sd=1:1:N
    minus=c_or(sd,1)-c(sd,q);
    minus=minus^2;
    sum=sum+minus;
end
er4(q)=sum;
end

```

## 14.6 Αλγόριθμος SPAL

Ο κώδικας στο matlab για τον αλγόριθμο SPAL βρίσκεται στη διεύθυνση: <http://cgi.di.uoa.gr/~stheodor/adaptivelearning.html>