ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΛΟΠΟΝΝΗΣΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ & ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ

Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη Λογιστική και Χρηματοοικονομική

Master of Science (M.Sc)
in Accounting and Finance

<u>Μεταπτυχιακή Διατριβή</u>

Μέθοδοι Αποτίμησης Δικαιωμάτων Προαίρεσης

Καρατζιάς Θεόδωρος

Επιβλέπων Καθηγητής: Γιακουμάτος Στέφανος

Διατριβή υποβληθείσα στο Τμήμα Λογιστικής & Χρηματοοικονομικής του Πανεπιστημίου Πελοποννήσου. Η παρούσα διατριβή αποτελεί μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος στη Λογιστική και Χρηματοοικονομική

Καλαμάτα, Μάρτιος 2023

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΛΟΠΟΝΝΗΣΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ & ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ

Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη Λογιστική και Χρηματοοικονομική

Master of Science (M.Sc)
in Accounting and Finance

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή

Γιακουμάτος Στέφανος (Επιβλέπων)
Καθηγητής, Τμήμα Λογιστικής και Χρηματοοικονομικής, Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου

Γιαννόπουλος Βασίλης
Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Λογιστικής και Χρηματοοικονομικής, Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου

Αγοράκη Μαρία Ελένη
Επίκουρος Καθηγήτρια, Τμήμα Λογιστικής και Χρηματοοικονομικής, Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου

Ο Καρατζιάς Θεόδωρος

δηλώνω υπεύθυνα ότι:

1) Είμαι ο κάτοχος των πνευματικών δικαιωμάτων της πρωτότυπης αυτής εργασίας και από όσο γνωρίζω η εργασία μου δε συκοφαντεί πρόσωπα, ούτε προσβάλει τα πνευματικά δικαιώματα τρίτων.

2) Αποδέχομαι ότι το Τμήμα Λογιστικής & Χρηματοοικονομικής μπορεί, χωρίς να αλλάξει το περιεχόμενο της εργασίας μου, να τη διαθέσει σε ηλεκτρονική μορφή μέσα από τη ψηφιακή Βιβλιοθήκη του Ιδρύματος, να την αντιγράψει σε οποιοδήποτε μέσο ή/και σε οποιοδήποτε μορφότυπο καθώς και να κρατά περισσότερα από ένα αντίγραφα για λόγους συντήρησης και ασφάλειας.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα Καθηγητή του τμήματος Λογιστικής και Χρηματοοικονομικής κύριο Γιακουμάτο Στέφανο, που παρείχε το έναυσμα για την ενασχόλησή μου με το αντικείμενο των χρηματοοικονομικών παραγώγων, αλλά και για την καθοδήγησή του προς την ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Επίκουρο Καθηγητή κύριο Γιαννόπουλο Βασίλη και την Επίκουρο Καθηγήτρια κυρία Αγοράκη Μαρία Ελένη που δέχτηκαν να είναι μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής της μεταπτυχιακής μου διατριβής.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για την πολύπλευρη στήριξή τους καθόλη τη διάρκεια αυτής της προσπάθειας.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία πραγματεύεται καταρχάς τα χρηματοοικονομικά παράγωγα, χρηματοοικονομικά εργαλεία που χρησιμοποιούνται τόσο για τη διαχείριση του ρίσκου της επένδυσης σε άλλα χρηματοοικονομικά εργαλεία, όσο και για κερδοσκοπία. Γίνεται αναφορά στα διάφορα είδη των χρηματοοικονομικών παραγώγων, στις αγορές που αυτά διαπραγματεύονται και στους συμμετέχοντες στις αγορές αυτές, προκειμένου να γίνει κατανοητή η χρήση τους.

Δίνεται έμφαση στα δικαιώματα προαίρεσης, τα χαρακτηριστικά και τις κατηγορίες αυτών και στα άνω και κάτω φράγματα των τιμών που αυτά μπορεί να έχουν ανάλογα το είδος τους. Παρουσιάζεται η μέθοδος του διωνυμικού μοντέλου των για την αποτίμηση των δικαιωμάτων προαίρεσης των Cox-Ross-Rubenstein, βασική υπόθεση της οποίας είναι ότι η τιμή της υποκείμενης μετοχής ακολουθεί έναν τυχαίο περίπατο.

Αναφέρονται οι βασικές έννοιες της στοχαστικής ανάλυσης και αποδεικνύεται ότι η τιμή της μετοχής ακολουθεί μια στοχαστική διαδικασία, τη γεωμετρική κίνηση Brown, ενώ η τιμή ενός δικαιώματος προαίρεσης πάνω σε μία μετοχή αποτελεί μια συνάρτηση της τιμής της υποκείμενης μετοχής και του χρόνου, συνάρτηση η οποία μελετήθηκε από τον μαθηματικό K. Itô και στην οποία στηρίζεται η μέθοδος αποτίμησης Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων προαίρεσης των Black-Scholes-Merton.

Γίνεται υπολογισμός της μεταβλητότητας, ενός στατιστικό μέτρου για την ποικιλία των τιμών των αποδόσεων ενός περιουσιακού στοιχείου σε μια χρονική περίοδο, με χρήση ιστορικών στοιχείων και παρουσιάζεται η τεκμαρτή μεταβλητότητα, παράμετρος η οποία αποτελεί ένα μέσο για την παρακολούθηση της στάσης της αγοράς αναφορικά με τη μεταβλητότητα μιας συγκεκριμένης μετοχής, ενώ χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της αξίας ενός δικαιώματος προαίρεσης μέσω του μοντέλου των Black-Scholes-Merton.

Πραγματοποιείται παρουσίαση των greek letters, μεταβλητών που εκτιμούν την ευαισθησία της τιμής ενός δικαιώματος προαίρεσης απέναντι σε παράγοντες που δύναται να την επηρεάσουν και τέλος παρατίθενται στρατηγικές τοποθέτησης σε δικαιώματα προαίρεσης.

Λέξεις κλειδιά: Χρηματοοικονομικά παράγωγα , Δικαιώματα προαίρεσης, Στοχαστικές διαδικασίες, Black-Scholes-Merton, Greek letters

Abstract

This thesis first deals with financial derivatives, financial instruments that are used both to manage the risk of investing in other financial instruments, and for speculation. Reference is made to the various types of financial derivatives, the markets in which they are traded and the participants in these markets, in order to understand their use.

Emphasis is placed on the options, features and categories thereof and the upper and lower price barriers that they may have depending on their type. The Cox-Ross-Rubenstein binomial model method for valuing options is presented, the basic assumption of which is that the price of the underlying stock follows a random walk.

The basic concepts of stochastic analysis are mentioned and it is shown that the stock price follows a stochastic process, the Brownian geometric motion, while the price of an option on a stock is a function of the price of the underlying stock and time, a function that was studied by the mathematician K. Itô and on which the Black-Scholes-Merton European options valuation method is based.

Volatility, a statistical measure of the price variation of an asset's returns over a period of time, is calculated using historical data and the implied volatility is presented, a parameter through which the market's attitude towards volatility of a particular stock is monitored, while it is used to calculate the value of an option through the Black-Scholes-Merton model.

The Greek letters are presented, variables that estimate the sensitivity of the price of an option to factors that can affect it, and finally strategies for positioning in options are listed.

Keywords: Financial derivatives, Options, Stochastic processes, Black-Scholes-Merton, Greek letters

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΣΥΝΤΟΜΟΓΡΑΦΙΕΣ

CAPM	Capital Asset Pricing Model
CBOT	Chicago Board Of Trade
CME	Chicago Mercantile Exchange
CRR	Cox-Ross-Rubenstein
OTC	Over The Counter

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα χρηματοοικονομικά παράγωγα αποτελούν χρηματοοικονομικά εργαλεία, η τιμή των οποίων προκύπτει από χρηματοοικονομικά εργαλεία ή περιουσιακά στοιχεία. Χρησιμοποιούνται για τη διαχείριση και αντιστάθμιση του ρίσκου που ενέχει μια επένδυση, αλλά και για κερδοσκοπία.

Μια από τις σημαντικότερες κατηγορίες των χρηματοοικονομικών παραγώγων είναι τα δικαιώματα προαίρεσης, συμφωνίες αγοραπωλησίας μεταξύ δύο μερών, όπου το ένα μέρος, ο αγοραστής, έχει το δικαίωμα και όχι την υποχρέωση να αγοράσει ή να πωλήσει ένα περιουσιακό στοιχείο σε προκαθορισμένη τιμή και ημερομηνία, έναντι καταβολής ενός τιμήματος στον πωλητή.

Ο σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η παρουσίαση μεθόδων αποτίμησης του παραπάνω τιμήματος. Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μια εισαγωγή στα χρηματοοικονομικά παράγωγα, παρουσιάζοντας τα διάφορα είδη αυτών, τη χρήση τους, καθώς και τις αγορές στις οποίες αυτά διαπραγματεύονται. Στο δεύτερο κεφάλαιο αναλύονται τα δικαιώματα προαίρεσης, οι δύο βασικές κατηγορίες τους, ενώ δίνεται έμφαση στις οριακές τιμές που δύναται να έχουν.

Στο τρίτο κεφάλαιο ακολουθεί το διωνυμικό μοντέλο, μια μέθοδος αποτίμησης των δικαιωμάτων προαίρεσης, η οποία παρουσιάζει τα διαφορετικά πιθανά μονοπάτια που μπορεί να ακολουθήσει η τιμή μιας μετοχής κατά τη διάρκεια ζωής ενός δικαιώματος προαίρεσης, ώστε να υπολογιστεί η αξία του δικαιώματος προαίρεσης.

Στο τέταρτο κεφάλαιο γίνεται αναφορά στις στοχαστικές διαδικασίες, μέσω των οποίων γίνεται κατανοητή η κίνηση των τιμών των μετοχών, ενώ στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζεται το μοντέλο των Black, Scholes και Merton για την αποτίμηση Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς.

Εν κατακλείδι παρουσιάζονται τα greek letters, μεταβλητές μέσω των οποίων μετράται η ευαισθησία της τιμής ενός δικαιώματος προαίρεσης απέναντι σε διάφορους παράγοντες που την επηρεάζουν. Τέλος στο έβδομο κεφάλαιο παρατίθενται οι στρατηγικές τοποθέτησης που μπορεί να λάβει ένας επενδυτής σε περισσότερα από ένα δικαιώματα προαίρεσης.

ΚΕΦΆΛΑΙΟ 1: Εισαγωγή στα Χρηματοοικονομικά Παράγωγα

1.1. Η έννοια του παραγώγου

Η ανάπτυξη στις αγορές χρηματοοικονομικών παραγώγων τις τελευταίες δεκαετίες είναι ραγδαία (Hunt, Kennedy, 2004). Από το 1973, όταν οι Black, Scholes και Merton ανέπτυξαν μια μέθοδο για τον υπολογισμό της τιμής των Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης με υποκείμενο τίτλο μία μετοχή, μέχρι σήμερα η συνολική αξία των συμβολαίων χρηματοοικονομικών παραγώγων έχει ξεπεράσει αρκετά τρισεκατομμύρια δολάρια. Αυτή η ραγδαία ανάπτυξη οφείλεται κυρίως σε δύο παράγοντες. Ο πρώτος παράγοντας είναι η φυσική ανάγκη που προκύπτει από όλα τα προϊόντα και είναι η προστασία από τις μεταβολές των τιμών τους. Οποιοσδήποτε οργανισμός ή επιχειρηματίας με πολλά περιουσιακά στοιχεία είναι εκτεθειμένος σε αλλαγές στην παγκόσμια αγορά, παραγωγοί είναι ευάλωτοι σε μεταβολές των τιμών των εμπορευμάτων, πολυεθνικές εταιρείες επηρεάζονται από αλλαγές στα επιτόκια συναλλαγών και συνταξιοδοτικά ταμεία είναι εκτεθειμένα στα χαμηλά επιτόκια και στον πληθωρισμό. Τα χρηματοοικονομικά παράγωγα είναι προϊόντα που επιτρέπουν στις παραπάνω οντότητες να μειώσουν την έκθεσή τους στις αλλαγές της αγοράς, τις οποίες δεν είναι δυνατό να ελέγξουν. Ο δεύτερος παράγοντας είναι η ταυτόχρονη ανάπτυξη χρηματοοικονομικών μαθηματικών από τις τράπεζες, προκειμένου να είναι σε θέση να τιμολογούν τα προϊόντα που ζητούνται από τους πελάτες τους και να αντισταθμίζουν τον κίνδυνο που προκύπτει από αυτά.

Τα χρηματοοικονομικά παράγωγα είναι χρηματοοικονομικά εργαλεία, των οποίων η αξία ή η τιμή πηγάζει από τις τιμές άλλων χρηματοοικονομικών εργαλείων ή περιουσιακών στοιχείων (Gupta, 2017). Το περιουσιακό στοιχείο μπορεί να είναι ένα μερίδιο μιας μετοχής, μια μετοχή, ένα ομόλογο, ένα έντοκο γραμμάτιο, μια συναλλαγματική ισοτιμία, ένα εμπόρευμα ή ακόμα και κάποιο άλλο χρηματοοικονομικό παράγωγο. Για παράδειγμα, ένα δικαίωμα προαίρεσης σε μία μετοχή εξαρτάται από την τιμής της μετοχής στην οποία είναι γραμμένη το δικαίωμα ή η αξία ενός εντόκου γραμματίου σε ένα συμβόλαιο μελλοντικής εκπλήρωσης θα εξαρτάται από την αξία του εντόκου γραμματίου. Με άλλα λόγια, η τιμή ενός παραγώγου είναι συνδεδεμένη ή επηρεάζεται από την τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου από το οποίο σχηματίζεται. Για το λόγο αυτό, οι συναλλαγές παραγώγων στις αγορές αποσκοπούν στην ελαχιστοποίηση του κινδύνου που προκύπτει από τις αλλαγές των τιμών των περιουσιακών στοιχείων. Τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης αποτελούν την πιο σημαντική μορφή των παραγώγων και υπάρχουν πολύ πριν δημιουργηθεί ο όρος «παράγωγα». Στις αρχές της δεκαετίας του 1980 τα χρηματοοικονομικά παράγωγα ήταν γνωστά και ως στοιχεία εκτός ισολογισμού, καθώς περιουσιακά στοιχεία που γράφονταν σε ένα συμβόλαιο δεν υπολογίζονταν στον ισολογισμό. Υπάρχει μεγάλη ποικιλία χρηματοοικονομικών παραγώγων που συναλλάσσονται στις αγορές ανά τον κόσμο, όπως τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης, τα προθεσμιακά συμβόλαια, τα δικαιώματα προαίρεσης, οι ανταλλαγές συμφωνιών κ.ά.. Τα παράγωγα ορίζονται ως μελλοντικά συμβόλαια μεταξύ δύο μερών και των οποίων η αξία εξαρτάται από την τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου, το οποίο μπορεί να είναι εμπόρευμα, χρηματοοικονομικός τίτλος ή άυλο περιουσιακό στοιχείο, όπως ο καιρός, χρηματιστηριακοί δείκτες κ.ά.. Τα βασικά χαρακτηριστικά των παραγώγων είναι τα εξής (Gupta, 2017):

1. Ένα παράγωγο σχετίζεται με το μελλοντικό συμβόλαιο μεταξύ δύο μερών, δηλαδή είναι μια μελλοντική δέσμευση και για τους δύο συμβαλλόμενους. Το χρονικό διάστημα μέχρι την εκπλήρωση του συμβολαίου εξαρτάται από τη φύση του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου, όπως για παράδειγμα η πορεία ενός επιτοκίου σε μικρό ή σε μεγάλο χρονικό διάστημα.
2. Η αξία του παραγώγου εξάγεται από την αξία του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου, το οποίο μπορεί να είναι εμπόρευμα, χρηματοοικονομικός τίτλος, άυλο περιουσιακό στοιχείο κ.ά. Συνεπώς, όταν μεταβάλλεται η αξία του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου, μεταβάλλεται και η αξία του παραγώγου.
3. Οι συμβαλλόμενοι έχουν υποχρέωση απέναντι στο συμβόλαιο που συνάπτουν. Η υποχρέωση αυτή διαφέρει ανάλογο με το είδος του παραγώγου, όπως οι διαφορετικές υποχρεώσεις που έχουν οι συμβαλλόμενοι στα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης, στα δικαιώματα προαίρεσης, στις ανταλλαγές συμφωνιών και στα προθεσμιακά συμβόλαια.
4. Η εκπλήρωση του συμβολαίου επιβλέπεται είτε από τους δύο συμβαλλόμενους, δηλαδή εξωχρηματιστηριακά είτε από την οργανωμένη αγορά των παραγώγων, στην οποία διαπραγματεύονται αυτά, όπως τα χρηματιστήρια Dow Jones, S&P 500, Nikki 225 κ.ά.
5. Τα χρηματοοικονομικά παράγωγα είναι περιουσιακά στοιχεία τα οποία δε λογίζονται στον ισολογισμό ενός οργανισμού ή στη φορολογική δήλωση ενός ατόμου, καθώς η αξία του παραγώγου, η οποία καθορίζεται από την αξία του υποκείμενου

περιουσιακού στοιχείου μπορεί να είναι διαφορετική από την πληρωμή που θα έχουν οι συμβαλλόμενοι από την εκπλήρωση του συμβολαίου.

6. Στις αγοροπωλησίες παραγώγων, η παράδοση του περιουσιακού στοιχείου δεν υπολογίζεται σαν κόστος, αντιθέτως τα κόστη συναλλαγής αντισταθμίζονται λαμβάνοντας μια αντίθετη θέση σε ένα παράγωγο.
7. Τα παράγωγα διαπραγματεύονται κυρίως στη δευτερογενή αγορά.

1.2. Κατηγορίες παραγώγων

Τα παράγωγα μπορούν να ταξινομηθούν ανάλογα με το είδος του περιουσιακού στοιχείου το οποίο υπόκειται σε αυτά (Gupta, 2017). Έτσι υπάρχουν τα παράγωγα εμπορευμάτων, υποκείμενα περιουσιακά στοιχεία των οποίων μπορεί να είναι εμπορεύματα όπως βαμβάκι, ζάχαρη, καλαμπόκι, φυσικό αέριο, μέταλλα κ.ά. ενώ τα χρηματοοικονομικά παράγωγα έχουν ως υποκείμενα περιουσιακά στοιχεία χρηματοοικονομικούς τίτλους, όπως μετοχές, ομόλογα, έντοκα γραμμάτια, συναλλαγματικές ισοτιμίες, χρηματιστηριακούς δείκτες κ.ά.. Τα χρηματοοικονομικά παράγωγα χωρίζονται σε βασικά και σύνθετα, όπου βασικά παράγωγα θεωρούνται τα προθεσμιακά συμβόλαια, τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης και τα δικαιώματα προαίρεσης, ενώ τα σύνθετα είναι οι ανταλλαγές συμφωνιών και άλλα παράγωγα που δημιουργούνται από το συνδυασμό όλων των προηγούμενων.

Μια άλλη κατηγοριοποίηση των χρηματοοικονομικών παραγώγων έχει να κάνει με την αγορά στην οποία διαπραγματεύονται αυτά (Gupta, 2017). Η αγοραπωλησία παραγώγων η οποία εξελίσσεται μεταξύ των δύο συμβαλλόμενων εκτός χρηματιστηρίου καλείται εξωχρηματιστηριακή αγοραπωλησία ή αλλιώς OTC (Over-The-Counter). Τα OTC παράγωγα είναι συμβόλαια προσαρμοσμένα στις απαιτήσεις των συμβαλλόμενων, οι οποίοι είναι συνήθως τράπεζες, χρηματοπιστωτικοί οργανισμοί ή εταιρείες και έχουν έρθει σε επαφή τηλεφωνικά ή με email ή έχουν αναθέσει σε κάποιον τρίτο χρηματοπιστωτικό οργανισμό το ρόλο του μεσάζοντα, έτσι ώστε κανένας από τους δύο συμβαλλόμενους να μην αναλάβει τον κίνδυνο της μη εκπλήρωσης του συμβολαίου από τη μεριά του άλλου (Hull, 2009). Τα παράγωγα συναλλάσσονται και στα Χρηματιστήρια παραγώγων, όπου τα συμβόλαια είναι τυποποιημένα από το εκάστοτε χρηματιστήριο και η εκπλήρωση του συμβολαίου επιβλέπεται από την εταιρεία εκκαθάρισης συναλλαγών, η οποία λειτουργεί ως διαμεσολαβητής των συμβαλλόμενων. Η εταιρεία εκκαθάρισης συναλλαγών επιβάλλει στους συμβαλλόμενους την καταβολή ενός ποσού προκειμένου να διαπιστευτεί η τήρηση του συμβολαίου και από τις δύο μεριές, συνεπώς δεν υπάρχει πιστωτικός κίνδυνος ή κίνδυνος ρευστότητας, σε αντίθεση με τα OTC παράγωγα. Το χρηματιστήριο του Chicago (Chicago Board of Trade) είναι το πρώτο χρηματιστήριο παραγώγων που δημιουργήθηκε το 1848 με σκοπό την τυποποίηση των συμβολαίων πάνω σε εμπορεύματα που συναλλάσσονταν εκείνη την εποχή, με αποτέλεσμα τη δημιουργία αυτών που ονομάζουμε σήμερα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης.

1.2.1. Προθεσμιακά Συμβόλαια

Ένα προθεσμιακό συμβόλαιο είναι μια συμφωνία μεταξύ δύο μερών που τους υποχρεώνει να συναλλαχθούν στο μέλλον (Gottesman, 2016). Τα σημαντικότερα χαρακτηριστικά των προθεσμιακών συμβολαίων είναι τα παρακάτω:

1. Ένα από τα δύο συμβαλλόμενα μέρη αναφέρεται ως «θέση αγοράς» (long position), ενώ το άλλο ως «θέση πώλησης» (short position).
2. Ο κάτοχος της θέσης αγοράς είναι υποχρεωμένος να αγοράσει ένα περιουσιακό στοιχείο από τον κάτοχο της θέσης πώλησης σε μια μελλοντική χρονική στιγμή. Ο κάτοχος της θέσης πώλησης υποχρεούται να πωλήσει το περιουσιακό στοιχείο αυτό στον κάτοχο της θέσης αγοράς.
3. Το περιουσιακό στοιχείο αναφέρεται ως «υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο» (underlying asset) και μπορεί να είναι οποιοδήποτε περιουσιακό στοιχείο, όπως μετοχές, ομόλογα, συναλλάγματα και εμπορεύματα.
4. Η μελλοντική χρονική στιγμή κατά την οποία θα εκπληρωθεί η συμφωνία αναφέρεται ως «ημερομηνία λήξης» (expiration date). Παραδείγματος χάριν, ένα προθεσμιακό συμβόλαιο μπορεί να έχει ημερομηνία λήξης τρεις μήνες ύστερα από την εκκίνησή του.
5. Η τιμή στην οποία αγοράζεται το υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο καλείται «προθεσμιακή τιμή» του συμβολαίου (forward price). Η προθεσμιακή τιμή καθορίζεται κατά τη σύναψη της συμφωνίας, παρόλο που η συναλλαγή πρόκειται να εκπληρωθεί σε μελλοντική χρονική στιγμή.
6. Όλες οι λεπτομέρειες αναφέρονται κατά τη σύναψη της συμφωνίας σχετικά με:
    - τα συμβαλλόμενα μέρη
    - το υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο
    - την προθεσμιακή τιμή του συμβολαίου
    - την ημερομηνία λήξης του συμβολαίου

Όπως αναφέρθηκε, το προθεσμιακό συμβόλαιο αποτελεί υποχρέωση των συμβαλλόμενων μερών, συνεπώς η μη εκπλήρωση του συμβολαίου από οποιοδήποτε μέρος δίνει το δικαίωμα στο άλλο μέρος να κινηθεί νομικά, προκειμένου να τηρηθεί η συμφωνία που έχει συναφθεί μεταξύ τους (Pirie, 2017).

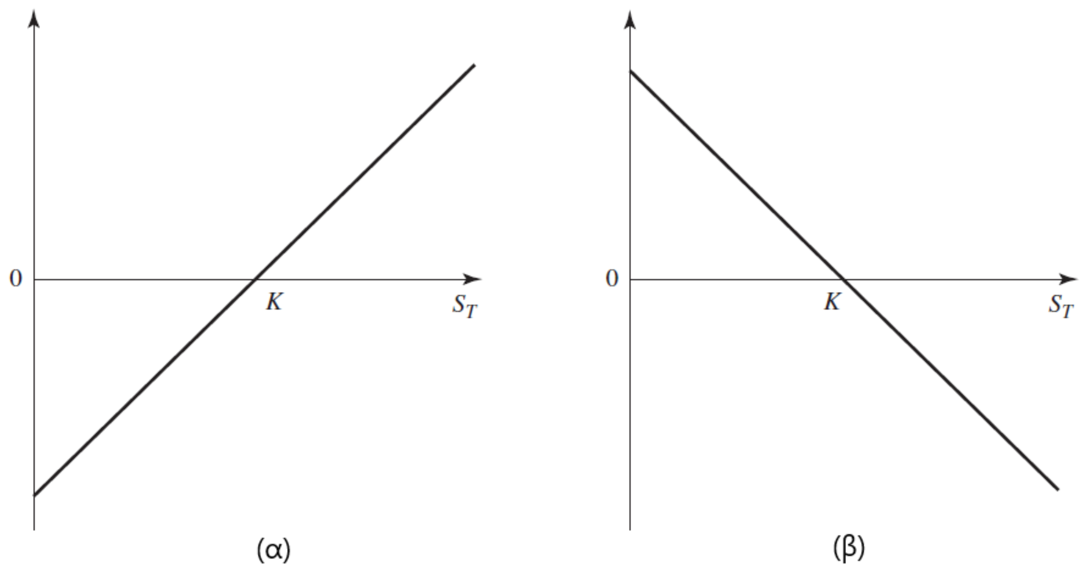
Η πληρωμή από μια θέση αγοράς σε ένα προθεσμιακό συμβόλαιο μιας μονάδας ενός περιουσιακού στοιχείου δίνεται από τη σχέση

$$S_T - K$$

όπου K η τιμή παράδοσης και S_T η προθεσμιακή τιμή του συμβολαίου κατά την ημερομηνία λήξης του, καθώς ο κάτοχος της θέσης αγοράς υποχρεούται να αγοράσει ένα περιουσιακό στοιχείο σε τιμή K, ενώ αξίζει S_T (Hull, 2009). Ομοίως, η πληρωμή από μια θέση πώλησης σε ένα προθεσμιακό συμβόλαιο μιας μονάδα ενός περιουσιακού στοιχείου δίνεται από τη σχέση

$$K - S_T$$

Οι πληρωμές αυτές μπορεί να είναι θετικές ή αρνητικές και καθώς τα συμβαλλόμενα μέρη δεν υποχρεούνται να πληρώσουν κάποιο ποσό για την είσοδό τους σε ένα προθεσμιακό συμβόλαιο, η πληρωμή τους είναι το συνολικό κέρδος ή η ζημία από το συμβόλαιο. Στο γράφημα 1 παρουσιάζονται οι πληρωμές από τις θέσεις αγοράς και πώλησης σε ένα προθεσμιακό συμβόλαιο.



Πηγή: Hull (2009)

Γράφημα 1. Πληρωμές από προθεσμιακά συμβόλαια: (α) θέση αγοράς, (β) θέση πώλησης

Τα προθεσμιακά συμβόλαια είναι παράγωγα που διαπραγματεύονται εξωχρηματιστηριακά (OTC) και δεν υπάρχει επίσημο χρηματιστήριο προθεσμιακών συμβολαίων. Παρόλα αυτά υπάρχουν παραλλαγές των προθεσμιακών συμβολαίων που διαπραγματεύονται σε οργανωμένα χρηματιστήρια, όπως τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης (Pirie, 2017).

1.2.2. Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης

Όπως και τα προθεσμιακά συμβόλαια, τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης είναι μια συμφωνία μεταξύ δύο μερών να αγοράσουν ή να πωλήσουν ένα περιουσιακό στοιχείο σε μια προκαθορισμένη μελλοντική χρονική στιγμή και σε προκαθορισμένη τιμή (Marroni, Perdomo, 2014). Η διαφορά των δύο είναι ότι, τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης διαπραγματεύονται κυρίως στο χρηματιστήριο, συνεπώς το συμβόλαιο έχει συγκεκριμένα χαρακτηριστικά τα οποία έχουν οριστεί από το εκάστοτε χρηματιστήριο και αφορούν το υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο του συμβολαίου, την ποσότητα και την ποιότητά του, την τοποθεσία και την ημερομηνία κατά την οποία θα γίνει η παράδοση του περιουσιακού στοιχείου. Καθώς τα συμβαλλόμενα μέρη δε γνωρίζονται υποχρεωτικά, το χρηματιστήριο παρέχει ένα μηχανισμό με τον οποίο εγγυάται και στα δύο μέρη την εκπλήρωση του συμβολαίου, ο οποίος αναφέρεται ως Εταιρεία Εκκαθάρισης Συναλλαγών (Exchange Clearinghouse). Το εκάστοτε χρηματιστήριο επιβάλει μέσω της εταιρείας εκκαθάρισης συναλλαγών στα συμβαλλόμενα μέρη τη δημιουργία ενός λογαριασμού περιθωρίου ασφάλισης (margin account) και την κατάθεση σε αυτόν ενός ποσού, ως εγγύηση στην περίπτωση που ένα εκ των δύο συμβαλλόμενων μερών αποχωρήσει από τη συμφωνία, κατά την εκκίνηση του συμβολαίου, το οποίο αναφέρεται ως αρχικό περιθώριο (initial margin) και εξαρτάται από το εκάστοτε χρηματιστήριο (Hull, 2009). Ο λογαριασμός περιθωρίου ενημερώνεται καθημερινά ώστε να αντικατοπτρίζει το κέρδος ή τη ζημία του επενδυτή και η διαδικασία αυτή αναφέρεται ως mark-to-market. Προκειμένου να υπάρχει πάντοτε το απαιτούμενο ποσό υπάρχει ένα επίπεδο στο οποίο όταν φτάσει το ύψος του λογαριασμού περιθωρίου, ο επενδυτής καλείται να το συμπληρώσει ως το αρχικό περιθώριο. Το επίπεδο αυτό καλείται περιθώριο συντήρησης (margin maintenance). Όταν ο λογαριασμός περιθωρίου φτάσει στο περιθώριο συντήρησης, τότε το χρηματιστήριο ζητά από τον επενδυτή να προσθέσει ποσό έως το ύψος του αρχικού περιθωρίου. Η ειδοποίηση αυτή λέγεται margin call (κλήση περιθωρίου) και το επιπλέον ποσό λέγεται περιθώριο διακύμανσης (variation margin). Αν ο επενδυτής δεν καταθέσει το περιθώριο διακύμανσης στο λογαριασμό περιθωρίου, η εταιρεία εκκαθάρισης συναλλαγών του χρηματιστηρίου κλείνει τη θέση του.

Ας υποθέσουμε ένα προθεσμιακό συμβόλαιο με υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο το πετρέλαιο, με το μέγεθος του συμβολαίου να είναι 1,000 βαρέλια πετρελαίου (Cuthbertson et al., 2020). Αν οι προθεσμιακές τιμές του πετρελαίου είναι $F_0 = 98€$ (ανά βαρέλι), τότε η αξία ενός προθεσμιακού συμβολαίου είναι 98,000€. Υποθέτουμε ότι το αρχικό περιθώριο είναι 2,000€ ανά συμβόλαιο και το περιθώριο συντήρησης έχει ύψος 1,500€ ανά συμβόλαιο. Υποθέτουμε επίσης ότι η κα Γεωργίου στις 12 μμ της 5ης Ιουνίου αγοράζει δύο προθεσμιακά συμβόλαια με υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο το πετρέλαιο, με προθεσμιακή τιμή $F_0 = 98€$ και τέσσερις ημέρες αργότερα, στις 9 Ιουνίου και ώρα 1 πμ κλείνει το συμβόλαιο, πουλώντας τα δύο προθεσμιακά συμβόλαια στην τιμή $F_3 = 98.3€$. Η κα Γεωργίου με αυτόν τον τρόπο εισέπραξε κέρδος της τάξης των 600€ $(= 2 \times 0.3€ \times 1{,}000$ βαρέλια$)$. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της χρήσης του λογαριασμού περιθωρίου για τον υπολογισμό του κέρδους που εισέπραξε η κα Γεωργίου.

Πίνακας 1: Λογαριασμός Περιθωρίου

Ημερομηνία/ Ώρα	Προθεσμιακή τιμή (αξία) ανά συμβόλαιο	Κέρδος/Ζημία ανά συμβόλαιο	Ημερήσιο κέρδος και ζημία (δύο συμβόλαια)	Υπόλοιπο στο λογαριασμό περιθωρίου	Κλήση περιθω-ρίου
5/6, 2:10 πμ	98.0 (98,000€)			4,000€	
5/6, κλείσιμο	97.9 (97,900€)	(100€)	(200€)	3,800€	
6/6, κλείσιμο	97.4 (97,400€)	(500€)	(1,000€)	2,800€	1,200€
7/6, κλείσιμο	97.8 (97,800€)	400€	800€	4,800€	
8/6, 1:00 πμ	98.3 (98,300€)	500€	1,000€	5,800€	

Σημείωση: Το αρχικό περιθώριο είναι 2,000€ ανά συμβόλαιο και το περιθώριο συντήρησης είναι 1,500€ ανά συμβόλαιο. Η πρώτη και η τελευταία προθεσμιακές τιμές είναι τιμές διαπραγμάτευσης, ενώ οι υπόλοιπες είναι τιμές διαπραγμάτευσης κατά το κλείσιμο των συναλλαγών.

Πηγή: Cuthbertson et al. (2020)

Καθώς η κα Γεωργίου αγοράζει ένα προθεσμιακό συμβόλαιο τιμής 98€, η αρχική αξία της θέσης της είναι 98,000€. Εάν αυτή αγοράσει δύο προθεσμιακά συμβόλαια, το αρχικό περιθώριο είναι $4{,}000€ \; (= 2 \times 2{,}000€)$. Ας υποθέσουμε ότι στο κλείσιμο των συναλλαγών της 1ης ημέρας, δηλαδή στις 5 Ιουνίου, η τιμή του προθεσμιακού συμβολαίου πέφτει από $F_0 = 98€$ σε $F_1 = 97.9€$. Η θέση αγοράς έχει ζημία ίση με 100€ ανά συμβόλαιο, καθώς στο τέλος αυτής της ημέρας μπορεί να πουλήσει κάθε ένα από τα προθεσμιακά συμβόλαια προς 97,900€. Η ζημία στα δύο συμβόλαια είναι 200€ και το υπόλοιπο στο λογαριασμό περιθωρίου της κας Γεωργίου μειώνεται κατά 200€, δηλαδή είναι πλέον 3,800€.

Στο τέλος της $2^{ης}$ ημέρας, 6 Ιουνίου, η τιμή του συμβολαίου έχει πέσει σε 97.4€ και η ζημία από τα δύο συμβόλαια είναι 1,000€, με το ποσό στο λογαριασμό περιθωρίου να είναι 2,800€, ποσό το οποίο είναι μικρότερο από το περιθώριο συντήρησης των 3,000€. Καθώς στο λογαριασμό περιθωρίου πρέπει να υπάρχουν 4,000€ στο τέλος της επόμενης ημέρας, ποσό ίσο με το αρχικό περιθώριο, πρέπει να πιστωθούν στο λογαριασμό 1,200€. Στο τέλος της $7^{ης}$ Ιουνίου η προθεσμιακή τιμή είναι 97.8€, μια αύξηση 0.4 που ισοδυναμεί με αύξηση του υπολοίπου στο λογαριασμό περιθωρίου κατά 800€, οπότε και γίνεται 4,800€.

Στη 1 πμ της $8^{ης}$ Ιουνίου, τα προθεσμιακά συμβόλαια πωλούνται προς 98.3€ το καθένα και ο λογαριασμός περιθωρίου της η κας Γεωργίου πιστώνεται με 1,000€, με αποτέλεσμα το υπόλοιπο του λογαριασμού να είναι 5,800€, ποσό το οποίο καταβάλλεται στην κα Γεωργίου από την εταιρεία εκκαθάρισης συναλλαγών. Καθώς η κα Γεωργίου είχε καταβάλει 5,200€ ($=$ $4{,}000$€ αρχικό περιθώριο $+$ $1{,}200$€ περιθώριο διακύμανσης), το κέρδος της είναι 600€.

1.2.3. Δικαιώματα Προαίρεσης

Το δικαίωμα προαίρεσης είναι ένα παράγωγο συμβόλαιο στο οποίο το ένα από τα δύο συμβαλλόμενα μέρη, ο αγοραστής, πληρώνει ένα χρηματικό ποσό στο άλλο μέρος, τον πωλητή και απολαμβάνει το δικαίωμα να αγοράσει ή να πωλήσει ένα υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο σε προκαθορισμένη τιμή είτε σε προκαθορισμένη ημερομηνία λήξης είτε σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή προγενέστερη της ημερομηνίας λήξης (Pirie, 2017). Τα δικαιώματα προαίρεσης διαπραγματεύονται εκτός χρηματιστηρίου (Over-The-Counter), όπου προσαρμόζονται στις ανάγκες των συμβαλλόμενων μερών, είναι όμως υποκείμενα στην αθέτησή τους, αλλά και σε επίσημες αγορές παραγώγων, σε χρηματιστήρια, όπου τα συμβαλλόμενα μέρη προστατεύονται από την αθέτηση του συμβολαίου από την εταιρεία εκκαθάρισης συναλλαγών του εκάστοτε χρηματιστηρίου. Το δικαίωμα αγοράς (call option) είναι ένα είδος δικαιώματος προαίρεσης όπου δίνει το δικαίωμα στον κάτοχο του συμβολαίου να αγοράσει το υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο, ενώ το δικαίωμα πώλησης (put option) δίνει το δικαίωμα στον κάτοχο να πωλήσει το υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο. Ένα δικαίωμα προαίρεσης χαρακτηρίζεται Ευρωπαϊκού τύπου εάν εξασκείται μόνο στην ημερομηνία λήξης του, ενώ αν αυτό δύναται να εξασκηθεί στην ημερομηνία λήξης του ή σε ημερομηνία προγενέστερη αυτής χαρακτηρίζεται ως Αμερικανικού τύπου. Τα δικαιώματα προαίρεσης μπορούν να εξασκηθούν με φυσική παράδοση του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου ή με διακανονισμό τοις μετρητοίς, με το χρηματικό ποσό να είναι ισοδύναμο της αξίας του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου. Η προκαθορισμένη τιμή στην οποία το υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο δύναται να αγοραστεί ονομάζεται τιμή εξάσκησης (strike price). Η τιμή εξάσκησης είναι ανάλογη της μελλοντικής τιμής του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου, καθώς αντιπροσωπεύει την τιμή στην οποία θα αγοραστεί ή πωληθεί αυτό στην περίπτωση που εξασκηθεί το δικαίωμα προαίρεσης. Η μελλοντική τιμή καθορίζεται κατά την αποτίμηση του συμβολαίου, ώστε η αξία του συμβολαίου κατά την έναρξή του να είναι μηδενική, ενώ η τιμή εξάσκησης καθορίζεται από τα συμβαλλόμενα μέρη. Ο αγοραστής πληρώνει στον πωλητή του συμβολαίου ένα χρηματικό ποσό, το οποίο καλείται ασφάλιστρο του δικαιώματος προαίρεσης (option premium) και αντιπροσωπεύει τη δίκαιη τιμή του, ενώ ισοδυναμεί με την παρούσα αξία της χρηματοροής που θα εισπράξει ο αγοραστής κατά τη διάρκεια ζωής του δικαιώματος προαίρεσης. Καθώς ο αγοραστής του δικαιώματος δεν υποχρεούται να εξασκήσει το δικαίωμα, δεν έχει υποχρέωση απέναντι στον πωλητή του δικαιώματος, πέραν της πίστωσης του ασφαλίστρου (premium). Συνεπώς, αθέτηση του συμβολαίου δύναται να υπάρξει μόνο από τη μεριά του πωλητή, στην περίπτωση που ο αγοραστής εξασκήσει το δικαίωμα και ο πωλητής δεν εκπληρώσει τη συμφωνία του συμβολαίου.

1.2.4. Swaps

Η ανταλλαγή συμφωνίας (swap) είναι μια συμφωνία μεταξύ δύο ή περισσότερων μερών για την ανταλλαγή χρηματικών ροών για ένα μελλοντικό χρονικό διάστημα (Kolb, Overdahl, 2003). Υπάρχουν πέντε βασικές κατηγορίες ανταλλαγής συμφωνιών, οι ανταλλαγές επιτοκίων, οι ανταλλαγές νομισμάτων, οι ανταλλαγές εμπορευμάτων, οι ανταλλαγές μετοχικού κεφαλαίου και οι ανταλλαγές πιστωτικού κινδύνου. Οι ανταλλαγές συμφωνιών κατηγοριοποιούνται επίσης ως “plain vanilla”, όπου πρόκειται για ανταλλαγή επιτοκίων όπου ανταλλάσσονται σταθερά και κυμαινόμενα επιτόκια και “flavored”, όπου οι όροι της συμφωνίας προσαρμόζονται στις ανάγκες των επιμέρους μερών. Οι ανταλλαγές συμφωνιών διαπραγματεύονται εκτός χρηματιστηρίου (Over-The-Counter) και για το λόγο αυτό χρηματοπιστωτικά ιδρύματα λειτουργούν ως διαπραγματευτές, κερδίζοντας ένα ποσό αναλόγως τη συμφωνία ανάμεσα στους συμβαλλόμενους, ποσό που χρησιμοποιείται ως αντιστάθμιση του κινδύνου στην περίπτωση αθέτησης της συμφωνίας από οποιοδήποτε συμβαλλόμενο.

1.3. Αγορές παραγώγων

1.3.1. Ιστορία των αγορών παραγώγων

Έχει αποδειχτεί ότι οι αγορές συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης δημιουργήθηκαν χάριν της ανάπτυξης των αγορών προθεσμιακών συμβολαίων (Gupta, 2007). Αγορές προθεσμιακών συμβολαίων με υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο το ρύζι ξεκίνησαν στην Ιαπωνία τον 17ο αιώνα, ενώ τα επόμενα χρόνια η τυποποίηση αυτών των συμβολαίων λόγω της ραγδαίας ανάπτυξής τους οδήγησε στη δημιουργία της πρώτης αγοράς συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης, καθώς πλέον τα συμβόλαια αυτά διαπραγματεύονταν σε οργανωμένη αγορά, το χρηματιστήριο. Το 1898 οι έμποροι βουτύρου και αυγών της αγοράς του Σικάγο συνεργάστηκαν με αποτέλεσμα την ίδρυση του Chicago Mercantile Exchange για αγοραπωλησίες συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης (Algieri, 2018). Το χρηματιστήριο παρείχε αγορά συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης διαφόρων εμπορευμάτων όπως χοιρινό, ζωντανά βοοειδή, ζωντανοί χοίροι και μοσχάρια (Gupta, 2007). Ένας τομέας του Chicago Mercantile Exchange που το 1972 δημιουργήθηκε ήταν το International Monetary Market και αφορούσε τις αγοραπωλησίες συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης σε συναλλαγματικές ισοτιμίες. Τη δεκαετία του 1980 αναπτύχθηκαν αγορές δικαιωμάτων προαίρεσης με υποκείμενα περιουσιακά στοιχεία συναλλαγματικές ισοτιμίες, δείκτες μετοχών και δικαιώματα προαίρεσης σε συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης. Ο κύριος λόγος για τον οποίο διαπραγματεύονταν προθεσμιακά συμβόλαια ήταν για την κάλυψη του κινδύνου που επέφερε η τιμή ενός υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου. Τα παλαιότερα χρόνια, η μεταφορά εμπορευμάτων από μια αγορά σε μία άλλη μπορούσε να διαρκέσει αρκετούς μήνες, όπως η μεταφορά σιτηρών από την Αγγλία στην Αμερική το 1800. Μερικές φορές, κατά τη διάρκεια αυτής της μεταφοράς, οι τιμές των εμπορευμάτων μπορεί να έπεφταν πριν την παράδοσή τους, εξαιτίας ίσως κάποιων ατυχών γεγονότων, με αποτέλεσμα οι παραγωγοί να πρέπει να πουλήσουν τα αγαθά τους στη νέα αυτή τιμή. Για το λόγο αυτό οι παραγωγοί αναζήτησαν τρόπους ώστε να προστατευθούν από αυτή την πτώση των τιμών, πωλώντας τα προϊόντα τους σε προκαθορισμένη τιμή. Από την άλλη, κερδοσκοπικές εταιρείες ακολουθούσαν την ίδια στρατηγική προκειμένου να προλάβουν οποιαδήποτε άνοδο τιμών, με αποτέλεσμα τη δημιουργία προθεσμιακών συμβολαίων σε εμπορεύματα. Αργότερα, όταν οι συμφωνίες αυτές άρχισαν να μεταβιβάζονται καθώς δεν απαιτείτο η παράδοση των εμπορευμάτων, οι συμμετέχοντες στην αγορά κατάλαβαν ότι η μεταβίβαση αυτών των συμβολαίων θα ήταν πιο εύκολη αν αυτά ήταν τυποποιημένα ως προς την ποσότητα, την ποιότητα και μέρος παράδοσης των εμπορευμάτων. Έτσι το 19^{o} αιώνα οι αγοραπωλησίες αυτών των συμβολαίων εδραιώθηκαν στο Σικάγο, που ήταν η κεντρική αγορά σιτηρών της Αμερικής, με αποτέλεσμα την εμφάνιση των συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης και την ίδρυση του Chicago Board of Trade (CBOT) το 1848, που σήμερα είναι η μεγαλύτερη αγορά συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης του κόσμου. Το 1865 το CBOT έθεσε τους γενικούς κανόνες αγοραπωλησιών συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης, οι οποίοι σήμερα ακολουθούνται από τις περισσότερες αγορές. Το 1874 ιδρύθηκε το Chicago Produce Exchange και παρείχε την αγορά βουτύρου, αυγών και άλλων αγροτικών προϊόντων. Το 1877 ιδρύθηκε το London Metal Exchange και σήμερα αποτελεί τη μεγαλύτερη αγορά αγοραπωλησίας μετάλλου. Το 1989 οι έμποροι αυγών και βουτύρου αποχώρησαν από το Chicago Produce Exchange για να δημιουργήσουν το Chicago Butter and Egg Board, το οποίο το 1919 μετονομάστηκε σε Chicago Mercantile Exchange (CME) και αναδιοργανώθηκε για την αγοραπωλησία συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης. Από τότε πολλά άλλα χρηματιστήρια δημιουργήθηκαν ανά τον κόσμο που πραγματεύονται την αγοραπωλησία συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης. Παρόλο που τα χρηματοοικονομικά παράγωγα όπως είδαμε χρησιμοποιούνταν για πολλά χρόνια, η χρήση τους στη χρηματοοικονομικές αγορές έγινε ακόμα μεγαλύτερη τη δεκαετία του 1970. Ο κύριος λόγος για την ανάπτυξη αυτή ήταν η αποτυχία του συστήματος Bretton Woods και η κατάρρευση του καθεστώτος των σταθερών συναλλαγματικών ισοτιμιών. Ως αποτέλεσμα, ένα νέο καθεστώς, το καθεστώς των κυμαινόμενων επιτοκίων βασιζόμενων στις δυνάμεις της αγοράς δημιουργήθηκε. Εξαιτίας όμως των πιέσεων της αγοράς και της ζήτησης διαφόρων συναλλαγμάτων, τα κυμαινόμενα αυτά επιτόκια άλλαζαν συνεχώς με αποτέλεσμα οι επιχειρήσεις να βρεθούν απέναντι σε ένα νέο κίνδυνο, τον συναλλαγματικό κίνδυνο, ωθώντας αυτές στη χρήση των χρηματοοικονομικών παραγώγων για την αντιμετώπιση αυτού. Άλλος ένας σημαντικός λόγος για την αστάθεια των αγορών ήταν η συνεχής μεταβολή των βραχυπρόθεσμων επιτοκίων. Η μεταβολή αυτή οφειλόταν στο ότι οι περισσότερες κυβερνήσεις εκείνης της εποχής προσπαθούσαν να αντιμετωπίσουν τις μεταβολές στις συναλλαγματικές ισοτιμίες μέσω των βραχυπρόθεσμων επιτοκίων, ελέγχοντας την προσφορά χρήματος. Επιπρόσθετα, η μεγάλη μεταβολή των βραχυπρόθεσμων επιτοκίων επηρέασε αντίστροφα την πορεία των μακροπρόθεσμων επιτοκίων, με αποτέλεσμα την αστάθεια των τιμών των ομολόγων και την εμφάνιση ενός νέου κινδύνου για τους εκδότες και επενδυτές ομολόγων, αποκαλούμενο ως κίνδυνο των επιτοκίων. Η συνεχής μεταβολή των επιτοκίων δε δημιούργησε αστάθεια μόνο στις τιμές των ομολόγων, αλλά και σε άλλα μακροπρόθεσμα επενδυτικά αγαθά, όπως στις μετοχές και στα μερίδια των εταιρειών. Η τιμή των μεριδίων υπολογίζεται βάσει της παρούσας αξίας των μελλοντικών μερισμάτων, προεξοφλημένη με το κατάλληλο επιτόκιο, το οποίο εξαρτάται από τα μακροπρόθεσμα επιτόκια της αγοράς. Συνεπώς η αυξημένη αστάθεια των μακροπρόθεσμων επιτοκίων οδηγεί σε μεγάλες μεταβολές στις τιμές των μεριδίων στις αγορές μετοχών. Συμπερασματικά, τη δεκαετία του 1970 οι χρηματοοικονομικές αγορές χαρακτηρίζονταν από μεγάλη αστάθεια, η οποία οδήγησε στη δημιουργία και ανάπτυξη χρηματοοικονομικών παραγώγων για την αντιμετώπιση των κινδύνων που αναφέρθηκαν παραπάνω, αλλά και για την εκμετάλλευση αυτής της αστάθειας. Έτσι το 1972, από το Chicago Mercantile Exchange, δημιουργήθηκε το πρώτο χρηματιστήριο συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης, το International Monetary Market και αργότερα το 1982 το London International Financial Futures Exchange.

1.3.2. Χρήση των παραγώγων

Οι υπηρεσίες που παρέχουν τα παράγωγα είναι οι εξής (Gupta, 2007):

1. Μία από τις πιο σημαντικές υπηρεσίες που παρέχονται από τα παράγωγα είναι η αποτελεσματική διαχείριση και ο έλεγχος διαφόρων ειδών κινδύνων αντισταθμίζοντας τον κίνδυνο (hedging), εξισορροπώντας τον κίνδυνο με κερδοσκοπία (arbitrage) κ.ά. Τα παράγωγα επιτρέπουν στον κάτοχό τους να διαχειριστεί αποτελεσματικά τα χαρακτηριστικά του χαρτοφυλακίου του τα οποία μπορεί να οδηγήσουν σε κάποιο είδος κινδύνου.
2. Τα παράγωγα λειτουργούν ως βαρόμετρα για τις μελλοντικές τάσεις των τιμών, οδηγώντας στην ανακάλυψη νέων τιμών στις αγορές μετρητοίς αλλά και στις αγορές παραγώγων. Επίσης βοηθούν στη διάδοση διαφόρων πληροφοριών στην κοινωνία, σχετικά με τις συναλλαγές στις αγορές παραγώγων, το οποίο οδηγεί στην επιλογή καταλληλότερων ή ισορροπημένων τιμών στις αγορές.
3. Στις αγοραπωλησίες παραγώγων δεν απαιτείται η άμεση καταβολή ολόκληρου του ποσού της συναλλαγής, καθώς τα περισσότερα παράγωγα λειτουργούν με λογαριασμούς περιθωρίων και για το λόγο αυτό πολλοί συμμετέχοντες στις αγορές εξασκούν εξισορροπητική κερδοσκοπία. Συνεπώς οι αγοραπωλησίες παραγώγων ενισχύουν τη ρευστότητα και μειώνουν τα κόστη συναλλαγής περιουσιακών στοιχείων στις αγορές.

4. Τα παράγωγα βοηθούν τους επενδυτές, τους συναλλασσόμενους στις αγορές και τους μάνατζερ μεγάλων χρηματοοικονομικών οργανισμών να αναπτύσσουν στρατηγικές, τέτοιες ώστε να κατανέμουν σωστά τους πόρους τους, να αυξάνουν τα κέρδη τους από επενδύσεις και να πετυχαίνουν επενδυτικούς στόχους.
5. Έχει παρατηρηθεί από τις αγοραπωλησίες παραγώγων στις αγορές ότι τα παράγωγα εξομαλύνουν τις συνεχείς αλλαγές των τιμών και βοηθούν στον περιορισμό των πλεονασμάτων και των ελλειμμάτων στις αγορές.
6. Οι αγοραπωλησίες παραγώγων δημιουργούν ανταγωνισμό ανάμεσα στους συμμετέχοντες των αγορών, οδηγώντας τους στο να αναλαμβάνουν διάφορα είδη ρίσκου, αυξάνοντας έτσι τον όγκο συναλλαγών μιας χώρας. Ακόμα, έλκουν νέους επενδυτές, επαγγελματίες και ειδικούς οι οποίοι θα διαδραματίσουν καταλυτικό ρόλο στην περαιτέρω ανάπτυξη των αγορών.
7. Τέλος, έχει παρατηρηθεί ότι οι αγοραπωλησίες παραγώγων οδηγούν στην αποτελεσματικότητα της αγοράς. Η έννοια της αποτελεσματικής αγοράς αναφέρεται σε μια κατάσταση όπου σε μια αγορά όλοι οι συμμετέχοντες είναι ίσοι και η τιμή των αξιογράφων που συναλλάσσονται στην αγορά ενσωματώνει όλη την πληροφορία που είναι διαθέσιμη στους επενδυτές σχετικά με την αξία τους (Eatwell et al., 1989).

Παρά τις σημαντικές υπηρεσίες που όπως είδαμε προσφέρουν τα παράγωγα, πολύ ειδικοί έχουν αμφιβολίες για τη χρήση τους και είναι αρκετά επιφυλακτικοί όσον αφορά τη ραγδαία ανάπτυξή τους. Θεωρούν ότι τα παράγωγα θα προκαλέσουν αποσταθεροποίηση και συνεχείς μεταβολές στις αγορές και ισχυρίζονται ότι αυτά βοηθούν κερδοσκόπους να έχουν μεγάλα κέρδη. Έχει παρατηρηθεί σε όλες τις χρηματοοικονομικές αγορές ανά τον κόσμο ότι ο όγκος συναλλαγών των παραγώγων είναι πολλές φορές μεγαλύτερος από την αξία των υποκείμενων περιουσιακών στοιχείων των συμβολαίων αυτών και μόνο ένα πολύ μικρό ποσοστό των παραγώγων καταλήγει στην παράδοση του περιουσιακού στοιχείου αυτού. Για το λόγο αυτό, η κερδοσκοπία έχει γίνει ο πρωταρχικός λόγος της δημιουργίας και ανάπτυξης των παραγώγων. Αρκετοί οικονομολόγοι πιστεύουν ότι η κερδοσκοπία βοηθάει στην καλύτερη κατανομή των πόρων με την πάροδο του χρόνου, μειώνουν τις συνεχείς αλλαγές στις τιμές, ρυθμίζουν τις δυνάμεις προσφοράς και ζήτησης και συνεπώς οδηγούν σε μια αποτελεσματική αγορά. Στην πραγματικότητα όμως αυτά τα αποτελέσματα δεν είναι ορατά. Κερδοσκοπικές κινήσεις οδηγούν σε αποσταθεροποίηση της αγοράς και σε απότομες αλλαγές στις τιμές.

Οι συμμετέχοντες στις αγορές μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε τρεις κατηγορίες: αυτούς που συμμετέχουν με σκοπό την αντιστάθμιση κινδύνου (hedgers), τους κερδοσκόπους (speculators) και αυτούς που ασκούν εξισορροπητική κερδοσκοπία (arbitrageurs).

1.3.3. Hedgers

Επιτυχημένες εταιρείες εστιάζουν σε οικονομικές δραστηριότητες στις οποίες ανταπεξέρχονται με τον καλύτερο τρόπο. Χρησιμοποιούν την αγορά για να προστατευτούν έναντι αλλαγών των τιμών, των επιτοκίων, των νομισμάτων κ.ά. Η αντιστάθμιση κινδύνου είναι μια στρατηγική με την οποία ο συμμετέχων στις αγορές προσπαθεί να μειώσει την έκθεσή του σε έναν κίνδυνο που ήδη αντιμετωπίζει (Bingham, Kiesel, 2004). Ας υποθέσουμε ότι τον Μάιο μιας συγκεκριμένης χρονιάς, ένας επενδυτής έχει στην κατοχή του 1,000 μετοχές μιας συγκεκριμένης εταιρείας, όταν η τιμή της μετοχής είναι 28€. Ο επενδυτής ανησυχεί για μια πιθανή πτώση της τιμής της μετοχής στους επόμενους δύο μήνες και επιθυμεί να προστατευτεί και για το λόγο αυτό, αγοράζει 10 δικαιώματα πώλησης με υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο τη μετοχή της εταιρείας, με ημερομηνία λήξης τον Ιούλιο και τιμή εξάσκησης 27.50€. Αν η τιμή του δικαιώματος ήταν 1€, τότε κάθε δικαίωμα προαίρεσης θα κόστιζε $1€ \times 100 = 100€$ και το συνολικό κόστος της στρατηγικής αυτής θα ήταν $100€ \times 10 = 1{,}000€$. Με αυτόν τον τρόπο ο επενδυτής έχει το δικαίωμα να πουλήσει 1,000 μετοχές με τιμή 27.50€ ανά μετοχή. Αν η τιμή της μετοχής πέσει κάτω από 27.50€, ο επενδυτής θα εξασκήσει το δικαίωμα προαίρεσης και θα εισπράξει $27.50€ \times 1{,}000 = 27{,}500€$. Αν η τιμή της μετοχής παραμείνει πάνω από 27.50€, τότε τα δικαιώματα δε θα εξασκηθούν και ο επενδυτής θα έχει ζημία 1,000€ που απαιτήθηκαν για την αγορά των δικαιωμάτων προαίρεσης (Hull, 2009).

1.3.4. Speculators

Σε αντίθεση με τους hedgers, που στόχος τους είναι η αντιστάθμιση του κινδύνου με τη χρήση παραγώγων, οι κερδοσκόποι (speculators) αναλαμβάνουν ρίσκα με στόχο τη μεγιστοποίηση του κέρδους τους, λαμβάνοντας μια θέση στην αγορά και «ποντάροντας» ότι η τιμή ενός περιουσιακού στοιχείου θα ανέβει ή θα πέσει (Bingham, Kiesel, 2004). Ας υποθέσουμε ότι είναι Οκτώβριος και ένας επενδυτής θεωρεί ότι η τιμή μιας συγκεκριμένης μετοχής θα ανέβει μέσα στους επόμενους δύο μήνες. Η τιμή της μετοχής τον Οκτώβριο είναι 20€ και ένα δικαίωμα αγοράς με τιμή εξάσκησης 22.50€ και ημερομηνία λήξης σε δύο μήνες πωλείται προς 1€. Αν ο επενδυτής έχει στη διάθεσή του 2,000€ προς επένδυση, τότε μπορεί να ακολουθήσει δύο εναλλακτικές, είτε αν αγοράσει 100 μετοχές, είτε αν αγοράσει 2,000 δικαιώματα αγοράς της μετοχής. Ας υποθέσουμε ότι ο επενδυτής είχε δίκιο και η τιμή της μετοχής ανεβαίνει στα 27€. Αν ο επενδυτής είχε ακολουθήσει την πρώτη επενδυτική επιλογή, να αγοράσει δηλαδή 100 μετοχές, τότε θα είχε κέρδος $100 \times (27€ - 20€) = 700€$. Αν όμως είχε ακολουθήσει τη δεύτερη επενδυτική στρατηγική, να αγοράσει δηλαδή 2,000 δικαιώματα αγοράς της μετοχής προς 1€ το δικαίωμα, τότε πουλώντας ένα δικαίωμα θα είχε $27 - 22.50 = 4.50€$ κέρδος και η συνολική πληρωμή από την πώληση των δικαιωμάτων θα ήταν $2{,}000 \times 4.50€ = 9{,}000€$. Αν αφαιρεθεί το ποσό των 2,000€ της αρχικής επένδυσης, ο επενδυτής θα είχε συνολικό κέρδος 7,000€. Στην περίπτωση που ο επενδυτής είχε κάνει λάθος εκτίμηση και η τιμή της μετοχής δεν ανέβαινε, αλλά έπεφτε στα 15€ ανά μετοχή τον Δεκέμβριο, τότε από την πρώτη επενδυτική επιλογή η ζημία θα ήταν $100 \times (20€ - 15€) = 500€$, ενώ στη δεύτερη περίπτωση ο επενδυτής δε θα εξασκούσε το δικαίωμα αγοράς και θα έχανε το συνολικό ποσό της επένδυσής του, δηλαδή 2,000€ (Hull, 2009).

1.3.5. Arbitrageurs

Η τρίτη κατηγορία συμμετεχόντων στις αγορές είναι εκείνοι που ασκούν εξισορροπητική κερδοσκοπία, οι arbitrageurs. Η εξισορροπητική κερδοσκοπία είναι μια στρατηγική η οποία αποφέρει κέρδος χωρίς την ανάληψη κάποιου κινδύνου, παίρνοντας ταυτόχρονα θέσεις αγοράς και πώλησης σε ένα περιουσιακό στοιχείο σε δύο διαφορετικές αγορές (Bingham, Kiesel, 2004). Ας υποθέσουμε ότι μια συγκεκριμένη μετοχή διαπραγματεύεται στο χρηματιστήριο της Νέας Υόρκης και στο χρηματιστήριο του Λονδίνου και ότι στο πρώτο η τιμή της μετοχής είναι 150 δολάρια ενώ στο δεύτερο 100 λίρες, όταν η συναλλαγματική ισοτιμία δολαρίου και λίρας είναι 1.53 δολάρια προς 1 λίρα. Ένας επενδυτής που θέλει να ασκήσει εξισορροπητική κερδοσκοπία θα αγόραζε 100 μερίδια της μετοχής από τη Νέα Υόρκη και θα τις πουλούσε στο Λονδίνο, εισπράττοντας ένα κέρδος χωρίς την ύπαρξη κινδύνου της τάξης των $100 \times [(1.53\$ \times 100) - 150\$] = 300\$$, υποθέτοντας ότι δεν υπάρχουν κόστη συναλλαγής. Τα κόστη συναλλαγής στην περίπτωση αυτή πιθανόν να εξισώνονταν με το κέρδος από την εξισορροπητική κερδοσκοπία. Στην περίπτωση όμως μιας μεγάλης επενδυτικής τράπεζας, όπου τα κόστη συναλλαγής για τη συναλλαγή των μετοχών αλλά και τα κόστη συναλλαγής των συναλλαγμάτων είναι πολύ μικρά, η εξισορροπητική κερδοσκοπία αποτελεί μια πολύ ελκυστική στρατηγική. Ευκαιρίες εξισορροπητικής κερδοσκοπίας, όπως η περίπτωση που αναφέρθηκε προηγουμένως, δεν επιβιώνουν για μεγάλα χρονικά διαστήματα.

Όταν ο επενδυτής αγοράσει τις μετοχές στη Νέα Υόρκη, οι δυνάμεις της προσφοράς και ζήτησης θα οδηγήσουν στην άνοδο της αξίας του δολαρίου. Ομοιοτρόπως, όταν ο επενδυτής πουλήσει τις μετοχές στο Λονδίνο, η αξία της στερλίνας θα πέσει. Πολύ σύντομα τα δύο συναλλάγματα θα έχουν την ίδια αξία, με αποτέλεσμα να εξαφανιστεί η ευκαιρία για εξισορροπητική κερδοσκοπία αγοράζοντας μετοχές στη Νέα Υόρκη και πωλώντας τες στο Λονδίνο (Hull, 2009).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Δικαιώματα Προαίρεσης

2.1. Εισαγωγή

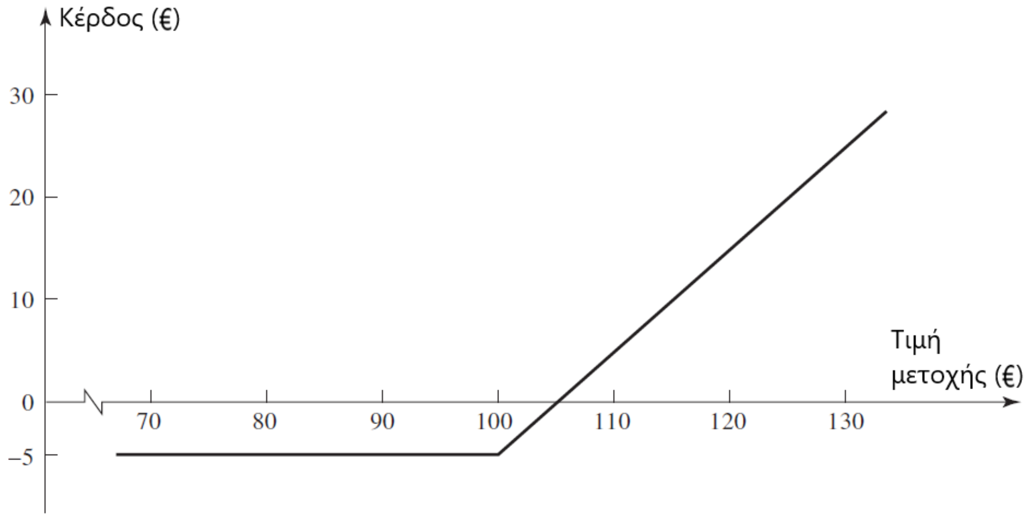
Όπως αναφέρθηκε, το δικαίωμα προαίρεσης είναι ένα παράγωγο συμβόλαιο στο οποίο το ένα από τα δύο συμβαλλόμενα μέρη, ο αγοραστής, πληρώνει ένα χρηματικό ποσό στο άλλο μέρος, τον πωλητή, απολαμβάνοντας το δικαίωμα να αγοράσει ή να πωλήσει ένα υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο σε προκαθορισμένη τιμή και σε προκαθορισμένη ημερομηνία ή σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή προγενέστερη της προκαθορισμένης ημερομηνίας (Pirie, 2017). Η προκαθορισμένη ημερομηνία αναφέρεται ως ημερομηνία λήξης (expiration date ή maturity date), ενώ η προκαθορισμένη τιμή καλείται τιμή εξάσκησης (strike price ή exercise price) του δικαιώματος προαίρεσης. Δικαιώματα προαίρεσης που δύναται να εξασκηθούν στην ημερομηνία λήξης τους ή/και προγενέστερα χαρακτηρίζονται ως Αμερικανικού τύπου (American options), ενώ αυτά που εξασκούνται μόνο στην ημερομηνία λήξης του χαρακτηρίζονται ως Ευρωπαϊκού τύπου (European options).

2.2. Κατηγορίες Δικαιωμάτων Προαίρεσης

Υπάρχουν δύο είδη δικαιωμάτων προαίρεσης. Ένα δικαίωμα αγοράς (call option) δίνει το δικαίωμα στον κάτοχο να αγοράσει το υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή και σε συγκεκριμένη τιμή. Ένα δικαίωμα πώλησης (put option) δίνει το δικαίωμα στον κάτοχο να πωλήσει το υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή και σε συγκεκριμένη τιμή.

2.2.1. Δικαίωμα αγοράς

Ας υποθέσουμε ότι ένας επενδυτής θέλει να αγοράσει ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς με τιμή εξάσκησης 100€, με σκοπό να αγοράσει 100 μερίδια μιας συγκεκριμένης μετοχής (Hull, 2009). Ας υποθέσουμε ότι η τρέχουσα τιμή της μετοχής είναι 98€, η ημερομηνία λήξης του δικαιώματος είναι σε τέσσερις μήνες και η τιμή ενός δικαιώματος για την αγορά ενός μεριδίου είναι 5€. Η αρχική επένδυση είναι 500€. Καθώς το δικαίωμα προαίρεσης είναι Ευρωπαϊκού τύπου, ο επενδυτής μπορεί να το εξασκήσει μόνο στην ημερομηνία λήξης του. Αν κατά την ημερομηνία λήξης η τιμή της μετοχής είναι λιγότερη από 100€, τότε ο επενδυτής θα επιλέξει να μην εξασκήσει το δικαίωμα αγοράς (καθώς δεν υπάρχει νόημα στο να αγοράσει μια μετοχή στην τιμή των 100€, όταν η χρηματιστηριακή της αξία είναι λιγότερη των 100€). Σε αυτή την περίπτωση ο επενδυτής θα χάσει το συνολικό ποσό των 500€, που ήταν η αρχική επένδυση. Αν κατά την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος, η τιμή της μετοχής είναι μεγαλύτερη των 100€, τότε ο επενδυτής θα εξασκήσει το δικαίωμα αγοράς. Έστω ότι η τιμή της μετοχής είναι 115€. Τότε ο επενδυτής θα εξασκήσει το δικαίωμα αγοράς και θα αγοράσει 100 μερίδια της μετοχής προς 100€ το μερίδιο. Αν ο επενδυτής πουλήσει τα μερίδια αυτά όσο η χρηματιστηριακή αξία της μετοχής παραμένει στα 115€, τότε θα εισπράξει κέρδος 15€ από κάθε μερίδιο ή συνολικά 1,500€, αν αγνοήσουμε τα κόστη της συναλλαγής. Αν συνυπολογίσουμε την αρχική επένδυση, το συνολικό κέρδος του επενδυτή είναι 1,000€.Στο γράφημα 2 απεικονίζεται η μεταβολή του κέρδους ή της ζημίας του επενδυτή από την αγορά δικαιώματος αγοράς ενός μεριδίου μιας μετοχής σε σχέση με την τιμή της μετοχής. Παραδείγματος χάριν, όταν η τιμή της μετοχής είναι 120€, το κέρδος από την αγορά ενός δικαιώματος προαίρεσης για την αγορά ενός μεριδίου της μετοχής είναι 15€. Αξίζει να σημειωθεί ότι ένας επενδυτής μπορεί να εξασκήσει το δικαίωμα προαίρεσης και να έχει ζημία. Ας υποθέσουμε ότι κατά τη λήξη του δικαιώματος η τιμή της μετοχής είναι 102€. Ο επενδυτής θα εξασκούσε το δικαίωμα προαίρεσης και θα είχε κέρδος 2€ με αποτέλεσμα να παρουσιάσει ζημία 3€, λαμβάνοντας υπόψη την αρχική επένδυση. Αν δεν εξασκούσε το δικαίωμα, τότε η ζημία θα ήταν 5€. Συμπερασματικά, τα δικαιώματα αγοράς πρέπει να εξασκούνται κατά την ημερομηνία λήξης τους, αν η τιμή της μετοχής είναι μεγαλύτερη της τιμής εξάσκησης του δικαιώματος.

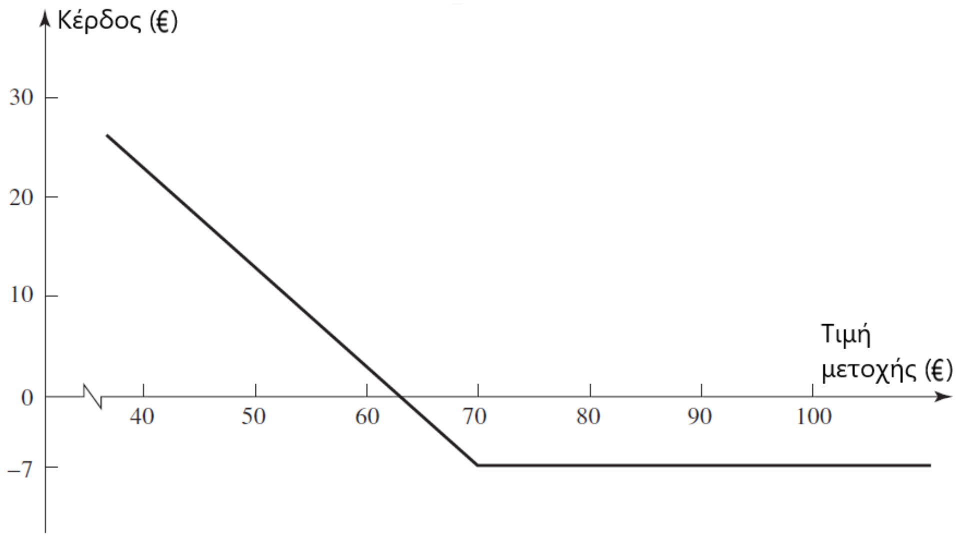


Πηγή: Hull (2009)

Γράφημα 2. Κέρδος από την αγορά Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς σε μερίδιο μετοχής

2.2.2. Δικαίωμα πώλησης

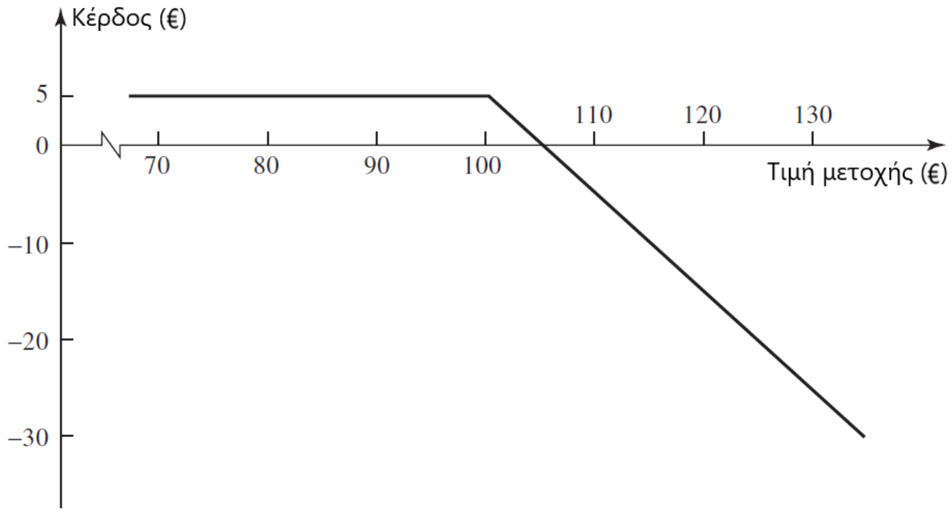
Ας υποθέσουμε ότι ένας επενδυτής αγοράζει ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης με τιμή εξάσκησης 70€ προκειμένου να πωλήσει 100 μερίδια μιας συγκεκριμένης μετοχής (Hull, 2009). Ας υποθέσουμε ότι η τρέχουσα τιμή της μετοχής είναι 65€, η ημερομηνία λήξης του δικαιώματος είναι σε τρεις μήνες και η τιμή ενός δικαιώματος για την πώληση ενός μεριδίου είναι 7€. Η αρχική επένδυση είναι 700€. Καθώς το δικαίωμα προαίρεσης είναι Ευρωπαϊκού τύπου, επενδυτής θα το εξασκήσει μόνο αν κατά την ημερομηνία λήξης του η τιμή της μετοχής είναι λιγότερη των 70€. Ας υποθέσουμε ότι στην ημερομηνία λήξης η τιμή της μετοχής είναι 55€. Ο επενδυτής θα αγοράσει 100 μερίδια προς 55€ το μερίδιο και θα τα πουλήσει προς 70€ το μερίδιο, με αποτέλεσμα να έχει κέρδος 15€ ανά μερίδιο ή 1,500€ συνολικά, υπό την προϋπόθεση ότι δεν υπάρχουν κόστη συναλλαγής. Αν υπολογιστεί το αρχικό ποσό της επένδυσης, ο επενδυτής θα έχει κέρδος 800€. Αν η τιμή της μετοχής κατά την ημερομηνία λήξης είναι μεγαλύτερη των 70€, το δικαίωμα πώλησης δεν εξασκείται και ο επενδυτής έχει ζημία τα 700€ της αρχικής του επένδυσης. Στο γράφημα 3 απεικονίζεται η μεταβολή του κέρδους ή της ζημίας του επενδυτή από την αγορά δικαιώματος πώλησης ενός μεριδίου μιας μετοχής σε σχέση με την τιμή της μετοχής.



Πηγή: Hull (2009)

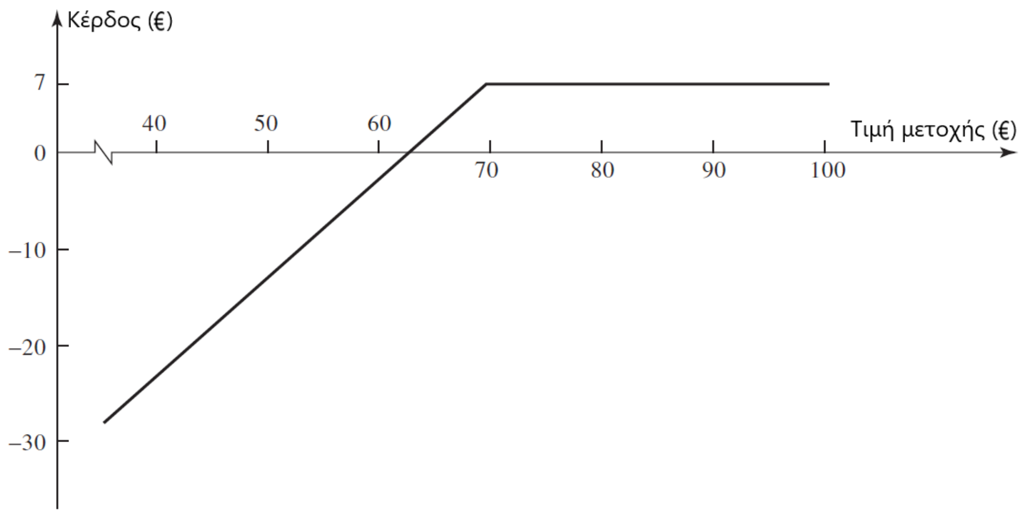
Γράφημα 3. Κέρδος από την αγορά Ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης σε μερίδιο μετοχής

Σε κάθε δικαίωμα προαίρεσης υπάρχουν δύο διαφορετικές θέσεις (Hull, 2009). Από τη μία πλευρά είναι ο επενδυτής ο οποίος θα αγοράσει το δικαίωμα προαίρεσης (long position) και από την άλλη είναι ο επενδυτής που θα πωλήσει το δικαίωμα προαίρεσης (short position). Ο επενδυτής που θα πωλήσει το δικαίωμα προαίρεσης αμείβεται για την παροχή του, όμως μελλοντικά μπορεί να βρεθεί ζημιωμένος. Συμπερασματικά, το κέρδος ή η ζημία του αγοραστή είναι ποσά αντίθετα από το κέρδος ή τη ζημία του πωλητή. Στα γραφήματα 4 και 5 απεικονίζεται το κέρδος ή η ζημία του επενδυτή, ο οποίος κατέχει θέση πώλησης στα δικαιώματα προαίρεσης που αναφέρθηκαν στα γραφήματα 2 και 3 αντίστοιχα.



Πηγή: Hull (2009)

Γράφημα 4. Κέρδος από την πώληση Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς σε μερίδιο μετοχής



Πηγή: Hull (2009)

Γράφημα 5. Κέρδος από την πώληση Ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης σε μερίδιο μετοχής

Συνεπώς οι συμμετέχοντες στις αγορές μπορούν να έχουν τις εξής θέσεις (Hull, 2009):

- Θέση αγοράς σε δικαίωμα αγοράς (long call)
- Θέση αγοράς σε δικαίωμα πώλησης (long put)
- Θέση πώλησης σε δικαίωμα αγοράς (short call)
- Θέση πώλησης σε δικαίωμα πώλησης (short put)

Αν συμβολίσουμε με K την τιμή εξάσκησης του δικαιώματος προαίρεσης και S_T την τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου στην ημερομηνία λήξης του δικαιώματος προαίρεσης, τότε:

- για τον κάτοχο της θέσης αγοράς σε δικαίωμα αγοράς, η πληρωμή (payoff) είναι

$$max(S_T - K, 0)$$

- για τον κάτοχο της θέσης πώλησης σε δικαίωμα αγοράς, η πληρωμή (payoff) είναι

$$-max(S_T - K, 0) = min(K - S_T, 0)$$

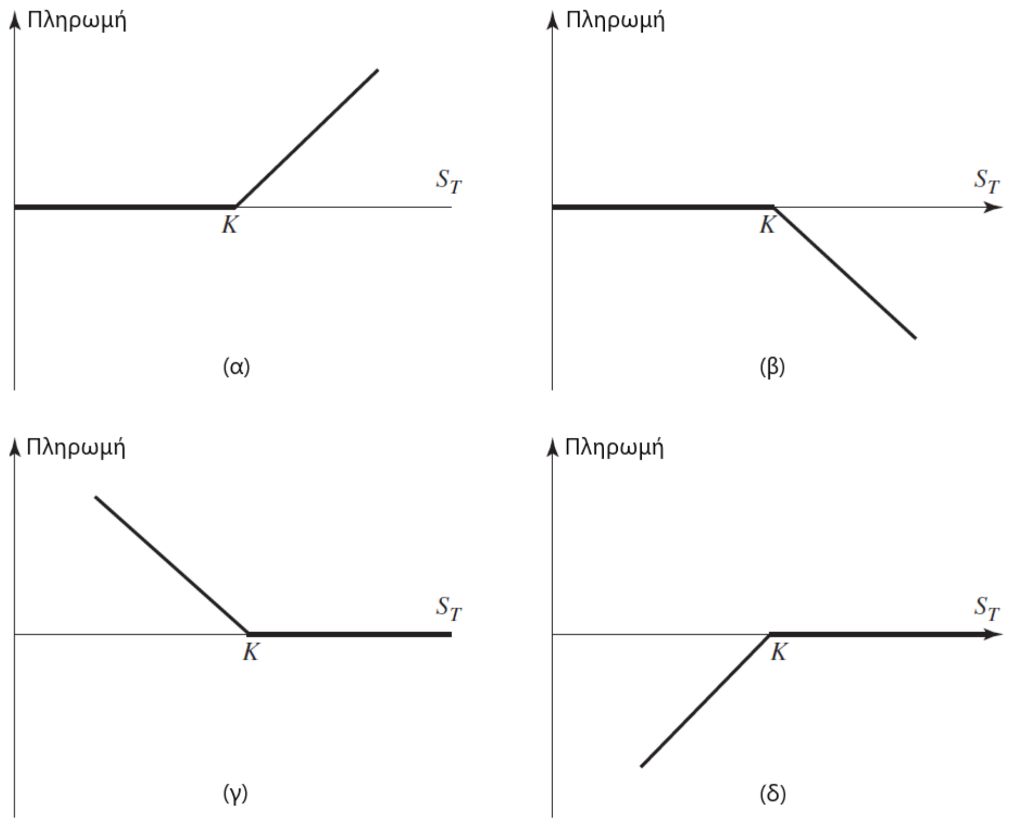
- για τον κάτοχο της θέσης αγοράς σε δικαίωμα πώλησης, η πληρωμή (payoff) είναι

$$max(K - S_T, 0)$$

- για τον κάτοχο της θέσης πώλησης σε δικαίωμα πώλησης, η πληρωμή (payoff) είναι

$$-max(K - S_T, 0) = min(S_T - K, 0)$$

Οι παραπάνω πληρωμές απεικονίζονται στο γράφημα 6.



Πηγή: Hull (2009)

Γράφημα 6. Πληρωμές από θέσεις σε Ευρωπαϊκά δικαιώματα: (α) θέση αγοράς σε δικαίωμα αγοράς, (β) θέση πώλησης σε δικαίωμα αγοράς, (γ) θέση αγοράς σε δικαίωμα πώλησης, (δ) θέση πώλησης σε δικαίωμα πώλησης.

Τα δικαιώματα προαίρεσης μπορούν να χαρακτηριστούν ως προς τη χρηματοροή που προκαλούν με την εξάσκησή τους μια χρονική στιγμή συγκριτικά με την τιμή εξάσκησής τους (Hull, 2009).

Συγκεκριμένα, ένα δικαίωμα προαίρεσης χαρακτηρίζεται:

- at-the-money, αν τη χρονική στιγμή t που εξασκείται το δικαίωμα ισχύει $S_T = K$, δηλαδή αποφέρει μηδενικό κέρδος
- in-the-money, αν τη χρονική στιγμή t που εξασκείται το δικαίωμα ισχύει $S_T > K$, δηλαδή αποφέρει θετικό κέρδος
- out-of-the-money, αν τη χρονική στιγμή t που εξασκείται το δικαίωμα ισχύει $S_T < K$, δηλαδή αποφέρει αρνητικό κέρδος (ζημία)

Πιο συγκεκριμένα, αν έχουμε ένα δικαίωμα αγοράς με τιμή εξάσκησης K και S την τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου τη χρονική στιγμή που εξασκείται το δικαίωμα, τότε αυτό χαρακτηρίζεται ως in-the-money αν $S > K$, at-the-money αν $S = K$ και out-of-the-money αν $S < K$ (Hull, 2009). Αν έχουμε ένα δικαίωμα πώλησης με τιμή εξάσκησης K και S την τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου τη χρονική στιγμή που εξασκείται το δικαίωμα, τότε αυτό χαρακτηρίζεται ως in-the-money αν $S < K$, at-the-money αν $S = K$ και out-of-the-money αν $S > K$. Είναι προφανές ότι ένα δικαίωμα θα εξασκηθεί μόνο αν είναι in-the-money. Στην περίπτωση που δεν υπάρχουν κόστη συναλλαγής, ένα δικαίωμα προαίρεσης που χαρακτηρίζεται in-the-money θα εξασκείται στην ημερομηνία λήξης, αν δεν έχει εξασκηθεί νωρίτερα.

Η εσωτερική αξία (intrinsic value) ενός δικαιώματος προαίρεσης ορίζεται ως η αξία που θα είχε το δικαίωμα αν δεν υπήρχε ημερομηνία λήξης, δηλαδή η αξία που θα είχε αν μπορούσε να εξασκηθεί άμεσα (Hull, 2009). Έτσι, η εσωτερική αξία ενός δικαιώματος αγοράς είναι $max(S - K, 0)$, ενώ για ένα δικαίωμα πώλησης $max(K - S, 0)$.

Ένα δικαίωμα προαίρεσης Αμερικανικού τύπου που είναι in-the-money πρέπει να αξίζει τουλάχιστον όσο η εσωτερική του αξία, καθώς ο κάτοχός του έχει το δικαίωμα να το εξασκήσει άμεσα. Συχνά είναι ιδανικό για τον κάτοχο ενός τέτοιου δικαιώματος να μην το εξασκήσει άμεσα και τότε ο χρόνος διακράτησής του καλείται χρονική αξία (time value). Η συνολική αξία ενός δικαιώματος μπορεί να λογιστεί ως το άθροισμα της εσωτερικής και της χρονικής του αξίας.

2.3. Άνω και κάτω φράγματα τιμών των δικαιωμάτων προαίρεσης

Στην παρούσα παράγραφο θα προσδιορίσουμε τις οριακές συνθήκες των τιμών των δικαιωμάτων προαίρεσης και τη σχέση ισοτιμίας μεταξύ των τιμών παρόμοιων δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης (Marroni, Perdomo, 2014). Υποθέτουμε ότι για τους συμμετέχοντες στην αγορά, όπως μεγάλες επενδυτικές τράπεζες, ισχύει ότι (Hull, 2009):

1. Δεν υπάρχουν κόστη συναλλαγής.
2. Τα κέρδη (οι ζημίες) από τις συναλλαγές φορολογούνται με το ίδιο επιτόκιο.
3. Μπορεί να πραγματοποιηθεί δανεισμός με το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου.

Υποθέτουμε ακόμη ότι οι συμμετέχοντες στην αγορά μπορούν να εκμεταλλευτούν οποιαδήποτε ευκαιρία εξισορροπητικής κερδοσκοπίας προκύψει, ώστε σε αυτή την περίπτωση τέτοιες ευκαιρίες να εξαφανιστούν σύντομα, υπό την υπόθεση της αποτελεσματικής αγοράς. Για το λόγο αυτό μπορεί να θεωρηθεί στην παρούσα ανάλυση ότι δεν υπάρχουν ευκαιρίες εξισορροπητικής κερδοσκοπίας. Ορίζονται οι παρακάτω μεταβλητές:

S_0 : τρέχουσα τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου

K : τιμή εξάσκησης του δικαιώματος

T : ημερομηνία λήξης του δικαιώματος

S_T : τιμή υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου κατά την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος

r : συνεχώς ανατοκιζόμενο επιτόκιο μηδενικού κινδύνου για μια επένδυση χρόνου T

C : αξία δικαιώματος αγοράς Αμερικανικού τύπου

P : αξία δικαιώματος πώλησης Αμερικανικού τύπου

c : αξία δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου

p : αξία δικαιώματος πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου

Υποθέτουμε ακόμη ότι το συνεχώς ανατοκιζόμενο επιτόκιο μηδενικού κινδύνου r είναι θετικό, καθώς μια επένδυση με μηδενικό κίνδυνο και συνεπώς αρνητικό επιτόκιο δε θα επέφερε κέρδη.

2.3.1. Άνω φράγματα δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης

Η τιμή ενός δικαιώματος αγοράς (Ευρωπαϊκού ή Αμερικανικού τύπου) δε μπορεί να είναι μεγαλύτερη από την τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου (Hull, 2009). Συνεπώς η τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου αποτελεί ένα άνω φράγμα της τιμής του δικαιώματος:

$$c \leq S_0 \text{ και } C \leq S_0 \qquad (\mathbf{2.1})$$

Σε αντίθετη περίπτωση, δηλαδή αν η τιμή του δικαιώματος ήταν μεγαλύτερη από αυτήν του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου, θα υπήρχαν ευκαιρίες εξισορροπητικής κερδοσκοπίας (Marroni, Perdomo, 2014). Οι συμμετέχοντες στην αγορά θα πωλούσαν το δικαίωμα αγοράς σε τιμή μεγαλύτερη από αυτή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου και θα αγόραζαν το υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο σε τιμή S_0.

Η τιμή ενός δικαιώματος πώλησης Αμερικανικού τύπου δεν μπορεί να ξεπεράσει την τιμή εξάσκησης του δικαιώματος K. Σε αντίθετη περίπτωση, οποιοσδήποτε θα μπορούσε να πωλήσει το δικαίωμα πώλησης, γνωρίζοντας ότι το αντίτιμο (premium) που θα λάβει θα είναι μεγαλύτερο από κάθε πληρωμή από την εξάσκηση του δικαιώματος. Συνεπώς:

$$P \leq K \qquad (\mathbf{2.2})$$

Για τα δικαιώματα πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου γνωρίζουμε ότι στην ημερομηνία λήξης, η τιμή του δικαιώματος δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από την τιμή εξάσκησής του K, συνεπώς δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από την παρούσα αξία της τιμής εξάσκησης K:

$$p \leq Ke^{-rT} \qquad (\mathbf{2.3})$$

Στην περίπτωση παραβίασης της παραπάνω σχέσης, ένας συμμετέχων στην αγορά που ασκεί εξισορροπητική κερδοσκοπία θα έβγαζε κέρδος με μηδενικό κίνδυνο, πωλώντας το δικαίωμα και επενδύοντας τα έσοδα της πώλησης με επιτόκιο μηδενικού κινδύνου.

2.3.2. Κάτω φράγματα δικαιωμάτων αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου σε μετοχές που δεν αποδίδουν μέρισμα

Ένα κάτω φράγμα για την τιμή ενός δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου σε μια μετοχή που δεν αποδίδει μέρισμα είναι (Hull, 2009):

$$S_0 - Ke^{-rT}$$

Έστω ένα χαρτοφυλάκιο Α, σχηματιζόμενο από ένα δικαίωμα αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου και ένα ακίνδυνο περιουσιακό στοιχείο (όπως ένα ομόλογο μηδενικού τοκομεριδίου με ημερομηνία λήξης στο χρόνο T), το οποίο αποδίδει πληρωμή K σε χρόνο T και ένα χαρτοφυλάκιο Β που αποτελείται από ένα μερίδιο μιας μετοχής.

Στο χαρτοφυλάκιο Α, το ακίνδυνο περιουσιακό στοιχείο θα αξίζει K τη χρονική στιγμή T. Αν $S_T > K$, το δικαίωμα αγοράς θα εξασκηθεί στη λήξη του και το χαρτοφυλάκιο Α θα έχει αξία S_T. Αν $S_T < K$, το δικαίωμα αγοράς δε θα εξασκηθεί και η αξία του χαρτοφυλακίου Α θα είναι K. Συνεπώς, τη χρονική στιγμή T η αξία του χαρτοφυλακίου Α θα είναι

$$\max(S_T, K)$$

Το χαρτοφυλάκιο Β αξίζει S_T σε χρόνο T. Τότε το χαρτοφυλάκιο Α θα αξίζει πάντα, τουλάχιστον όσο αξίζει το χαρτοφυλάκιο Β σε χρόνο T. Δεδομένου ότι δεν υπάρχουν ευκαιρίες εξισορροπητικής κερδοσκοπίας, η παραπάνω σχέση μεταξύ των δυο χαρτοφυλακίων πρέπει να αληθεύει για το παρόν. Η αξία του ακίνδυνου περιουσιακού στοιχείου την τρέχουσα χρονική στιγμή είναι Ke^{-rT}, συνεπώς

$$c + Ke^{-rT} \geq S_0$$

ή

$$c \geq S_0 - Ke^{-rT}$$

Στην περίπτωση όπου το δικαίωμα αγοράς δεν εξασκηθεί, η αξία του θα παραμείνει μη αρνητική, δηλαδή $c \geq 0$. Συνεπάγεται ότι

$$c \geq \max(S_0 - Ke^{-rT}, 0) \qquad (\mathbf{2.4})$$

2.3.3. Κάτω φράγματα δικαιωμάτων πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου σε μετοχές που δεν αποδίδουν μέρισμα

Ένα κάτω φράγμα για την τιμή ενός δικαιώματος πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου σε μια μετοχή που δεν αποδίδει μέρισμα είναι (Hull, 2009):

$$Ke^{-rT} - S_0$$

Έστω ένα χαρτοφυλάκιο Γ, σχηματιζόμενο από ένα δικαίωμα πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου και ένα μερίδιο μιας μετοχής και ένα χαρτοφυλάκιο Δ, το οποίο αποτελείται από ένα ακίνδυνο περιουσιακό στοιχείο που αποδίδει μια πληρωμή K σε χρόνο T.

Αν $S_T < K$, το δικαίωμα πώλησης θα εξασκηθεί στη λήξη του και το χαρτοφυλάκιο Γ θα έχει αξία K. Αν $S_T > K$, το δικαίωμα πώλησης δε θα εξασκηθεί και η αξία του χαρτοφυλακίου Γ θα είναι S_T. Συνεπώς, στο χρόνο T η αξία του χαρτοφυλακίου Α θα είναι

$$\max(S_T, K)$$

Το χαρτοφυλάκιο Δ αξίζει K τη χρονική στιγμή T. Συνεπώς το χαρτοφυλάκιο Γ θα αξίζει τουλάχιστον όσο αξίζει το χαρτοφυλάκιο Δ τη χρονική στιγμή T. Δεδομένου ότι δεν υπάρχουν ευκαιρίες εξισορροπητικής κερδοσκοπίας, η παραπάνω σχέση μεταξύ των δυο χαρτοφυλακίων πρέπει να αληθεύει για το παρόν. Η αξία του ακίνδυνου περιουσιακού στοιχείου την τρέχουσα χρονική στιγμή είναι Ke^{-rT}, συνεπώς

$$p + S_0 \geq Ke^{-rT}$$

ή

$$p \geq Ke^{-rT} - S_0$$

Στην περίπτωση όπου το δικαίωμα πώλησης δεν εξασκηθεί, η αξία του θα παραμείνει μη αρνητική, δηλαδή $p \geq 0$. Συνεπάγεται ότι

$$p \geq \max(Ke^{-rT} - S_0, 0) \qquad (\mathbf{2.5})$$

2.3.4. Κάτω φράγματα δικαιωμάτων προαίρεσης Αμερικανικού τύπου σε μετοχές που δεν αποδίδουν μέρισμα

Έστω C και P οι τιμές των δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης Αμερικανικού τύπου αντίστοιχα. Γνωρίζουμε ότι τα δικαιώματα προαίρεσης Αμερικανικού τύπου έχουν τα ίδια χαρακτηριστικά με τα δικαιώματα προαίρεσης Ευρωπαϊκού τύπου, με τη μόνη διαφορά ότι τα πρώτα δύναται να εξασκηθούν πρόωρα όσον αφορά την ημερομηνία λήξης τους. Η πρόωρη εξάσκηση δεν είναι προαπαιτούμενη, συνεπώς αυτή δε μπορεί να αποφέρει αρνητική αξία. Συμπερασματικά, τα δικαιώματα προαίρεσης Αμερικανικού τύπου δε μπορούν να πωληθούν σε τιμή μικρότερη από αυτή των δικαιωμάτων προαίρεσης Ευρωπαϊκού τύπου. Συνεπώς μπορούμε να ισχυριστούμε ότι (Pirie, 2017)

$$C \geq c$$

$$P \geq p$$

Δεδομένης της τιμής του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείο S_0, η αξία ενός δικαιώματος αγοράς θα είναι $\max(0, S_0 - K)$, ενώ η αξία ενός δικαιώματος πώλησης $\max(0, K - S_0)$. Οι τιμές αυτές αποτελούν τα κάτω φράγματα για τα δικαιώματα αγοράς και πώλησης Αμερικανικού τύπου, δηλαδή

$$C = \max(0, S_0 - K)$$

$$P = \max(0, K - S_0)$$

Όπως είδαμε παραπάνω, το κάτω φράγμα ενός δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου δίνεται από τη σχέση

$$c \geq \max(S_0 - Ke^{-rT}, 0)$$

Συγκρίνοντας την ελάχιστη τιμή ενός δικαιώματος αγοράς Αμερικανικού τύπου ($S_0 - Ke^{-rT}$) και ενός Ευρωπαϊκού τύπου ($S_0 - K$), παρατηρούμε ότι η ελάχιστη τιμή του τελευταίου είναι είτε ίση είτε μεγαλύτερη. Υπάρχουν περιστάσεις όπου οι δύο τιμές είναι ίσες με 0, κάποιες όπου η ελάχιστη τιμή του Αμερικανικού δικαιώματος είναι 0 και η ελάχιστη τιμή του Ευρωπαϊκού δικαιώματος είναι θετική και περιπτώσεις όπου και οι δύο τιμές είναι θετικές, όπου στην τελευταία η τιμή $S_0 - Ke^{-rT}$ είναι μεγαλύτερη από την τιμή $S_0 - K$. Δεδομένου ότι η τιμή ενός Αμερικανικού δικαιώματος αγοράς δε μπορεί να είναι μικρότερη από την τιμή ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς, καταλήγουμε ότι το κάτω φράγμα της τιμής ενός Αμερικανικού δικαιώματος αγοράς πρέπει να είναι $\max(S_0 - Ke^{-rT}, 0)$.

Για τα δικαιώματα πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου είδαμε ότι το κάτω φράγμα της τιμής τους δίνεται από τη σχέση

$$p \geq \max(Ke^{-rT} - S_0, 0)$$

Συγκρίνοντας την ελάχιστη τιμή ενός δικαιώματος πώλησης Αμερικανικού τύπου ($K - S_0$) και ενός Ευρωπαϊκού τύπου ($Ke^{-rT} - S_0$), παρατηρούμε ότι η ελάχιστη τιμή του πρώτου δεν είναι ποτέ μικρότερη. Υπάρχουν περιστάσεις όπου οι δύο τιμές είναι ίσες με 0, κάποιες όπου η ελάχιστη τιμή του Αμερικανικού δικαιώματος είναι θετική και η ελάχιστη τιμή του Ευρωπαϊκού δικαιώματος είναι αρνητική και περιπτώσεις όπου και οι δύο τιμές είναι θετικές, όπου στην τελευταία η τιμή $K - S_0$ είναι μεγαλύτερη από την τιμή $Ke^{-rT} - S_0$. Δεδομένου ότι η τιμή ενός Αμερικανικού δικαιώματος αγοράς δε μπορεί να είναι μικρότερη από την τιμή ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς, καταλήγουμε ότι το κάτω φράγμα της τιμής ενός Αμερικανικού δικαιώματος πώλησης πρέπει να είναι $\max(0, K - S_0)$.

Συνεπώς καταλήγουμε στα νέα κάτω φράγματα των τιμών δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης Αμερικανικού τύπου:

$$C \geq \max(S_0 - Ke^{-rT}, 0)$$

$$P \geq \max(K - S_0, 0)$$

Ας υποθέσουμε ένα δικαίωμα προαίρεσης με τιμή εξάσκησης 60€, επιτόκιο μηδενικού κινδύνου 4% και διάρκεια ζωής εννιά μήνες, δηλαδή $T = 9/12 = 0.75$ (Pirie, 2017).

Έστω ένα υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο $S_0 = 70€$. Το κάτω φράγμα του δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου θα είναι

$$\max(0, 70 - 60e^{-0.04\times 0.75}) = \max(0, 11.74) = 11.74€$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος αγοράς Αμερικανικού τύπου θα είναι $\max(0, 70 - 60) = 10€$. Εφόσον το δικαίωμα αγοράς Αμερικανικού τύπου πρέπει να πωληθεί σε τιμή υψηλότερη από αυτή του δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου, καταλήγουμε ότι η ελάχιστη τιμή για το δικαίωμα αγοράς Αμερικανικού τύπου είναι $11.74€$.

Το κάτω φράγμα δικαιώματος πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου θα είναι

$$\max(0, 60e^{-0.04\times 0.75} - 70) = \max(0, -11.74) = 0€$$

Η τιμή εξάσκησης του Αμερικανικού δικαιώματος πώλησης θα είναι $\max(0, 60 - 70) = 0€$, συνεπώς η ελάχιστη τιμή για το δικαίωμα πώλησης Αμερικανικού τύπου είναι 0€.

Έστω ένα υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο $S_0 = 50€$. Τότε το κάτω φράγμα του δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου θα είναι

$$\max(0, 50 - 60e^{-0.04\times 0.75}) = \max(0, -8.26) = 0€$$

Η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος αγοράς Αμερικανικού τύπου θα είναι $\max(0, 50 - 60) = 0€$, συνεπώς η ελάχιστη τιμή για το δικαίωμα αγοράς Αμερικανικού τύπου είναι 0€.

Το κάτω φράγμα δικαιώματος πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου θα είναι

$$\max(0, 60e^{-0.04\times 0.75} - 50) = \max(0, 8.26) = 8.26€$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος αγοράς Αμερικανικού τύπου θα είναι $\max(0, 60 - 50) = 10€$. Εφόσον το δικαίωμα αγοράς Αμερικανικού τύπου πρέπει να πωληθεί σε τιμή υψηλότερη από αυτή του δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου, καταλήγουμε ότι η ελάχιστη τιμή για το δικαίωμα αγοράς Αμερικανικού τύπου είναι $10€$.

2.4. Put-Call Parity

Η ισοτιμία δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης αποτελεί μια σχέση εξισορροπητικής κερδοσκοπίας μεταξύ των ασφαλίστρου (premium) του δικαιώματος πώλησης, του ασφαλίστρου (premium) του δικαιώματος αγοράς, την τιμή S_0 της μετοχής και ενός ποσού ίσου με Ke^{-rT} υπό τη μορφή ενός ακίνδυνου περιουσιακού στοιχείου (όπως ένα ομόλογο μηδενικού τοκομεριδίου με ημερομηνία λήξης στο χρόνο T) (Cuthbertson, 2020). Τα δικαιώματα αγοράς και πώλησης υπόκεινται στο ίδιο περιουσιακό στοιχείο (μια μετοχή), έχουν την ίδια τιμή εξάσκησης και την ίδια ημερομηνία λήξης. Η σχέση ισοτιμίας μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

$$c + Ke^{-rT} = S_0 + p \qquad (\mathbf{2.6})$$

Έστω ένα χαρτοφυλάκιο Α, σχηματιζόμενο από ένα δικαίωμα αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου και ένα ακίνδυνο περιουσιακό στοιχείο, το οποίο αποδίδει πληρωμή K σε χρόνο T και ένα χαρτοφυλάκιο Γ που αποτελείται από ένα δικαίωμα πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου και ένα μερίδιο μιας μετοχής τη χρονική στιγμή $t = 0$.

Αν $S_T < K$, το δικαίωμα πώλησης θα εξασκηθεί στη λήξη του και το χαρτοφυλάκιο Γ θα έχει αξία K. Αν $S_T > K$, το δικαίωμα πώλησης δε θα εξασκηθεί και η αξία του χαρτοφυλακίου Γ θα είναι S_T.

Αν $S_T > K$, το δικαίωμα αγοράς θα εξασκηθεί στη λήξη του και το χαρτοφυλάκιο Α θα έχει αξία S_T. Αν $S_T < K$, το δικαίωμα αγοράς δε θα εξασκηθεί και η αξία του χαρτοφυλακίου Α θα είναι K.

Στον πίνακα 2 αποτυπώνονται οι πληρωμές που περιγράφηκαν παραπάνω, από τον οποίο φαίνεται ότι τόσο το χαρτοφυλάκιο Α όσο και το χαρτοφυλάκιο Γ έχουν τα ίδια αποτελέσματα στο χρόνο T, ώστε στο χρόνο $t = 0$ να έχουν την ίδια αξία. Συνεπώς επαληθεύεται η ισότητα (2.6), διαφορετικά δύναται να επιτευχθούν κέρδη μέσω εξισορροπητικής κερδοσκοπίας.

Πίνακας 2: Επιστροφές από δύο χαρτοφυλάκια: ισοτιμία δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης

	$\boldsymbol{S_T > K}$	$\boldsymbol{S_T < K}$
Χαρτοφυλάκιο Α	$(S_T - K) + K = S_T$	K
Χαρτοφυλάκιο Γ	S_T	K
Χαρτοφυλάκιο Α = ένα δικαίωμα αγοράς και ένα ακίνδυνο περιουσιακό στοιχείο αξίας K, t=0		
Χαρτοφυλάκιο Γ = ένα δικαίωμα πώλησης και μία μετοχή, t=0		

Πηγή: Cuthbertson et al. (2020)

Η σχέση ισοτιμίας δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης (put-call parity) επαληθεύεται μόνο για τα δικαιώματα Ευρωπαϊκού τύπου (Hull, 2009). Για τα δικαιώματα Αμερικανικού τύπου, στην περίπτωση όπου δεν υπάρχουν μερίσματα, αποδεικνύεται ότι

$$S_0 - K \leq C - P \leq S_0 - Ke^{-rT} \qquad (\mathbf{2.7})$$

Έστω ένα δικαίωμα αγοράς Αμερικανικού τύπου σε μια μετοχή που δεν αποδίδει μέρισμα, με τιμή εξάσκησης 20$ και ημερομηνία λήξης σε 5 μήνες, το οποίο αξίζει 1.5$. Ας υποθέσουμε ότι η τρέχουσα τιμή της μετοχής είναι 19$ και το ετήσιο επιτόκιο μηδενικού κινδύνου είναι 10%. Τότε από την παραπάνω σχέση:

$$19 - 20 \leq C - P \leq 19 - 20e^{-\frac{0.1x5}{12}}$$

ή

$$1 \geq P - C \geq 0.18$$

Όταν η τιμή C του δικαιώματος αγοράς είναι 1.5$, η τιμή P του δικαιώματος πώλησης τύπου πρέπει να βρίσκεται μεταξύ των τιμών 1.68$ και 2.5$.

2.5. Δικαιώματα προαίρεσης σε μετοχές που αποδίδουν μέρισμα

Καθώς οι περισσότερες αγοραπωλησίες δικαιωμάτων σε μετοχές έχουν διάρκεια ζωής λιγότερο από ένα χρόνο, υποθέτουμε ότι τα μερίσματα που θα αποδοθούν κατά τη διάρκεια ζωής του δικαιώματος είναι γνωστά (Hull, 2009). Συμβολίζουμε με D την παρούσα αξία των μερισμάτων μέχρι την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος και για τον υπολογισμό της, υποθέτουμε ότι το μέρισμα δίνεται την προ-μερίσματος ημερομηνία (ex-dividend day).

Έστω ένα χαρτοφυλάκιο Α, το οποίο αποτελείται από ένα δικαίωμα αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου και ένα χρηματικό ποσό αξίας $D + Ke^{-rT}$ και ένα χαρτοφυλάκιο Β, το οποίο αποτελείται από ένα μερίδιο μιας μετοχής. Στην περίπτωση όπου το δικαίωμα αγοράς δεν εξασκηθεί, η αξία του θα παραμείνει μη αρνητική, δηλαδή $c \geq 0$. Συνεπάγεται ότι

$$c \geq \max(S_0 - D - Ke^{-rT}, 0) \qquad (\mathbf{2.8})$$

Έστω ένα χαρτοφυλάκιο Γ, το οποίο αποτελείται από ένα δικαίωμα πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου και ένα μερίδιο μιας μετοχής και ένα χαρτοφυλάκιο Δ, το οποίο αποτελείται από ένα χρηματικό ποσό αξίας $D + Ke^{-rT}$. Στην περίπτωση όπου το δικαίωμα πώλησης δεν εξασκηθεί, η αξία του θα παραμείνει μη αρνητική, δηλαδή $p \geq 0$. Συνεπάγεται ότι

$$p \geq \max(D + Ke^{-rT} - S_0, 0) \qquad (\mathbf{2.9})$$

Συγκρίνοντας την αξία των χαρτοφυλακίων Α και Γ στην ημερομηνία λήξης τους, η σχέση ισοτιμίας δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης (2.6), σε μετοχές που αποδίδουν μερίσματα θα είναι

$$c + D + Ke^{-rT} = p + S_0 \qquad (\mathbf{2.10})$$

Αντίστοιχα, η σχέση ισοτιμίας Αμερικανικών δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης (2.7), σε μετοχές που αποδίδουν μερίσματα θα είναι

$$S_0 - K - D \leq C - P \leq S_0 - Ke^{-rT} \qquad (\mathbf{2.11})$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Διωνυμικά Δέντρα

3.1. Εισαγωγή

Η μέθοδος αποτίμησης δικαιωμάτων προαίρεσης με τη χρήση του διωνυμικού μοντέλου, παρόλο που έχει αντικατασταθεί από άλλες αριθμητικές μεθόδους με την πάροδο του χρόνου, αποτελεί ακόμα μία μέθοδο για την καλύτερη κατανόηση της δομής συγκεκριμένων δικαιωμάτων προαίρεσης (Marroni, Perdomo, 2014). Οι ακαδημαϊκοί που πρώτοι πρότειναν αυτή τη μέθοδο ήταν οι John Cox, Stephen Ross και Mark Rubenstein (1979), για το λόγο αυτό και το μοντέλο αναφέρεται και ως μοντέλο Cox-Ross-Rubenstein (CRR).

Το διωνυμικό δέντρο είναι ένα διάγραμμα το οποίο παρουσιάζει διαφορετικά πιθανά μονοπάτια που μπορεί να ακολουθήσει η τιμή μιας μετοχής κατά τη διάρκεια ζωής ενός δικαιώματος προαίρεσης. Η υπόθεση για την εφαρμογή αυτής της στρατηγικής είναι ότι η τιμή της μετοχής ακολουθεί έναν τυχαίο περίπατο. Σε κάθε βήμα, υπάρχει συγκεκριμένη πιθανότητα η τιμή της μετοχής να ανέβει κατά ένα συγκεκριμένο ποσοστό και συγκεκριμένη πιθανότητα να πέσει κατά ένα συγκεκριμένο ποσοστό και αυτός είναι ο λόγος που το μοντέλο αυτό καλείται διωνυμικό, καθώς δίνει μόνο δύο πιθανά αποτελέσματα (Hull, 2009).

Η μέθοδος αποτίμησης δικαιωμάτων προαίρεσης με τη χρήση του διωνυμικού μοντέλου στηρίζεται στην υπόθεση ότι δεν υπάρχουν ευκαιρίες εξισορροπητικής κερδοσκοπίας κατά την αποτίμηση ενός δικαιώματος. Συνεπώς, η αποτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης γίνεται καλύτερα αντιληπτή, αν κάποιος κατανοήσει τον τρόπο με τον οποίο οι arbitrageurs προσεγγίζουν τις χρηματοπιστωτικές αγορές (Pirie, 2017).

Παρακάτω παρουσιάζεται το παράδειγμα των Cox, Ross και Rubenstein, από το οποίο οι ίδιοι ανέπτυξαν ένα διωνυμικό μοντέλο για την αποτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης. Ας υποθέσουμε ότι η τρέχουσα τιμή μιας μετοχής είναι 50€ και ότι στο τέλος μιας χρονικής περιόδου η τιμή της θα είναι είτε 25€ είτε 100€, έστω S^*. Η παραπάνω κατάσταση απεικονίζεται μέσω ενός διωνυμικού δέντρου στο γράφημα 7. Στο τέλος της περιόδου είναι διαθέσιμο ένα δικαίωμα αγοράς με τιμή εξάσκησης $K = 50€$ ανά μερίδιο μετοχής. Το μερίδιο της μετοχής δεν αποδίδει μερίσματα και δεν υπάρχουν κόστη συναλλαγής, φόροι ή απαιτήσεις ως προς το λογαριασμό περιθωρίου. Υπάρχει επίσης η δυνατότητα του δανεισμού χρηματικού ποσού με επιτόκιο 25%, το οποίο θα αποπληρωθεί στο τέλος της περιόδου.

Κατασκευάζεται το παρακάτω χαρτοφυλάκιο μηδενικού κινδύνου (Peters, 2016):

1. Θέση πώλησης σε 3 δικαιώματα αγοράς
2. Αγορά δύο μεριδίων μετοχής προς 50€ το κάθε ένα
3. Δανεισμός 40€ με επιτόκιο 25%, που θα αποπληρωθούν στο τέλος της περιόδου

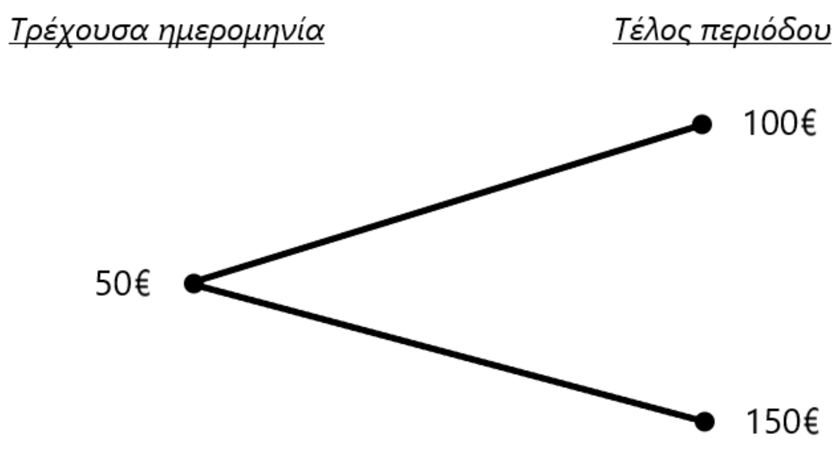
Αν η τιμή της μετοχής πέσει σε $S^* = 25€$, το δικαίωμα αγοράς δεν εξασκείται από τους κατόχους του, καθώς κανείς δε θα αγοράσει μια μετοχή σε τιμή μεγαλύτερη από τη χρηματιστηριακή της αξία, δηλαδή όταν $S^* = 25€$, ενώ $K = 50€$. Η τρέχουσα αξία των μεριδίων είναι $2 \times 25 = 50€$ και υπάρχει χρέος 50€, καθώς ο δανεισμός ήταν $40€$ προς 25% επιτόκιο. Η συνολική αξία του χαρτοφυλακίου είναι $0€ + 50€ - 50€ = 0€$.

Αν η τιμή της μετοχής αυξηθεί σε $S^* = 100€$, το δικαίωμα αγοράς θα εξασκηθεί με κόστος $3 \times (100€ - 50€) = 150€$. Η αξία των μεριδίων είναι $2 \times 100 = 200€$ και το χρέος είναι 50€. Η συνολική αξία του χαρτοφυλακίου είναι $-150€ + 200€ - 50€ = 0€$.

Προκειμένου να μην υπάρξουν ευκαιρίες εξισορροπητικής κερδοσκοπίας, η αξία του χαρτοφυλακίου την τρέχουσα περίοδο πρέπει να είναι ίση με την αξία του χαρτοφυλακίου κατά το τέλος της περιόδου, δηλαδή να είναι μηδενική. Με τον τρόπο αυτό δύναται να αποτιμηθεί η αξία του δικαιώματος αγοράς, C:

$$3 \times C - 100 + 40 = 0$$

$$C = (100 - 40)/3 = 20€$$



Γράφημα 7. Διωνυμικό δέντρο της τιμής της μετοχής

Πίνακας 3: Αξία χαρτοφυλακίου μηδενικού κινδύνου

	Τρέχουσα ημερομηνία	Ημερομηνία λήξης	
		$S^* = 25€$	$S^* = 100€,$
Αξία από τη θέση πώλησης σε 3 δικαιώματα αγοράς	$3 \times C$	$0€$	$-150€$
Αξία από την αγορά 2 μεριδίων της μετοχής	$-100€$	$50€$	$200€$
Αξία του χρέους 40€	$40€$	$-50€$	$-50€$
Συνολική αξία		$0€$	$0€$

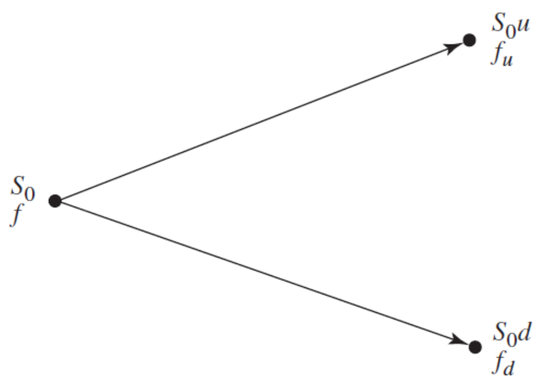
Από το παραπάνω παράδειγμα συμπεραίνουμε ότι είναι δυνατό να κατασκευαστεί ένα χαρτοφυλάκιο με τέτοιο τρόπο ώστε, η αξία του χαρτοφυλακίου να παραμένει αμετάβλητη, ανεξάρτητα από την κίνηση της τιμής της υποκείμενης μετοχής και εν συνεχεία να προσδιοριστεί η αξία του δικαιώματος αγοράς. Για την επίτευξη αυτού του στόχου είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε την τιμή εξάσκησης του δικαιώματος K, την τιμή της υποκείμενης μετοχής S, την ανοδική ή καθοδική κίνησης της τιμής της μετοχής και το επιτόκιο δανεισμού. Τονίζεται ότι δε χρειάζεται να γνωρίζουμε την πιθανότητα η τιμή της μετοχής να κινηθεί ανοδικά ή καθοδικά. Ο λόγος είναι ότι η αξία του δικαιώματος αγοράς εξαρτάται αποκλειστικά από την τιμή της υποκείμενης μετοχής, διαφορετικά δε μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος του διωνυμικού δέντρου για την αποτίμηση του δικαιώματος (Peters, 2016).

3.2. Διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου

Μπορούμε να γενικεύσουμε την παραπάνω περίπτωση, όπου δεν υπήρχαν ευκαιρίες εξισορροπητικής κερδοσκοπίας, υποθέτοντας μία μετοχή με τιμή S_0 τη χρονική στιγμή $t = 0$ και ένα δικαίωμα προαίρεσης με υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο την παραπάνω μετοχή και διάρκεια ζωής T, με τιμή f (Hull, 2009). Η τιμή της μετοχής ακολουθεί μια πολλαπλασιαστική διωνυμική διαδικασία σε διακριτά χρονικά διαστήματα. Πολλαπλασιαστική διαδικασία είναι μια διαδικασία κατά την οποία μια άνοδος ακολουθούμενη από μια κάθοδο της τιμής της μετοχής αποδίδει την ίδια αξία με την περίπτωση στην οποία μια κάθοδος της τιμής της μετοχής ακολουθείται από μια άνοδό της (Peters, 2016). Έστω ότι η τιμή της μετοχής μπορεί είτε να ανέβει από S_0 σε S_0u, όπου $u > 1$ ή να πέσει από S_0 σε S_0d, όπου $d < 1$ (Hull, 2009).

Το ποσοστό αύξησης της τιμής της μετοχής στην περίπτωση που η τιμή ανέβει υπολογίζεται ως $u-1$, ενώ το ποσοστό μείωσης στην περίπτωση πτώσης της τιμής υπολογίζεται ως $1-d$.

Αν η τιμή της μετοχής ανέβει σε S_0u, υποθέτουμε ότι η αξία του δικαιώματος προαίρεσης είναι f_u, ενώ αν η τιμή της μετοχής πέσει σε S_0d, η αξία του δικαιώματος προαίρεσης θα είναι f_d (Hull, 2009). Στο γράφημα 8 απεικονίζεται η κατάσταση που περιγράφηκε παραπάνω.



Πηγή: Hull (2009)

Γράφημα 8. Τιμές μετοχής και δικαιώματος προαίρεσης σε διωνυμικό δέντρο μιας περιόδου

Όπως στο παράδειγμα των Cox, Ross και Rubenstein, για τον υπολογισμό της αξίας του δικαιώματος προαίρεσης τη χρονική στιγμή $t=0$, υποθέτουμε ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο αποτελείται από μια θέση αγοράς σε Δ μερίδια μιας μετοχής και μια θέση πώλησης σε ένα δικαίωμα προαίρεσης (Hull, 2009). Θα υπολογίσουμε τον αριθμό Δ των μεριδίων της μετοχής που απαιτούνται ώστε το παραπάνω χαρτοφυλάκιο να είναι ακίνδυνο. Στην περίπτωση που η τιμή της μετοχής ανέβει, η αξία του χαρτοφυλακίου κατά την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος προαίρεσης είναι

$$S_0u\Delta - f_u$$

ενώ στην περίπτωση που η τιμή της μετοχής πέσει, η αξία του θα είναι

$$S_0d\Delta - f_d$$

Οι δύο αξίες ισοδυναμούν όταν

$$S_0u\Delta - f_u = S_0d\Delta - f_d$$

ή

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S_0u - S_0d} \qquad \mathbf{(3.1)}$$

Η παραπάνω εξίσωση μας δείχνει ότι το Δ είναι ο λόγος μεταβολής της τιμής του δικαιώματος προαίρεσης προς τη μεταβολή της τιμής της μετοχής , κατά την κίνηση μεταξύ των κόμβων στο χρόνο T (Hull, 2009). Αν ορίσουμε ως r το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου, τότε πρέπει να ισχύει ότι $u > r > d$, με $d > 0$, προκειμένου να μην υπάρχουν ευκαιρίες εξισορροπητικής κερδοσκοπίας (Cuthbertson et al., 2020) και η παρούσα αξία του χαρτοφυλακίου θα είναι

$$(S_0 u\Delta - f_u)e^{-rT}$$

Το κόστος για τη δημιουργία του χαρτοφυλακίου είναι

$$S_0\Delta - f$$

Συνεπώς

$$S_0\Delta - f = (S_0 u\Delta - f_u)e^{-rT}$$

ή

$$f = S_0\Delta(1 - ue^{-rT}) + f_u e^{-rT}$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση την τιμή του Δ από την (3.1), τότε

$$f = S_0 \frac{f_u - f_d}{S_0 u - S_0 d}(1 - ue^{-rT}) + f_u e^{-rT}$$

ή

$$f = e^{-rT}[pf_u + (1-p)f_d] \qquad (\mathbf{3.2})$$

όπου

$$p = \frac{e^{rT} - d}{u - d} \qquad (\mathbf{3.3})$$

Η ισότητα (3.2) ορίζει ότι η αξία του δικαιώματος σήμερα είναι ο σταθμισμένος μέσος όρος των δύο πιθανών τιμών του δικαιώματος στη λήξη του, όπου οι σταθμίσεις p και $(1-p)$ δίνονται από την ισότητα (3.3) Από τις παραπάνω εξισώσεις συμπεραίνουμε ότι (Pirie, 2017):

- Η μεταβλητότητα του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου, η οποία αντικατοπτρίζεται από τις τιμές $S_0 u$ και $S_0 d$ και επηρεάζει τις τιμές f_u και f_d αποτελεί ένα σημαντικό παράγοντα για την αποτίμηση του δικαιώματος προαίρεσης.
- Οι πιθανότητες u και d της ανοδικής και καθοδικής κίνησης της τιμής της μετοχής δεν εμφανίζονται στην ισότητα (3.2).

- Οι τιμές p και $(1-p)$ που αντικαθιστούν τις πιθανότητες u και d, καλούνται πιθανότητες ουδέτερου κινδύνου και παράγουν ένα σταθμισμένο μέσο όρο των δύο επόμενων πιθανών τιμών του δικαιώματος προαίρεσης.
- Η ισότητα (3.2) έχει τη μορφή μιας μελλοντικής αναμενόμενης αξίας, προεξοφλημένης με το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου.

3.3. Αποτίμηση ουδέτερου κινδύνου

Όπως αναφέρθηκε, στην ισότητα (3.2) δεν εμφανίζονται οι πιθανότητες u και d, οι οποίες αντικατοπτρίζουν τις πραγματικές πιθανότητες η τιμή της μετοχής να κινηθεί ανοδικά και καθοδικά αντίστοιχα. Αντιθέτως στη θέση τους εμφανίζονται οι σταθμίσεις p και $(1-p)$, με τη στάθμιση p να αναφέρεται ως πιθανότητα ουδέτερου κινδύνου (risk-neutral probability) της αύξησης της τιμής της μετοχής. Οι σταθμίσεις αυτές παίρνουν τιμές από 0 έως 1 και εξάγονται υπό την υπόθεση ότι το χαρτοφυλάκιο που κατασκευάζεται είναι μηδενικού κινδύνου (Cuthbertson et al., 2020). Η αναμενόμενη πληρωμή από το δικαίωμα προαίρεσης, με χρήση των πιθανοτήτων ουδέτερου κινδύνου είναι:

$$pf_u + (1-p)f_d$$

Ο όρος πιθανότητα ουδέτερου κινδύνου δε σημαίνει ότι οι επενδυτές δεν ενδιαφέρονται για το ρίσκο, αλλά ότι με τη χρήση του διωνυμικού μοντέλου για την αποτίμηση ενός δικαιώματος οι επενδυτές μπορούν να κατασκευάσουν ένα χαρτοφυλάκιο μηδενικού κινδύνου, που εξ ορισμού έχει μηδενικό ρίσκο. Από την ισότητα (3.2) και με χρήση της πιθανότητας ουδέτερου κινδύνου p μπορεί να αποτιμηθεί ένα δικαίωμα προαίρεσης, μια διαδικασία που καλείται αποτίμηση ουδέτερου κινδύνου (risk-neutral valuation) και οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το ασφάλιστρο (premium) του δικαιώματος αγοράς ισούται με την αναμενόμενη μελλοντική πληρωμή, προεξοφλημένη με το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου σε ένα περιβάλλον ουδέτερου κινδύνου (Cuthbertson et al., 2020).

Αποδεικνύεται ότι, υποθέτοντας ένα περιβάλλον ουδέτερου κινδύνου, μπορούμε να αποτιμήσουμε σωστά την τιμή ενός δικαιώματος προαίρεσης σε πραγματικό περιβάλλον, αλλά και σε περιβάλλον ουδέτερου κινδύνου. Σε περιβάλλον ουδέτερου κινδύνου ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις (Hull, 2009):

1. Η αναμενόμενη απόδοση μιας μετοχής ή οποιασδήποτε άλλης επένδυσης ισούται με το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου.
2. Το προεξοφλητικό επιτόκιο που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της πληρωμής ενός δικαιώματος προαίρεσης ή οποιουδήποτε άλλου χρηματοοικονομικού εργαλείου είναι το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου.

Η μεταβλητή p ορίστηκε ως η πιθανότητα ανοδικής κίνησης της μετοχής σε ένα περιβάλλον ουδέτερου κινδύνου, συνεπώς η αναμενόμενη τιμή της μετοχής στο χρόνο T είναι

$$E(S_T) = pS_0u + (1-p)S_0d$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση τον τύπο του p από τη σχέση (3.3) έχουμε

$$E(S_T) = S_0e^{rT} \qquad \mathbf{(3.4)}$$

Η παραπάνω εξίσωση δείχνει ότι η τιμή της μετοχής κατά μέσο όρο αυξάνεται με ποσοστό το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου, όταν p είναι η πιθανότητα ανοδικής κίνησης της τιμής της. Αυτό σημαίνει ότι η τιμή της μετοχής μεταβάλλεται όπως ακριβώς θα περιμέναμε να μεταβάλλεται σε ένα περιβάλλον ουδέτερου κινδύνου, όταν p είναι η πιθανότητα ανοδικής κίνησης της τιμής της (Hull, 2009).

3.4. Διωνυμικό μοντέλο δύο περιόδων

Υποθέτουμε ότι η τιμή μιας μετοχής αρχικά είναι S_0 και ότι σε κάθε περίοδο είτε αυξάνεται κατά u φορές, είτε μειώνεται κατά d φορές ως προς την αρχική της τιμή. Στο γράφημα 9 απεικονίζεται το διωνυμικό δέντρο δύο περιόδων, όπου παραδείγματος χάριν f_{uu} είναι αξία του δικαιώματος μετά από δύο ανοδικές κινήσεις της τιμής της μετοχής κατά u φορές την αρχική της τιμή. Υποθέτουμε επίσης ότι το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου είναι r και η διάρκεια κάθε περιόδου είναι Δt χρόνια (Hull, 2009). Τότε, οι εξισώσεις (3.2) και (3.3) γίνονται

$$f = e^{-r\Delta t}[pf_u + (1-p)f_d] \qquad \mathbf{(3.5)}$$

$$p = \frac{e^{r\Delta t}-d}{u-d} \qquad \mathbf{(3.6)}$$

Από την εξίσωση (3.5) έχουμε ότι

$$f_u = e^{-r\Delta t}[pf_{uu} + (1-p)f_{ud}] \qquad \mathbf{(3.7)}$$

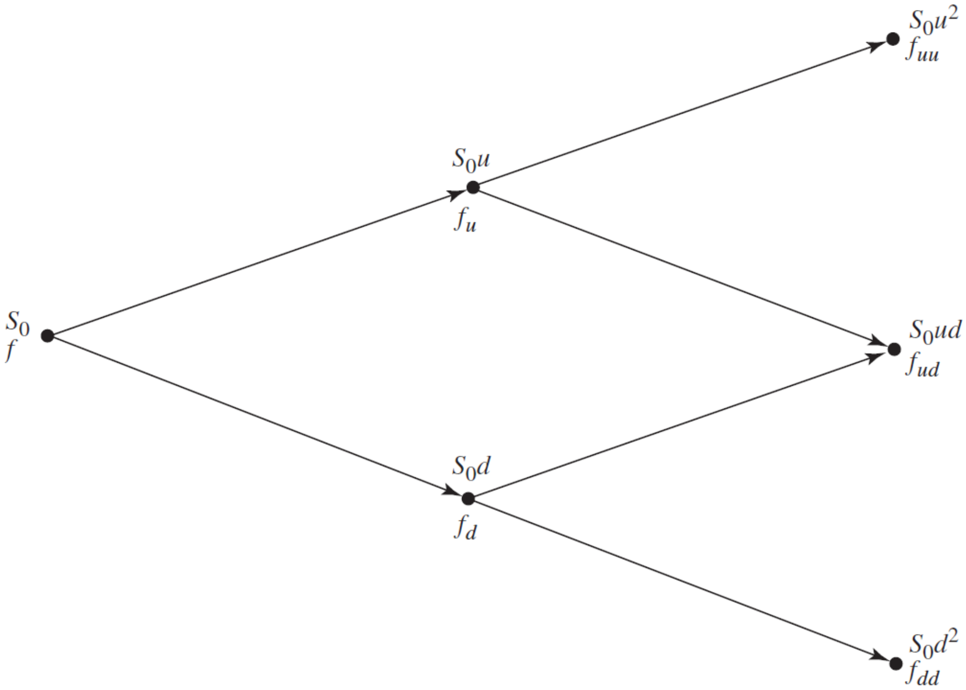
$$f_d = e^{-r\Delta t}[pf_{ud} + (1-p)f_{dd}] \qquad \mathbf{(3.8)}$$

$$f = e^{-r\Delta t}[pf_u + (1-p)f_d] \qquad (\mathbf{3.9})$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (3.7) και (3.8) στην εξίσωση (3.9) έχουμε ότι

$$f = e^{-2r\Delta t}[p^2 f_{uu} + 2p(1-p)f_{ud} + (1-p)^2 f_{dd}] \qquad (\mathbf{3.10})$$

Οι μεταβλητές p^2, $2p(1-p)$, $(1-p)^2$ είναι οι πιθανότητες των κινήσεων της τιμής της μετοχής, οι οποίες θα οδηγήσουν στους τελικούς κόμβους. Η αρχή της αποτίμησης ουδέτερου κινδύνου ισχύει και η τιμή του δικαιώματος προαίρεσης ισούται με την αναμενόμενη πληρωμή του σε ένα περιβάλλον ουδέτερου κινδύνου προεξοφλημένη με το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου.



Πηγή: Hull (2009)

Γράφημα 9. Τιμές μετοχής και δικαιώματος προαίρεσης σε διωνυμικό δέντρο δύο περιόδων

3.5. Βαθμονόμηση μεταβλητότητας

Όπως είδαμε, οι τρεις αναγκαίες παράμετροι για την κατασκευή ενός διωνυμικού δέντρου είναι οι μεταβλητές u, d και p. Όταν οι μεταβλητές u και d έχουν οριστεί, πρέπει να γίνει η επιλογή της μεταβλητής p ώστε η αναμενόμενη απόδοση να ισούται με το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου. Έχουμε δείξει ότι

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u-d} \qquad (\mathbf{3.11})$$

Οι μεταβλητές u και d πρέπει να είναι τέτοιες ώστε να συμφωνούν με τη μεταβλητότητα (Marroni, Perdomo, 2014). Η μεταβλητότητα μιας μετοχής (ή οποιουδήποτε άλλου περιουσιακού στοιχείου), σ, ορίζεται έτσι ώστε η τυπική απόκλιση της απόδοσής της σε ένα μικρό χρονικό διάστημα Δt να είναι $\sigma\sqrt{\Delta t}$. Ισοδύναμα, η διασπορά της απόδοσης της μετοχής σε χρόνο Δt είναι $\sigma^2 \Delta t$. Η διασπορά μιας μεταβλητής X ορίζεται ως $E(X^2) - [E(X)]^2$, όπου E είναι αναμενόμενη μέση τιμή μιας μεταβλητής (Wilmott et al., 1995). Κατά τη διάρκεια μιας περιόδου Δt, υπάρχει πιθανότητα p η μετοχή να αποδίδει απόδοση $u - 1$ και πιθανότητα $1 - p$ η μετοχή να αποδίδει απόδοση $d - 1$. Συνεπάγεται ότι η μεταβλητότητα θα επιτυγχάνεται όταν

$$p(u-1)^2 + (1-p)(d-1)^2 - [p(u-1) + (1-p)(d-1)]^2 = \sigma^2 \qquad (\mathbf{3.12})$$

Αντικαθιστώντας p από την εξίσωση (3.11) έχουμε

$$e^{r\Delta t}(u+d) - ud - e^{2r\Delta t} = \sigma^2 \Delta t \qquad (\mathbf{3.13})$$

Λύσεις της παραπάνω εξίσωσης, όταν οι τιμές των Δt^2 και άλλων μεγαλύτερων δυνάμεων της Δt δε λαμβάνονται υπόψη, είναι οι

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \text{ και } d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

Αυτές είναι οι τιμές των u και d που χρησιμοποιήθηκαν από τους Cox, Ross και Rubinstein (1979).

Οι τιμές u και d επιλέχτηκαν ώστε να συμφωνούν με την μεταβλητότητα σε ένα περιβάλλον ουδέτερου κινδύνου. Όπως θα δούμε παρακάτω, οι τιμές των μεταβλητών αυτών συμφωνούν και με τη μεταβλητότητα σε ένα πραγματικό περιβάλλον (Hull, 2009).

Ας υποθέσουμε ότι p^* είναι η πιθανότητα ανοδικής κίνησης της τιμής της μετοχής σε ένα πραγματικό περιβάλλον και p η ίδια πιθανότητα αλλά σε ένα περιβάλλον ουδέτερου κινδύνου, όπως φαίνεται στο γράφημα 10. Ορίζεται επίσης η μεταβλητή μ ως η αναμενόμενη απόδοση στο πραγματικό περιβάλλον. Τότε πρέπει

$$p^* u + (1 - p^*) d = e^{\mu \Delta t}$$

ή

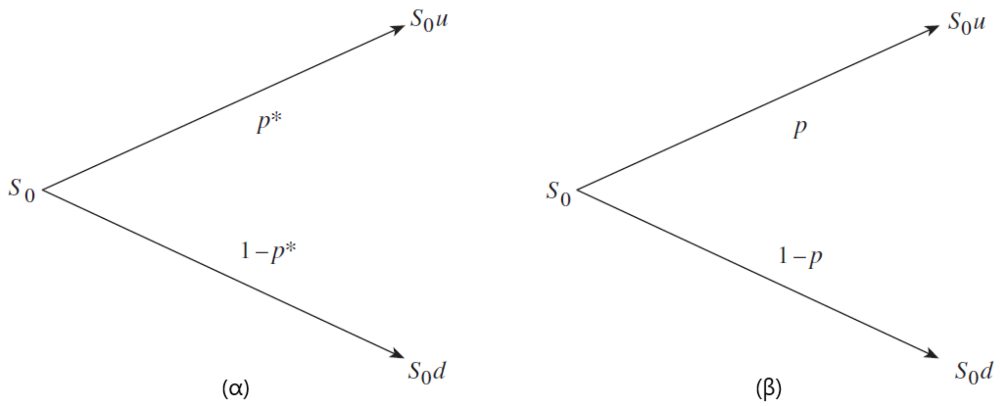
$$p^* = \frac{e^{\mu \Delta t} - d}{u - d} \qquad (\mathbf{3.14})$$

Έστω ότι η μεταβλητότητα στο πραγματικό περιβάλλον είναι σ. Η εξίσωση που μας δίνει τη διασπορά είναι ίδια με την (3.12), με το p^* στη θέση του p. Αν αυτή αντικατασταθεί στην (3.14), τότε

$$e^{\mu\Delta t}(u+d) - ud - e^{2\mu\Delta t} = \sigma^2 \Delta t$$

Η παραπάνω εξίσωση θα είναι ίδια με την εξίσωση (3.13), αν το r αντικατασταθεί με μ. Όταν οι τιμές των Δt^2 και άλλων μεγαλύτερων δυνάμεων της Δt δε λαμβάνονται υπόψη, η παραπάνω έχει τις ίδιες λύσεις με την (3.13), δηλαδή

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \text{ και } d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

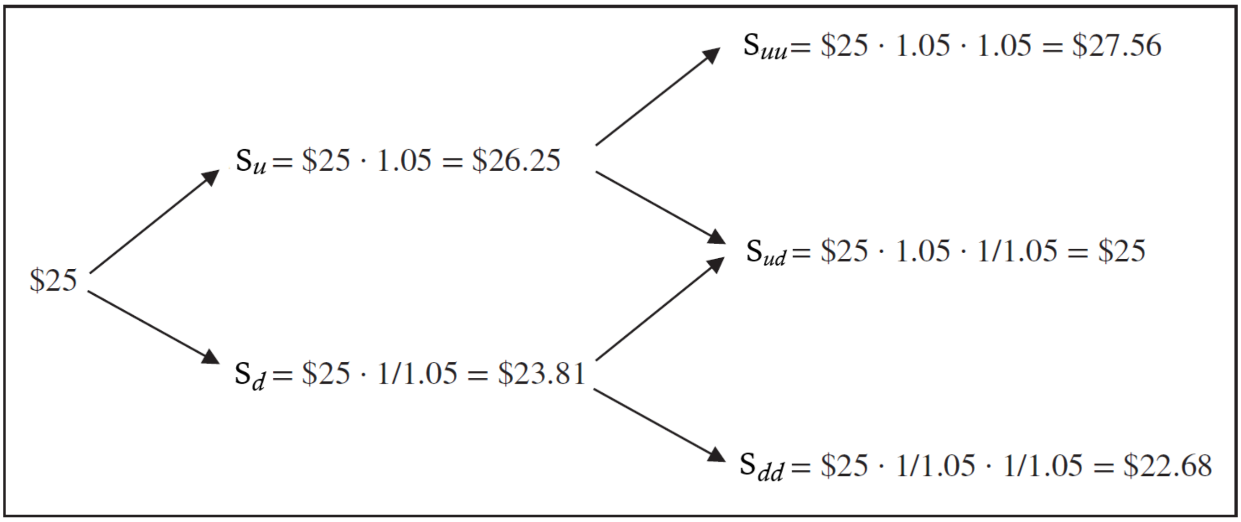


Πηγή: Hull (2009)

Γράφημα 10. Μεταβολή της τιμής της μετοχής σε χρονικό διάστημα Δt: (α) σε πραγματικό περιβάλλον, (β) σε περιβάλλον ουδέτερου κινδύνου

Έστω ένα δικαίωμα πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου με τιμή εξάσκησης 26€ και διάρκεια ζωής $T = 1$ έτος, με υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο αξίας $S_0 = 25$€ (Gottesman, 2016). Το συνεχώς ανατοκιζόμενο επιτόκιο μηδενικού κινδύνου είναι $r = 4\%$, η μεταβλητότητα του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου είναι $\sigma = 6.9\%$ και θέλουμε να αποτιμήσουμε το δικαίωμα προαίρεσης στο τέλος δύο περιόδων ($n = 2$). Υποθέτουμε επίσης ότι η πιθανότητα ανοδικής κίνησης της τιμής του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου είναι $U = e^{6,9\%\sqrt{1/2}} = 1.05$ και $D = 1/1.05$, ενώ $\omega = \frac{e^{4\%\times 1/2} - 1/1.05}{e^{6,9\%\sqrt{1/2}} - 1/1.05} = 0.6947$.

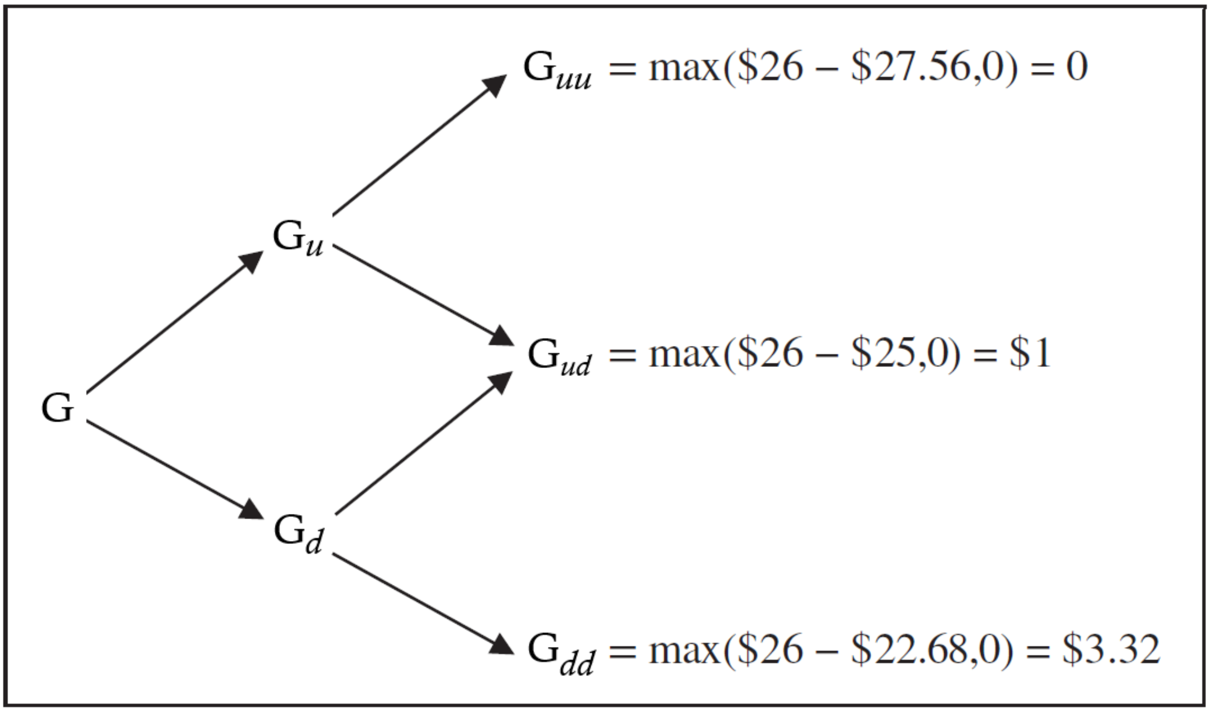
Αρχικά κατασκευάζεται το διωνυμικό δέντρο προκειμένου αναγνωριστούν οι πιθανές τιμές του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου κατά την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος (Γράφημα 11).



Πηγή: Gottesman (2016)

Γράφημα 11. Πιθανές τιμές υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου κατά την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος πώλησης (διωνυμικό μοντέλο δύο περιόδων)

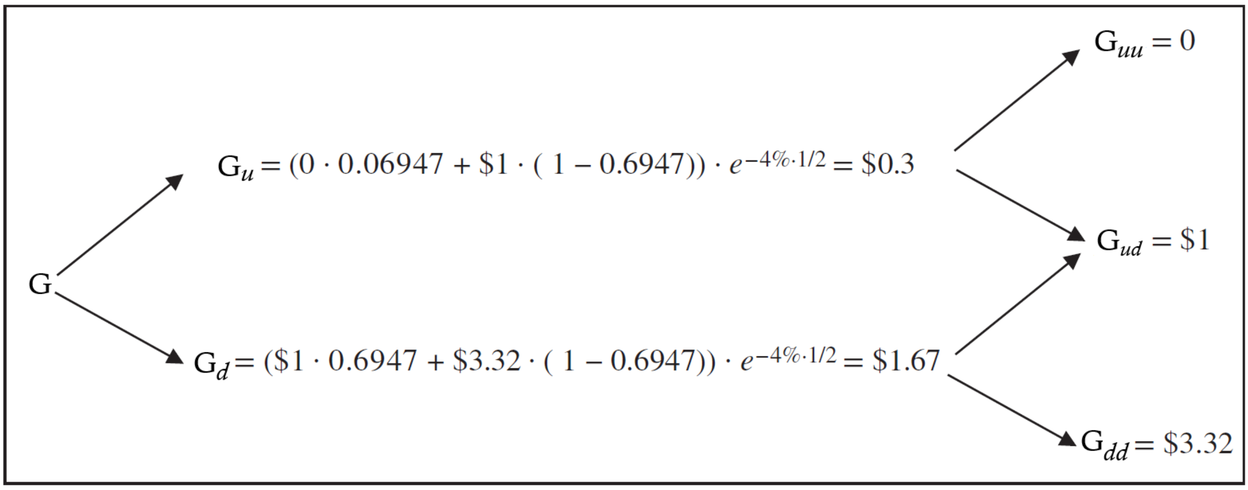
Έπειτα υπολογίζονται οι πληρωμές από το δικαίωμα προαίρεσης για τις πιθανές τιμές του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου κατά την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος, όπου έστω G η πληρωμή από το δικαίωμα πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου (Γράφημα 12).



Πηγή: Gottesman (2016)

Γράφημα 12. Πληρωμή από το δικαίωμα πώλησης για τις πιθανές τιμές του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου κατά την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος (διωνυμικό μοντέλο δύο περιόδων)

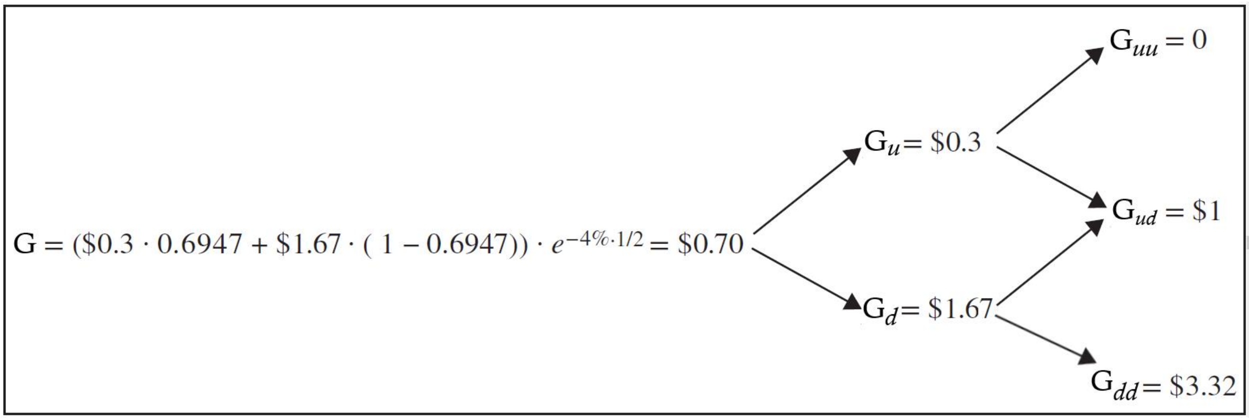
Έπειτα υπολογίζεται η αξία του δικαιώματος στους δύο μεσαίους κόμβους του διωνυμικού δέντρου (Γράφημα 13). Καθώς για κάθε έναν από τους δύο μεσαίους κόμβους υπάρχουν δύο πιθανές πληρωμές στην περίοδο που ακολουθεί, μπορεί να χρησιμοποιηθεί το διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου για τον υπολογισμό της αξίας του δικαιώματος σε αυτούς τους κόμβους.



Πηγή: Gottesman (2016)

Γράφημα 13. Αξία του δικαιώματος πώλησης στους δύο μεσαίους κόμβους (διωνυμικό μοντέλο δύο περιόδων)

Τέλος υπολογίζεται η αξία του δικαιώματος πώλησης στο χρόνο $t = 0$ (Γράφημα 14). Όπως και στο προηγούμενο βήμα, για τον αρχικό κόμβο υπάρχουν δύο διαφορετικές αξίες στην επόμενη περίοδο, συνεπώς με χρήση του διωνυμικού μοντέλου μιας περιόδου μπορεί να υπολογιστεί η αξία του.



Πηγή: Gottesman (2016)

Γράφημα 14. Αποτίμηση δικαιώματος πώλησης (διωνυμικό μοντέλο δύο περιόδων)

3.6. Διωνυμικό δέντρο πολλαπλών περιόδων

Από τα παραπάνω αποτελέσματα συμπεραίνουμε ότι όταν η διάρκεια μιας περιόδου σε ένα διωνυμικό δέντρο είναι Δt, για να υπολογιστεί η μεταβλητότητα ορίζουμε (Hull, 2009)

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \qquad (\mathbf{3.15})$$

και

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \qquad (\mathbf{3.16})$$

Ακόμη, από την εξίσωση (3.6), έχουμε ότι

$$p = \frac{a-d}{u-d} \qquad (\mathbf{3.17})$$

όπου

$$a = e^{r\Delta t} \qquad (\mathbf{3.18})$$

Οι εξισώσεις (3.15)-(3.18) ορίζουν ένα διωνυμικό δέντρο. Το παραπάνω διωνυμικό μοντέλο είναι αρκετά απλό και ένας αναλυτής θα εισέπραττε μια ανεπαρκής προσέγγιση για την τιμή ενός δικαιώματος προαίρεσης, αν θεωρούσε ότι οι μεταβολές της τιμής της μετοχής κατά τη διάρκεια ζωής ενός δικαιώματος μπορούν να αποτυπωθούν με ένα διωνυμικό δέντρο μίας ή δύο περιόδων. Στην πράξη, για τον υπολογισμό της τιμής ενός δικαιώματος προαίρεσης, η διάρκεια ζωής του διαιρείται συνήθως σε 30 ή περισσότερες περιόδους, όπου σε κάθε περίοδο θεωρείται ότι υπάρχουν δύο πιθανές κινήσεις της τιμής της μετοχής. Με 30 περιόδους και συνεπώς 31 τελικές τιμές της μετοχής, υπάρχουν 2^{30} ή αλλιώς περίπου 1 δισεκατομμύριο διαφορετικά μονοπάτια των τιμών της μετοχής (Hull, 2009). Όσο ο αριθμός των περιόδων αυξάνεται (έτσι ώστε μειώνεται η διάρκεια Δt της περιόδου), το διωνυμικό μοντέλο κάνει τις ίδιες υποθέσεις με το μοντέλο Black-Scholes-Merton και όπως θα δούμε παρακάτω, όταν το διωνυμικό μοντέλο χρησιμοποιείται για την αποτίμηση ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος προαίρεσης, η τιμή που δίνει συγκλίνει προς την τιμή που δίνει το μοντέλο Black-Scholes-Merton για την αποτίμησή του, όπως ήταν αναμενόμενο, καθώς οι περίοδοι του διωνυμικού μοντέλου αυξάνονται (Pirie, 2017). Ουσιαστικά το μέγεθος της κάθε περιόδου είναι ίσο με τη διάρκεια ζωής T του δικαιώματος προαίρεσης σε χρόνια, διαιρούμενο με τον επιθυμητό αριθμό περιόδων n, δηλαδή T/n (Gottesman, 2016). Με χρήση μαθηματικών, η εξίσωση (3.2) δύναται να μετατραπεί σε εξίσωση ανάλογη της (3.10) για διωνυμικά μοντέλα n-περιόδων (Peters, 2016):

$$f = e^{-nr\Delta t}\left[\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{n!}{j!\,(n-j)!}\right) \times p^{j} \times (1-p)^{n-j} \times max\left[0, u^{j} \times d^{n-j} \times S_0 - K\right]\right]$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: Στοχαστική Ανάλυση

4.1. Εισαγωγή

Κάθε μεταβλητή της οποίας οι τιμές μεταβάλλονται ακανόνιστα με το πέρασμα του χρόνου λέγεται ότι ακολουθεί μια στοχαστική διαδικασία (Cuthbertson et al., 2020). Οι στοχαστικές διαδικασίες διακρίνονται σε διακριτού και συνεχούς χρόνου. Μια στοχαστική διαδικασία διακριτού χρόνου είναι μια διαδικασία κατά την οποία η τιμή μιας μεταβλητής μπορεί να μεταβληθεί μόνο σε συγκεκριμένες στιγμές σε ένα χρονικό διάστημα, ενώ σε μια στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου η τιμή της μεταβλητής δύναται να μεταβάλλεται οποιαδήποτε στιγμή. Οι στοχαστικές διαδικασίες κατηγοριοποιούνται και ως προς το είδος της μεταβλητής, σε στοχαστικές διαδικασίες συνεχούς και διακριτής μεταβλητής (Hull, 2009). Σε μια διαδικασία συνεχούς μεταβλητής, η υποκείμενη μεταβλητή μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή από ένα συγκεκριμένο εύρος τιμών, ενώ σε μια διαδικασία διακριτής μεταβλητής, αυτή μπορεί να πάρει μόνο συγκεκριμένες (διακριτές) τιμές.

4.2. Διαδικασία Wiener και ιδιότητα Markov

Μια διαδικασία Wiener, γνωστή και ως κίνηση κατά Brown, χρησιμοποιείται για να περιγράψει τη στοχαστική διαδικασία ή αλλιώς τη μεταβλητότητα των τιμών των μετοχών (Peters, 2016). Μια μεταβλητή z ακολουθεί μια διαδικασία Wiener όταν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

1. Η μεταβολή Δz σε μια μικρή χρονική περίοδο Δt είναι

$$\Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t} \qquad (\mathbf{4.1})$$

όπου ε ακολουθεί την κανονική κατανομή $\varphi(0,1)$.

2. Οι τιμές της Δz για οποιεσδήποτε δύο μικρές χρονικές περιόδους Δt είναι ανεξάρτητες.

Από την πρώτη ιδιότητα έπεται ότι η μεταβολή Δz ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 0, τυπική απόκλιση $\sqrt{\Delta t}$ και διασπορά Δt (Cuthbertson et al., 2020). Η δεύτερη ιδιότητα υποδεικνύει ότι η μεταβλητή z ακολουθεί μια διαδικασία κατά Markov. Η διαδικασία Markov αποτελεί ένα συγκεκριμένο είδος στοχαστικής διαδικασίας, όπου μόνο η τρέχουσα τιμή μιας μεταβλητής είναι ικανή να προβλέψει μελλοντικές τιμές της (Peters, 2016). Το παρελθόν της μεταβλητής και το πώς από αυτό εξελίχθηκε στην τρέχουσα κατάσταση της μεταβλητής αποτελούν μη αναγκαίες πληροφορίες. Ισχυρίζεται συχνά ότι οι τιμές των μετοχών ακολουθούν την διαδικασία Markov. Η ιδιότητα Markov που ακολουθούν οι τιμές των μετοχών συμφωνεί με τον ορισμό της ασθενούς αποτελεσματικότητας της αγοράς (weak form market efficiency), ότι οι τιμές των μετοχών ενσωματώνουν το σύνολο της πληροφορίας που μπορεί να αντληθεί από την ιστορική ανέλιξη της τιμής τους. Η μη ύπαρξη της ασθενούς μορφής αποτελεσματικότητας της αγοράς θα επέτρεπε τη χρήση διαγραμμάτων των ιστορικών τιμών και τεχνικής ανάλυσης για την πρόβλεψη της μελλοντικής τιμής των μετοχών. Η αποτελεσματικότητα της αγοράς και κατ’ επέκταση η ιδιότητα Markov οφείλονται στις συναλλαγές των επενδυτών που συμμετέχουν σε αυτή. Μέσω αυτών των συναλλαγών, η διαθέσιμη πληροφορία ενσωματώνεται στις τιμές των μετοχών και οποιαδήποτε απόκλισή τους εξαφανίζεται (B.G. Malkiel, 2001).

Ας υποθέσουμε τη μεταβολή της τιμής μιας μεταβλητής z σε ένα σχετικά μεγάλο χρονικό διάστημα T, η οποία υπολογίζεται ως $z(T) - z(0)$ (Hull, 2009). Η μεταβολή αυτή μπορεί να οριστεί και ως το άθροισμα των μεταβολών της τιμής της z σε N χρονικές περιόδους διάρκειας Δt, όπου

$$N = \frac{T}{\Delta t}$$

Συνεπώς ισχύει ότι

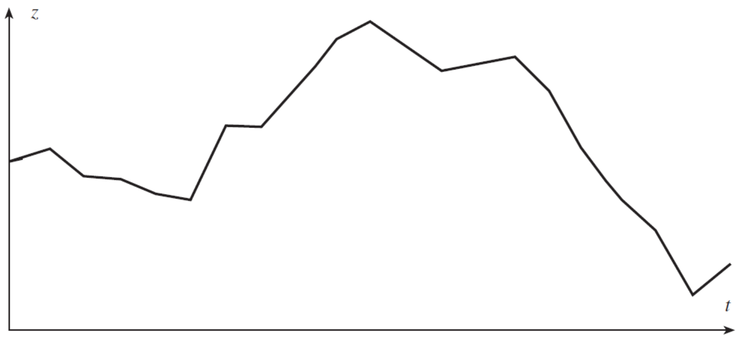
$$z(T) - z(0) = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \sqrt{\Delta t} \qquad (\mathbf{4.2})$$

όπου ε_i $(\mathrm{i} = 0,1,2 \dots, \mathrm{N})$ ακολουθούν κανονική κατανομή $\varphi(0,1)$. Από τη δεύτερη ιδιότητα που πρέπει να πληρείται ώστε η μεταβλητή να ακολουθεί μια διαδικασία Wiener γνωρίζουμε ότι οι ε_i είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Από την εξίσωση (4.2), η μεταβολή $z(T) - z(0)$ ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 0, διασπορά $N\Delta t = T$ και τυπική απόκλιση $\sqrt{T}$.

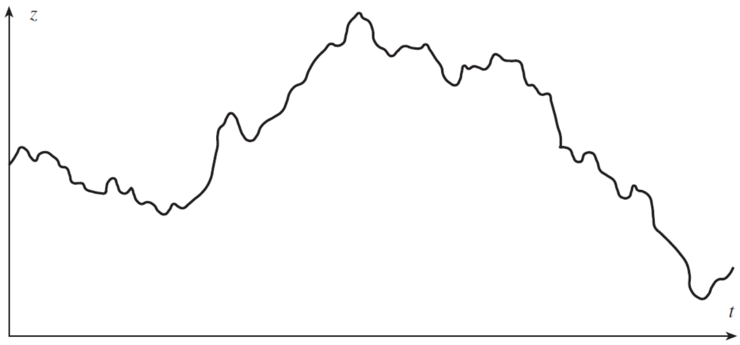
Σύμφωνα με τον Απειροστικό Λογισμό και όσον αφορά τη μεταβλητή z, η μεταβολή της τιμής της θα συγκλίνει σε μια τιμή όσο οι μεταβολές μεταξύ χρονικών περιόδων τείνουν στο 0 (Hull, 2009). Ο συμβολισμός $dx = adt$ θα υπονοεί ότι $\Delta x = a\Delta t$ καθώς $\Delta t \to 0$. Έτσι η έκφραση ότι η dz ακολουθεί μια διαδικασία Wiener, σημαίνει ότι αυτή ικανοποιεί τις ιδιότητες της διαδικασίας Wiener που αναφέρθηκαν παραπάνω, δεδομένης μιας μεταβλητής Δz, όταν $\Delta t \to 0$. Στο γράφημα 15 απεικονίζεται το μονοπάτι που ακολουθεί η μεταβλητή z καθώς $\Delta t \to 0$. Παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση της διαδρομής της μεταβλητής z είναι οδοντωτή.

Αυτή η γραφική παράσταση οφείλεται στο ότι η τυπική απόκλιση της μεταβλητής z σε χρόνο Δt ισούται με $\sqrt{\Delta t}$ και όταν το Δt είναι μικρό, το $\sqrt{\Delta t}$ είναι πολύ μεγαλύτερο από το Δt. Δύο ιδιότητες της διαδικασίας Wiener σχετικά με την συμπεριφορά που αναφέρθηκε παραπάνω για το $\sqrt{\Delta t}$ είναι οι εξής:

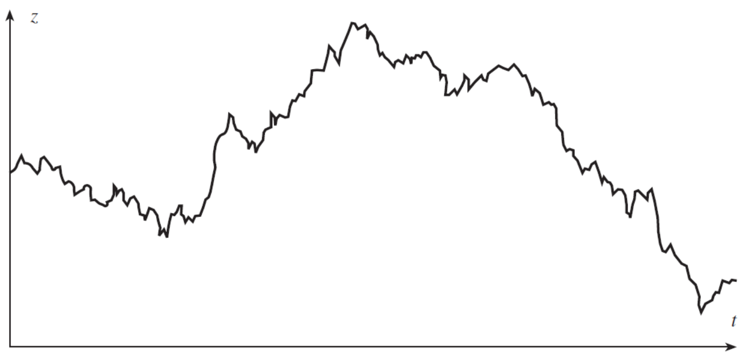
1. Το αναμενόμενο μήκος του μονοπατιού μιας μεταβλητής z σε οποιοδήποτε χρονικό διάστημα είναι άπειρο.
2. Το αναμενόμενο πλήθος φορών κατά τις οποίες η μεταβλητή z ισούται με μια τιμή σε οποιοδήποτε χρονικό διάστημα είναι άπειρο.



Μεγάλη τιμή του Δt



Μικρότερη τιμή του Δt



Δt→0

Πηγή: Hull (2009)

Γράφημα 15. Διαδικασία Wiener μεταβλητής z

4.3. Γενικευμένη διαδικασία Wiener

Η μέση τιμή ανά μονάδα χρόνου μιας στοχαστικής διαδικασίας καλείται ποσοστό μεταβολής (drift rate) και η διασπορά ανά μονάδα χρόνου μιας στοχαστικής διαδικασίας καλείται ποσοστό διασποράς (variance rate) (Hull, 2009). Η διαδικασία Wiener, dz, που έχει παρουσιαστεί έως τώρα έχει ποσοστό μεταβολής 0 και ποσοστό διασποράς ίσο με 1. Το μηδενικό ποσοστό μεταβολής σημαίνει ότι η αναμενόμενη τιμή της μεταβλητής z σε οποιαδήποτε μελλοντική στιγμή ισούται με την τρέχουσα τιμή της. Το ποσοστό διασποράς, η τιμή του οποίου είναι 1, υπονοεί ότι η διασπορά της μεταβολής της τιμής της z σε ένα χρονικό διάστημα διάρκειας T ισούται με T. Η γενικευμένη διαδικασία Wiener για μια μεταβλητή x ορίζεται με όρους dz ως

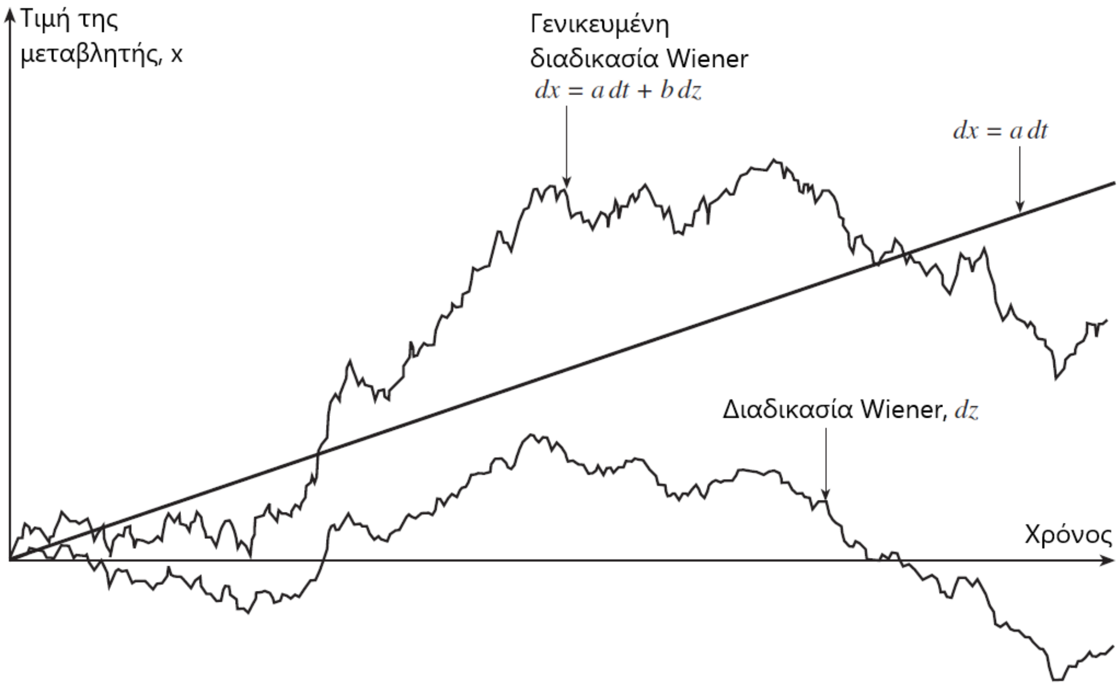
$$dx = adt + bdz \qquad (\mathbf{4.3})$$

όπου a, b σταθερές.

Ο όρος adt στο δεύτερο μέλος της εξίσωσης (4.3) δηλώνει ότι η μεταβλητή x έχει ένα αναμενόμενο ποσοστό μεταβολής a ανά μονάδα χρόνου. Ο όρος bdz στο δεύτερο μέλος της εξίσωσης (4.3) λέγεται ότι προσθέτει μεταβλητότητα στο μονοπάτι που ακολουθεί η μεταβλητή x (Peters, 2016). Το μέγεθος αυτής της μεταβλητότητας είναι b φορές μια διαδικασία Wiener. Καθώς μια διαδικασία Wiener έχει ποσοστό διασποράς ίσο με 1, μια διαδικασία b φορές μια διαδικασία Wiener θα έχει ποσοστό διασποράς ανά μονάδα χρόνου ίσο με b^2. Σε ένα χρονικό διάστημα Δt, η μεταβολή Δx της τιμής της μεταβλητής x δίνεται από τις εξισώσεις (4.1) και (4.3) ως

$$\Delta x = a\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

όπου ε ακολουθεί κανονική κατανομή $\varphi(0,1)$. Έτσι η Δx ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $a\Delta t$, τυπική απόκλιση $b\sqrt{\Delta t}$ και διασπορά $b^2\Delta t$. Με επιχειρήματα παρόμοια με αυτά που χρησιμοποιήσαμε για τη διαδικασία Wiener, αποδεικνύεται ότι η μεταβολή της τιμής της μεταβλητής x σε οποιοδήποτε χρονικό διάστημα T κατανέμεται κανονικά με μέση τιμή aT, τυπική απόκλιση $b\sqrt{T}$ και διασπορά b^2T (Hull, 2009). Συνοψίζοντας, μια γενικευμένη διαδικασία Wiener που δίνεται από την εξίσωση (4.3) έχει αναμενόμενο ποσοστό μεταβολής (μέσο ποσοστό μεταβολής ανά μονάδα χρόνου) ίσο με a και ποσοστό διασποράς (διασπορά ανά μονάδα χρόνου) ίσο με b^2. Η γραφική απεικόνιση μιας διαδικασίας Wiener με $a = 0{,}3$ και $b = 1{,}5$ παρουσιάζεται στο γράφημα 16.



Πηγή: Hull (2009)

Γράφημα 16. Γενικευμένη διαδικασία Wiener με $a = 0{,}3$ και $b = 1{,}5$

4.4. Διαδικασία του Itô

Μια άλλη μορφή στοχαστικής διαδικασίας που μπορεί να οριστεί είναι η διαδικασία του Itô. Αποτελεί μια γενικευμένη διαδικασία Wiener, στην οποία οι παράμετροι a και b είναι συναρτήσεις της τιμής της μεταβλητής x και του χρόνου t (Peters, 2016). Έτσι μια διαδικασία Itô μπορεί να διατυπωθεί ως

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz \qquad (\mathbf{4.4})$$

Τόσο το αναμενόμενο ποσοστό μεταβολής όσο και το ποσοστό διασποράς μιας διαδικασίας Itô υπόκεινται σε αλλαγές με την πάροδο του χρόνου. Σε ένα μικρό χρονικό διάστημα μεταξύ t και $t + \Delta t$, οι μεταβλητές αλλάζουν από x σε $x + \Delta x$, όπου

$$\Delta x = a(x,t)\Delta t + b(x,t)\epsilon\sqrt{\Delta t}$$

Στην παραπάνω εξίσωση γίνεται η παραδοχή ότι, τα ποσοστά μεταβολής και διασποράς της μεταβλητής x παραμένουν σταθερά και ίσα με τις αρχικές τιμές τους στο χρόνο t, κατά τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος από t έως $t + \Delta t$. Επισημαίνεται ότι η διαδικασία της εξίσωσης (4.4) είναι μια κατά Markov διαδικασία, καθώς η αλλαγή της μεταβλητής x σε χρόνο

t εξαρτάται μόνο από την τιμή της μεταβλητής x στο χρόνο t και όχι από παρελθοντικές της τιμές (Hull, 2009).

Δύναται να ισχυριστεί ότι η τιμή μιας μετοχής ακολουθεί μια γενικευμένη διαδικασία Wiener, καθώς έχει σταθερό αναμενόμενο ποσοστό μεταβολής και σταθερό ποσοστό διασποράς (Hull, 2009). Ο ισχυρισμός αυτός όμως δε λαμβάνει υπόψιν του ένα σημαντικό χαρακτηριστικό της τιμής μιας μετοχής, ότι το ποσοστό της αναμενόμενης απόδοσης που αναμένεται από τους επενδυτές για μια μετοχή είναι ανεξάρτητο από την τιμή της μετοχής. Για το λόγο αυτό, η υπόθεση ότι η τιμή μιας μετοχής ακολουθεί τη γενικευμένη διαδικασία Wiener, επειδή έχει σταθερό αναμενόμενο ποσοστό μεταβολής θα πρέπει να αντικατασταθεί από την υπόθεση ότι η αναμενόμενη απόδοση (αναμενόμενο ποσοστό μεταβολής διαιρούμενο με την τιμή της μετοχής) είναι σταθερή. Αν η τιμή της μετοχής είναι S μια χρονική στιγμή t, τότε το αναμενόμενο ποσοστό μεταβολής της S πρέπει να είναι μS, όπου μ μια σταθερή παράμετρος. Τότε, σε ένα μικρό χρονικό διάστημα Δt, η αναμενόμενη αύξηση της τιμής S θα είναι $\mu S \Delta t$ όπου η παράμετρος μ είναι το αναμενόμενο ποσοστό απόδοσης της μετοχής. Αν ο συντελεστής της dz είναι 0, ώστε να μην υπάρχει αβεβαιότητα, τότε από το συγκεκριμένο μοντέλο έπεται ότι

$$\Delta S = \mu S \Delta t$$

Όταν $\Delta t \to 0$, τότε

$$dS = \mu S dt$$

ή

$$\frac{dS}{dt} = \mu dt$$

Ολοκληρώνοντας από το χρόνο 0 έως το χρόνο T, έχουμε ότι

$$S_T = S_0 e^{\mu T} \qquad (\mathbf{4.5})$$

όπου S_0 και S_T οι τιμές της μετοχής στους χρόνους 0 και T αντίστοιχα. Η εξίσωση (4.5) δείχνει ότι, όταν δεν υπάρχει αβεβαιότητα, η τιμή της μετοχής αυξάνεται με ένα συνεχώς ανατοκιζόμενο επιτόκιο μ ανά μονάδα χρόνου. Σε πραγματικό περιβάλλον αυτή η αβεβαιότητα υπάρχει, καθώς η μεταβλητότητα της απόδοσης σε ένα μικρό χρονικό διάστημα Δt είναι η ίδια, ανεξαρτήτως της τιμής της μετοχής. Για το λόγο αυτό προτείνεται η τυπική απόκλιση της μεταβολής, σε ένα μικρό χρονικό διάστημα Δt, να είναι ανάλογη της τιμής της μετοχής, οδηγώντας στο μοντέλο

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

ή

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz \qquad (\mathbf{4.6})$$

Η εξίσωση (4.6) αποτελεί την πιο διαδεδομένη μέθοδο για τη μελέτη της συμπεριφοράς των τιμών των μετοχών. Η μεταβλητή μ είναι η αναμενόμενη απόδοση της μετοχής. Η μεταβλητή σ είναι η μεταβλητότητα της τιμής της μετοχής. Η μεταβλητή σ^2 αναφέρεται ως το ποσοστό διασποράς. Σε ένα περιβάλλον ουδέτερου κινδύνου, η μεταβλητή μ ισούται με το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου. Το μοντέλο που περιγράφηκε παραπάνω για τη συμπεριφορά της τιμής της μετοχής αποτελεί μια Γεωμετρική κίνηση Brown (Γράφημα 17). Η εκδοχή του παραπάνω μοντέλου σε διακριτό χρόνο παίρνει τη μορφή

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t} \qquad (\mathbf{4.7})$$

ή

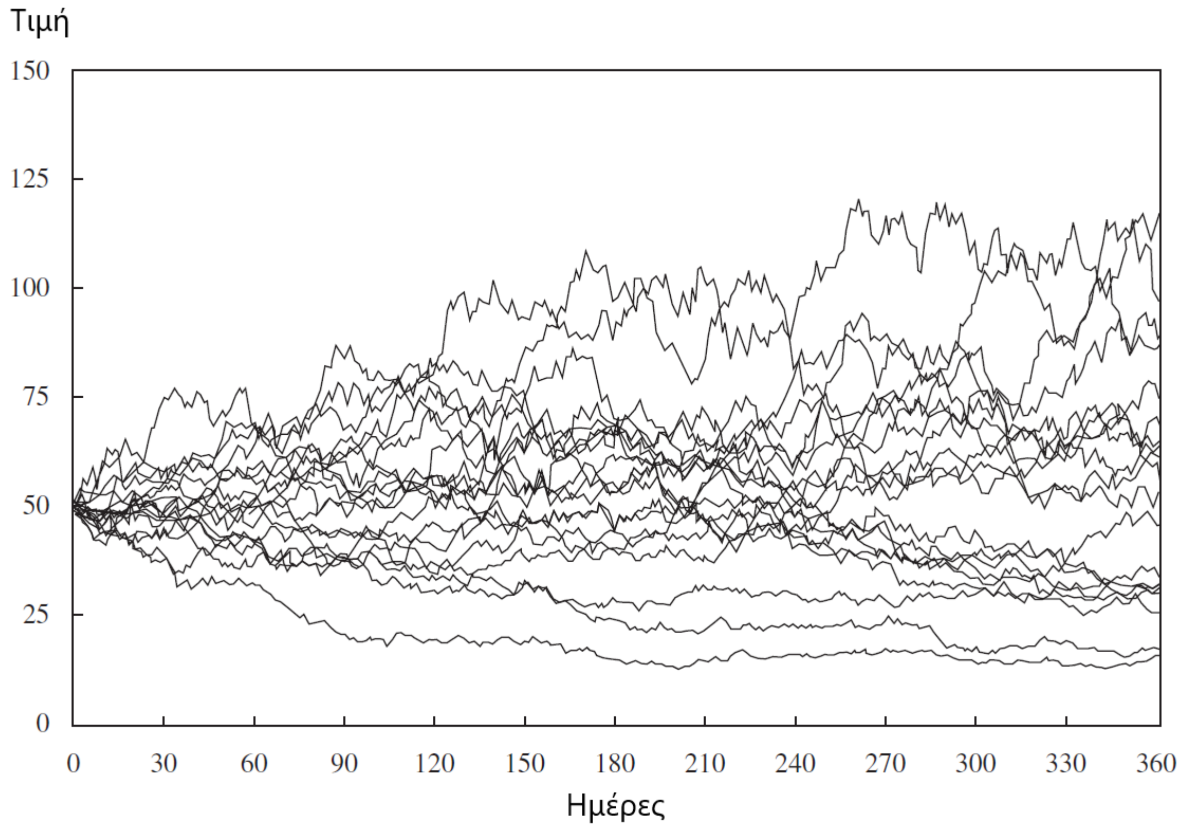
$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \varepsilon \sqrt{\Delta t} \qquad (\mathbf{4.8})$$

Η μεταβλητή ΔS δηλώνει την αλλαγή στην τιμή S της μετοχής σε ένα μικρό χρονικό διάστημα Δt και το ε ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διασπορά 1. Η παράμετρος μ δηλώνει την αναμενόμενη απόδοση ανά μονάδα χρόνου από τη μετοχή. Η παράμετρος σ δηλώνει τη μεταβλητότητα της τιμής της μετοχής (Hull, 2009). Στην παρούσα παράγραφο υποθέτουμε ότι οι παράμετροι αυτοί είναι σταθερές. Το πρώτο μέλος της εξίσωσης (4.7) αποτελεί τη διακριτή προσέγγιση για την απόδοση της μετοχής σε ένα σύντομο χρονικό διάστημα Δt. Ο όρος $\mu \Delta t$ είναι η αναμενόμενη τιμή της απόδοσης, ενώ ο όρος $\sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}$ είναι η στοχαστική συνιστώσα της απόδοσης. Η διασπορά της στοχαστικής συνιστώσας και συνεπώς η διασπορά της απόδοσης, είναι $\sigma^2 \Delta t$. Η εξίσωση (4.7) δείχνει ότι το $\Delta S/S$ ακολουθεί προσεγγιστικά μια κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu \Delta t$ και τυπική απόκλιση $\sigma \sqrt{\Delta t}$, δηλαδή

$$\frac{\Delta S}{S} \sim \varphi(\mu \Delta t, \sigma^2 \Delta t) \qquad (\mathbf{4.9})$$

Στη διαδικασία που περιγράφηκε για τη μελέτη της συμπεριφοράς της τιμής μιας μετοχής, χρησιμοποιήθηκαν δύο παράμετροι, οι μ και σ. Η παράμετρος μ είναι η ετήσια αναμενόμενη απόδοση που απολαμβάνει ο επενδυτής σε ένα σύντομο χρονικό διάστημα Δt (Hull, 2009). Οι περισσότεροι επενδυτές απαιτούν υψηλές αποδόσεις ώστε να είναι διατεθειμένοι να αναλάβουν υψηλότερα ρίσκα. Συνεπώς η τιμή της παραμέτρου μ θα πρέπει να εξαρτάται από το ρίσκο που ενέχει η επένδυση στη μετοχή. Θα πρέπει επίσης να εξαρτάται από τα επίπεδα των επιτοκίων μιας χώρας, καθώς όσο υψηλότερα είναι τα επιτόκια, τόσο υψηλότερες θα είναι και οι αναμενόμενες αποδόσεις για μια μετοχή. Καθώς η τιμή ενός παραγώγου πάνω σε μια μετοχή είναι ανεξάρτητη από την τιμή της παραμέτρου μ, δε θα μας απασχολήσουν οι εξαρτήσεις της παραμέτρου μ που αναφέρθηκαν παραπάνω.

Αντίθετα η παράμετρος σ, δηλαδή η μεταβλητότητα της τιμής της μετοχής, είναι εξαιρετικά σημαντική για τον καθορισμό της τιμής πολλών παραγώγων. Η τυπική απόκλιση της κατά αναλογία μεταβολής της τιμής της μετοχής σε ένα μικρό χρονικό διάστημα Δt είναι $\sigma\sqrt{\Delta t}$. Προσεγγιστικά, η τυπική απόκλιση της κατά αναλογία μεταβολής της τιμής σε ένα σχετικά μεγάλο χρονικό διάστημα T είναι $\sigma\sqrt{T}$. Αυτό σημαίνει ότι ως προσέγγιση η μεταβλητότητα μπορεί να ερμηνευτεί ως η τυπική απόκλιση της μεταβολής της τιμής της μετοχής σε ένα χρόνο.



Πηγή: Pirie (2017)

Γράφημα 17. Γεωμετρική κίνηση Brown ($S = 50, \mu = 3\%, \sigma = 45\%$)

4.5. Λήμμα του Itô

Η τιμή ενός δικαιώματος προαίρεσης πάνω σε μία μετοχή αποτελεί μια συνάρτηση της τιμής της υποκείμενης μετοχής και του χρόνου. Γενικότερα μπορεί να ισχυριστεί ότι η τιμή οποιουδήποτε παραγώγου αποτελεί μια συνάρτηση των μεταβλητών που συμμετέχουν σε μια στοχαστική διαδικασία και υπόκεινται στο παράγωγο και στο χρόνο (Cuthbertson et al., 2020). Μια συνεισφορά για την κατανόηση της συμπεριφοράς τέτοιων συναρτήσεων αποτελεί το αποτέλεσμα της έρευνας στον τομέα αυτό από τον μαθηματικό Κ. Itô το 1951, γνωστό και ως Λήμμα του Itô.

Ας υποθέσουμε ότι η τιμή μιας μεταβλητής x ακολουθεί τη διαδικασία Itô

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz \qquad \mathbf{(4.10)}$$

όπου dz είναι μια διαδικασία Wiener και οι a, b συναρτήσεις των x και t. Η μεταβλητή x έχει ποσοστό μεταβολής a και ποσοστό διασποράς b^2. Το Λήμμα του Itô δείχνει ότι μια συνάρτηση G εξαρτώμενη από x και t ακολουθεί τη διαδικασία

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial x}bdz \qquad \mathbf{(4.11)}$$

όπου το dz είναι η ίδια διαδικασία Wiener με αυτή της εξίσωσης (4.10). Συνεπώς και η συνάρτηση G ακολουθεί τη διαδικασία Itô, με ποσοστό μεταβολής

$$\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2$$

και ποσοστό διασποράς

$$(\frac{\partial G}{\partial x})^2 b^2$$

Στην παράγραφο 4.4 δείξαμε πως το μοντέλο

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \qquad \mathbf{(4.12)}$$

με παραμέτρους μ και σ χρησιμοποιείται για τη μελέτη της συμπεριφοράς της τιμής μιας μετοχής. Από το Λήμμα του Itô προκύπτει ότι η διαδικασία που ακολουθείται από μια συνάρτηση G της τιμής της μετοχής S και του χρόνου t είναι (Wang, 2020)

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial S}\mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial S}\sigma S dz \qquad \mathbf{(4.13)}$$

Παρατηρούμε ότι τόσο η G όσο και η S επηρεάζονται από τον ίδιο βαθμό αβεβαιότητας, dz, γεγονός που επηρεάζει σημαντικά τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τη μέθοδο των Black-Scholes-Merton.

4.6. Λογαριθμική ιδιότητα

Μέσω του Λήμματος του Itô, παρουσιάζεται η διαδικασία που ακολουθεί η lnS όταν η S ακολουθεί τη διαδικασία της εξίσωσης (4.12). Ορίζοντας

$$G = lnS$$

συνεπάγεται ότι

$$\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S}, \ \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}, \ \frac{\partial G}{\partial t} = 0$$

Τότε από την εξίσωση (4.13) η διαδικασία που ακολουθείται από τη G είναι η

$$dG = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dz \qquad \mathbf{(4.14)}$$

Καθώς οι παράμετροι μ και σ είναι σταθερές, η εξίσωση (4.14) υποδεικνύει ότι η $G = lnS$ ακολουθεί μια γενικευμένη διαδικασία Wiener (Cuthbertson et al., 2020). Έχει σταθερό ποσοστό μεταβολής $\mu - \sigma^2/2$ και σταθερό ποσοστό διασποράς σ^2. Συνεπώς η μεταβολή του lnS σε ένα χρονικό διάστημα μεταξύ 0 και ενός μελλοντικού χρόνου T ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu - \sigma^2/2$ και διασπορά $\sigma^2 T$. Αυτό σημαίνει ότι

$$lnS_T - lnS_0 \sim \varphi\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T, \sigma^2 T\right] \qquad \mathbf{(4.15)}$$

ή

$$lnS_T \sim \varphi\left[lnS_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T, \sigma^2 T\right] \qquad \mathbf{(4.16)}$$

όπου S_T η τιμή της μετοχής στο χρόνο T, S_0 η τιμή της μετοχής στο χρόνο 0 και όπως προηγουμένως $\varphi(m, v)$ μια κανονική κατανομή με μέση τιμή m και διασπορά v. Η εξίσωση (4.16) μας δείχνει ότι η lnS_T κατανέμεται κανονικά. Μια μεταβλητή ακολουθεί λογαριθμική κανονική κατανομή όταν ο φυσικός λογάριθμος της μεταβλητής κατανέμεται κανονικά. Συνεπώς η τιμή μιας μετοχής σε ένα χρόνο T, δεδομένης της τιμής της σήμερα, ακολουθεί λογαριθμική κανονική κατανομή και η τυπική απόκλιση του λογαρίθμου της τιμής της μετοχής είναι $\sigma\sqrt{T}$ (Hull, 2009).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: Το μοντέλο των Black-Scholes-Merton

5.1. Εισαγωγή

Στις αρχές του 1970 οι Fischer Black, Myron Scholes και Robert Merton έκαναν μια σημαντική ανακάλυψη όσον αφορά την αποτίμηση Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων προαίρεσης γραμμένα σε μετοχές (Hull, 2009). Το μοντέλο που ανέπτυξαν άσκησε μεγάλη επιρροή στον τρόπο με τον οποίο οι συμμετέχοντες στην αγορά αντάλλασσαν παράγωγα και τα χρησιμοποιούσαν για αντιστάθμιση του κινδύνου. Το 1997 η σπουδαιότητα του μοντέλου αναγνωρίστηκε, όταν οι Myron Scholes και Robert Merton βραβεύτηκαν με το βραβείο Νόμπελ στον τομέα των οικονομικών. Δυστυχώς ο Fischer Black απεβίωσε το 1995, διαφορετικά θα ήταν και αυτός συμμετέχων στην απονομή του βραβείου αυτού. Οι Black και Scholes χρησιμοποίησαν το Υπόδειγμα Αποτίμησης Περιουσιακών Στοιχείων (CAPM) προκειμένου να προσδιορίσουν τη σχέση μεταξύ της απαιτούμενης από την αγορά απόδοσης στο δικαίωμα προαίρεσης και την απαιτούμενη απόδοση στη μετοχή, διαδικασία που ήταν αρκετά δύσκολη καθώς η σχέση αυτή εξαρτάται τόσο από την τιμή της μετοχής όσο και από το χρόνο. Η προσέγγιση του Merton ήταν διαφορετική από αυτή των Black και Scholes. Περιελάμβανε το σχηματισμό ενός ακίνδυνου χαρτοφυλακίου αποτελούμενο από το δικαίωμα προαίρεσης και την υποκείμενη σε αυτό μετοχή και την απαίτηση η απόδοση του χαρτοφυλακίου σε ένα μικρό χρονικό διάστημα να ισούται με το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου. Η προσέγγιση αυτή του Merton ήταν πιο γενική από των Black και Scholes, καθώς δε στηριζόταν στις υποθέσεις του Υποδείγματος Αποτίμησης Περιουσιακών Στοιχείων.

5.2. Η λογαριθμική ιδιότητα των τιμών των μετοχής

Το μοντέλο για τη μελέτη της συμπεριφοράς των τιμών μιας μετοχής, το οποίο χρησιμοποιήθηκε από τους Black, Scholes και Merton, μελετήθηκε στο κεφάλαιο 4. Υποθέτει ότι οι επί τοις εκατό μεταβολές στην τιμή μιας μετοχής σε ένα μικρό χρονικό διάστημα ακολουθούν μια κανονική κατανομή (Hull, 2009). Ορίζοντας

μ : Ετήσια αναμενόμενη απόδοση μετοχής

σ : Ετήσια μεταβλητότητα της τιμής της μετοχής η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της απόδοσης σε ένα χρονικό διάστημα Δt ισούνται προσεγγιστικά με $\mu\Delta t$ και $\sigma\sqrt{\Delta t}$, ώστε

$$\frac{\Delta S}{S} \sim \varphi(\mu\Delta t, \sigma^2\Delta t) \qquad (\mathbf{5.1})$$

όπου ΔS η μεταβολή της τιμής S της μετοχής σε χρόνο Δt και $\varphi(m, v)$ κανονική κατανομή με μέση τιμή m και διασπορά v. Όπως δείξαμε και στην παράγραφο 4.6, το μοντέλο υποδεικνύει ότι

$$lnS_T - lnS_0 \sim \varphi\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma^2 T\right]$$

ώστε

$$ln\frac{S_T}{S_0} \sim \varphi\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma^2 T\right] \qquad (\mathbf{5.2})$$

και

$$lnS_T \sim \varphi\left[lnS_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma^2 T\right] \qquad (\mathbf{5.3})$$

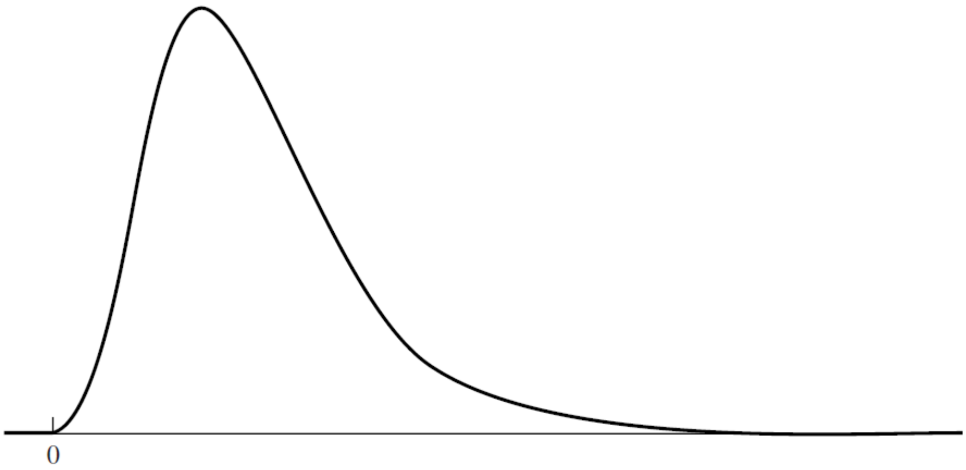
όπου S_T η τιμή της μετοχής σε μια μελλοντική χρονική στιγμή T και S_0 η τιμή της μετοχής τη χρονική στιγμή 0. Η μεταβλητή lnS_T ακολουθεί κανονική κατανομή, ώστε η S_T να ακολουθεί λογαριθμική κανονική κατανομή. Η μέση τιμή της lnS_T είναι $lnS_0 + (\mu - \sigma^2/2)T$ και η τυπική της απόκλιση $\sigma\sqrt{T}$. Μια μεταβλητή η οποία ακολουθεί λογαριθμική κανονική κατανομή μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή από το 0 έως το άπειρο. Στο γράφημα 18 παρουσιάζεται το σχήμα της λογαριθμικής κανονικής κατανομής. Σε αντίθεση με την κανονική κατανομή, η λοξότητα της λογαριθμικής κανονικής κατανομής είναι τέτοια ώστε η μέση τιμή, η διάμεσος και η επικρατούσα τιμή να έχουν διαφορετικές τιμές.

Από την εξίσωση (5.3) και τις ιδιότητες της λογαριθμικής κανονικής κατανομής αποδεικνύεται ότι η αναμενόμενη μέση τιμή $E(S_T)$ της S_T δίνεται από τη σχέση

$$E(S_T) = S_0 e^{\mu T} \qquad (\mathbf{5.4})$$

Η παραπάνω σχέση συμφωνεί με τον ορισμό του μ ως το αναμενόμενο ποσοστό της απόδοσης. Η διασπορά var(S_T) της S_T δίνεται από τη σχέση

$$var(S_T) = {S_0}^2 e^{2\mu T}\left(e^{\sigma^2 T} - 1\right) \qquad (\mathbf{5.5})$$



Πηγή: Hull (2009)

Γράφημα 18. Λογαριθμική κανονική κατανομή

5.3. Η κατανομή του ποσοστού απόδοσης

Η λογαριθμική ιδιότητα των τιμών μιας μετοχής μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την παροχή πληροφοριών σχετικά με την κατανομή πιθανότητας της ετήσιας απόδοσης με συνεχή ανατοκισμό μιας μετοχής στο χρονικό διάστημα από 0 έως T (Hull, 2009).

Αν θέσουμε την ετήσια απόδοση μιας μετοχής με συνεχή ανατοκισμό σε ένα χρονικό διάστημα από 0 έως T ως x, τότε

$$S_T = S_0 e^{xT}$$

ώστε

$$x = \frac{1}{T} ln \frac{S_T}{S_0} \qquad (\mathbf{5.6})$$

Από την εξίσωση (5.2) έπεται ότι

$$x \sim \varphi\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \frac{\sigma^2}{T}\right) \qquad (\mathbf{5.7})$$

Συνεπώς η ετήσια απόδοση μιας μετοχής με συνεχή ανατοκισμό ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu - \sigma^2/2$ και τυπική απόκλιση $\sigma/\sqrt{T}$. Καθώς ο χρόνος T αυξάνεται, η τυπική απόκλιση της x φθίνει.

5.4. Η αναμενόμενη απόδοση

Η αναμενόμενη απόδοση, μ, που απαιτείται από τους επενδυτές από μία μετοχή εξαρτάται από το ρίσκο της μετοχής (Hull, 2009). Όσο μεγαλύτερο το ρίσκο, τόσο μεγαλύτερη και η απαιτούμενη απόδοση. Η αναμενόμενη απόδοση εξαρτάται επίσης και από το επίπεδο των επιτοκίων σε μια οικονομία. Όσο υψηλότερα είναι τα επιτόκια, τόσο υψηλότερη θα είναι και η αναμενόμενη απόδοση που απαιτείται από μία μετοχή. Καθώς η αξία ενός δικαιώματος προαίρεσης πάνω σε μία μετοχή, όταν εκφράζεται υπό την έννοια της αξίας της υποκείμενης μετοχής δεν εξαρτάται από το μ, δε θα δοθεί περαιτέρω έμφαση στους παράγοντες που επηρεάζουν την αναμενόμενη απόδοση μ. Παρόλα αυτά, ένα χαρακτηριστικό της αναμενόμενης απόδοσης συχνά προκαλεί σύγχυση και είναι αναγκαίο να εξηγηθεί.

Το μοντέλο που αναπτύχθηκε για τη μελέτη της συμπεριφοράς τιμών μιας μετοχής υπονοεί ότι σε ένα μικρό χρονικό διάστημα, η μέση απόδοση είναι $\mu\Delta t$ (Hull, 2009). Είναι εύκολο να υποτεθεί ότι μ είναι και η ετήσια απόδοση μιας μετοχής με συνεχή ανατοκισμό, μια υπόθεση που δεν είναι αληθής. Η ετήσια απόδοση μιας μετοχής με συνεχή ανατοκισμό, x, η οποία απολαμβάνεται σε μια χρονική περίοδο διάρκειας T, δίνεται από την εξίσωση (5.6) ως

$$x = \frac{1}{T} ln \frac{S_T}{S_0}$$

και όπως υποδεικνύεται από την εξίσωση (5.7), η μέση τιμή $E(x)$ του x είναι $\mu - \sigma^2/2$. Ο λόγος που η ετήσια απόδοση μιας μετοχής με συνεχή ανατοκισμό είναι διαφορετική από το μ είναι ανεπαίσθητος, αλλά αρκετά σημαντικός. Ας υποθέσουμε ένα μεγάλο αριθμό μικρών χρονικών διαστημάτων διάρκειας Δt. Ορίζουμε ως S_i την τιμή της μετοχής στο τέλος του i-οστού χρονικού διαστήματος και ως ΔS_i τη διαφορά $S_{i+1} - S_i$. Σύμφωνα με τις υποθέσεις που κάνουμε για τη συμπεριφορά της τιμής της μετοχής, ο μέσος όρος των αποδόσεων της μετοχής σε κάθε χρονικό διάστημα είναι αρκετά κοντά στο μ. Με άλλα λόγια, το $\mu\Delta t$ είναι αρκετά κοντά στον αριθμητικό μέσο όρο του $\Delta S_i/S_i$. Ωστόσο, η αναμενόμενη απόδοση στη συνολική περίοδο, όταν η περίοδος ανατοκισμού είναι Δt, είναι πιο κοντά στο $\mu - \sigma^2/2$ και όχι στο μ.

Μια διαφορετική προσέγγιση για την εξήγηση του παραπάνω φαινομένου παρατίθεται, ξεκινώντας από την εξίσωση (5.4):

$$E(S_T) = S_0 e^{\mu T}$$

και λογαριθμίζοντας, καταλήγουμε στην εξίσωση

$$ln[E(S_T)] = \ln(S_0) + \mu T$$

Καθώς $ln[E(S_T)] = E[ln(S_T)]$, έχουμε ότι $E[ln(S_T)] - \ln(S_0) = \mu T$ ή $E[\ln(S_T/S_0)] = \mu T$, το οποίο ισοδυναμεί με $E(x) = \mu$. Η παραπάνω διαδικασία δεν είναι αληθής, καθώς η συνάρτηση ln δεν είναι γραμμική συνάρτηση και συνεπώς δεν ισχύει ότι $ln[E(S_T)] = E[ln(S_T)]$. Αντίθετα ισχύει ότι $ln[E(S_T)] > E[ln(S_T)]$, ώστε $E[\ln(S_T/S_0)] < \mu T$, με αποτέλεσμα να ισχύει ότι $E(x) < \mu$.

5.5. Μεταβλητότητα

Η μεταβλητότητα αποτελεί ένα στατιστικό μέτρο για την ποικιλία των τιμών των αποδόσεων ενός περιουσιακού στοιχείου σε μια χρονική περίοδο (Marroni, Perdomo, 2013). Συνήθως η μεταβλητότητα υπολογίζεται ως η ετήσια τυπική απόκλιση των αποδόσεων ενός περιουσιακού στοιχείου σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα. Όταν το χρονικό διάστημα Δt είναι μικρό, η εξίσωση (5.1) δείχνει ότι ο όρος $\sigma^2 \Delta t$ είναι προσεγγιστικά ισότιμος με τη διασπορά του ποσοστού μεταβολής της τιμής της μετοχής σε χρόνο Δt. Αυτό σημαίνει ότι το $\sigma\sqrt{\Delta t}$ είναι προσεγγιστικά ίσο με την τυπική απόκλιση του ποσοστού μεταβολής της τιμής της μετοχής σε χρόνο Δt.

Ο υπολογισμός της μεταβλητότητας γίνεται με δύο τρόπους, είτε υπολογίζοντας τη μεταβλητότητα με ιστορικά στοιχεία, είτε υπολογίζοντας την τεκμαρτή μεταβλητότητα (implied volatility) (Peterson, 2018).

Για την εμπειρική εκτίμηση της μεταβλητότητας της τιμής μιας μετοχής, παρατηρείται η τιμή της μετοχής ανά συγκεκριμένα χρονικά διαστήματα (π.χ. ανά ημέρα, εβδομάδα ή μήνα). Ορίζουμε:

$n + 1$: Πλήθος παρατηρήσεων

S_i : Τιμή μετοχής στο τέλος του i-οστού χρονικού διαστήματος, όπου $i = 0,1,\dots,n$

τ : διάρκεια χρονικών διαστημάτων σε έτη

και θέτουμε

$$u_i = ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right) \text{ όπου } i = 1,2,\dots,n$$

Η προσέγγιση s της τυπικής απόκλισης της απόδοσης u_i δίνεται από τη σχέση

$$s=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})^2}$$

ή

$$s=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}{u_i}^2-\frac{1}{n(n-1)}\left(\sum_{i=1}^{n}u_i\right)^2}$$

όπου $\bar{u}$ ο μέσος όρος της u_i.

Από την εξίσωση (5.2) η τυπική απόκλιση της u_i είναι $\sigma\sqrt{T}$. Η μεταβλητή s συνεπώς είναι μια προσέγγιση του $\sigma\sqrt{T}$. Συνεπάγεται ότι η μεταβλητότητα σ μπορεί να εκτιμηθεί ως $\hat{\sigma}$, όπου

$$\hat{\sigma}=\frac{s}{\sqrt{\tau}}$$

Το τυπικό σφάλμα αυτής της εκτίμησης είναι προσεγγιστικά $\hat{\sigma}/\sqrt{2n}$.

Στον πίνακα 4 παρουσιάζονται οι τιμές κλεισίματος μιας μετοχής κατά τη διάρκεια 15 ημερών διαπραγμάτευσης. Σε αυτήν την περίπτωση, $n=14$ και

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n}u_i=-0.00790518$$

και

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n}{u_i}^2=0.005149602$$

με αποτέλεσμα η εκτίμηση της τυπικής απόκλισης της ημερήσιας απόδοσης να είναι

$$\sqrt{\frac{0.005149602}{14}-\frac{(-0.00790518)^2}{15\times 14}}=0.017592696$$

ή 1.76%. Υποθέτοντας ότι έχουμε 252 ημέρες διαπραγμάτευσης το χρόνο, $\tau=1/252$ και συνεπώς η εκτίμηση της ετήσιας μεταβλητότητας από τα παραπάνω δεδομένα είναι $0.017592696\sqrt{252}=0.279275391$ ή 27.93%. Το τυπικό σφάλμα της παραπάνω εκτίμησης είναι

$$\frac{0.017592696}{\sqrt{2\times 14}}=0.003324707$$

ή 0.33% το χρόνο.

Πίνακας 4: Υπολογισμός μεταβλητότητας

Ημερομηνία	S_i	S_i/S_{i-1}	$u_i = ln(S_i/S_{i-1})$
31/12/2018	2.54		
2/1/2019	2.48	0.976378	-0.023905521
3/1/2019	2.54	1.024194	0.023905521
4/1/2019	2.545	1.001969	0.001966569
7/1/2019	2.54	0.998035	-0.001966569
8/1/2019	2.6	1.023622	0.023347364
9/1/2019	2.615	1.005769	0.005752652
10/1/2019	2.655	1.015296	0.015180557
11/1/2019	2.685	1.011299	0.011236073
14/1/2019	2.65	0.986965	-0.013121088
15/1/2019	2.62	0.988679	-0.011385322
16/1/2019	2.66	1.015267	0.015151805
17/1/2019	2.6	0.977444	-0.022814678
18/1/2019	2.49	0.957692	-0.043228735
21/1/2019	2.52	1.012048	0.011976191

Η επιλογή του κατάλληλου πλήθους παρατηρήσεων δεν είναι μια εύκολη διαδικασία. Όσο περισσότερα είναι τα δεδομένα που έχουν συλλεχθεί, τόσο πιο ακριβής θα είναι και η εκτίμηση, όμως η μεταβλητότητα σ μεταβάλλεται με την πάροδο του χρόνου, με αποτέλεσμα παλαιότερα δεδομένα να μην είναι σχετικά για την πρόβλεψη της μελλοντικής μεταβλητότητας (Fan, Feng, 2022). Ένας συμβιβασμός που φαίνεται αποτελεσματικός είναι χρήση καθημερινών τιμών κλεισίματος της μετοχής των τελευταίων 90 έως 180 ημερών. Διαφορετικά, το πλήθος παρατηρήσεων n τίθεται ίσο με το πλήθος των ημερών στις οποίες θα χρησιμοποιηθεί η μεταβλητότητα. Συνεπώς, αν η εκτίμηση της μεταβλητότητας εισαχθεί σε ένα μοντέλο αποτίμησης ενός διετούς διάρκειας δικαιώματος προαίρεσης, θα χρησιμοποιηθούν καθημερινά δεδομένα των δύο τελευταίων ετών.

Αξίζει να σημειωθεί, όσον αφορά την εκτίμηση και χρήση της μεταβλητότητας, το αν αυτή θα πρέπει να εκτιμάται με βάση τις ημερομηνίες διαπραγμάτευσης των μετοχών ή όλες τις ημέρες του ημερολογίου. Έρευνες έχουν αποδείξει πως η μεταβλητότητα είναι πολύ μεγαλύτερη κατά τις ημέρες στις οποίες διαπραγματεύονται μετοχές παρά κατά τις ημέρες στις οποίες αυτές δε διαπραγματεύονται (Fan, Feng, 2022). Σαν αποτέλεσμα, συχνά δε λαμβάνονται υπόψη μέρες κατά τις οποίες δε γίνεται διαπραγμάτευση, τόσο για τη συλλογή ιστορικών δεδομένων για την εκτίμηση της μεταβλητότητας όσο και για τον υπολογισμό της διάρκειας ζωής ενός δικαιώματος προαίρεσης.

Η ετήσια μεταβλητότητα υπολογίζεται μέσω της ημερήσιας μεταβλητότητας με τη βοήθεια του παρακάτω τύπου

$$\text{ετήσια μεταβλητότητα} = \text{μεταβλητότητα ανά ημέρα διαπραγμάτευσης} \times \sqrt{\text{ημέρες διαπραγμάτευσης ανά έτος}}$$

Η διάρκεια ζωής ενός δικαιώματος προαίρεσης υπολογίζεται επίσης με τη χρήση των ημερών διαπραγμάτευσης. Σε χρόνια T, η διάρκεια ζωής ενός δικαιώματος προαίρεσης υπολογίζεται από τον τύπο

$$T = \frac{\text{Πλήθος ημερών διαπραγμάτευσης μέχρι τη λήξη}}{252}$$

5.6. Η διαφορική εξίσωση των Black-Scholes-Merton

Η διαφορική εξίσωση των Black-Scholes-Merton είναι μια διαφορική εξίσωση η οποία πρέπει να ικανοποιείται από την τιμή οποιουδήποτε παραγώγου με υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο μια μετοχή που δεν αποδίδει μέρισμα (Whaley, 2013). Όπως και στην υπόθεση της μη εξισορροπητικής κερδοσκοπίας για την αποτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης με υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο μια μετοχή, όπου υποθέσαμε ότι οι μεταβολές των τιμών της μετοχής ακολουθούν ένα διωνυμικό μοντέλο, θα χρησιμοποιηθούν όμοια επιχειρήματα και για την απόδειξη της διαφορικής εξίσωσης των Black-Scholes-Merton.

Υποθέτουμε το σχηματισμό ενός ακίνδυνου χαρτοφυλακίου, αποτελούμενο από μια θέση στο παράγωγο και μια θέση στη μετοχή. Εν τη απουσία εξισορροπητικής κερδοσκοπίας, η απόδοση του χαρτοφυλακίου πρέπει να ισούται με το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου, r (Hull, 2009). Ο λόγος για τον οποίο δύναται να σχηματιστεί είναι ότι τόσο η τιμή της μετοχής όσο και η τιμή του παραγώγου επηρεάζονται από την ίδια πηγή αβεβαιότητας: τις μεταβολές της τιμής της μετοχής. Σε οποιοδήποτε μικρό χρονικό διάστημα, η τιμή ενός παραγώγου και η τιμή της υποκείμενης μετοχής του έχουν τέλεια γραμμική συσχέτιση. Όταν κατασκευάζεται ένα κατάλληλο χαρτοφυλάκιο με ένα παράγωγο και μία μετοχή, το κέρδος ή η ζημία από τη θέση στη μετοχή πάντα αντισταθμίζει το κέρδος ή τη ζημία από τη θέση στο παράγωγο, ώστε η συνολική αξία του χαρτοφυλακίου στο τέλος μιας σύντομης περιόδου να είναι με βεβαιότητα γνωστή. Ας υποθέσουμε ότι σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή η σχέση μεταξύ μιας μικρής μεταβολής ΔS της τιμής της μετοχής και η επακόλουθη μικρή μεταβολή Δc στην τιμή ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς δίνεται από τη σχέση

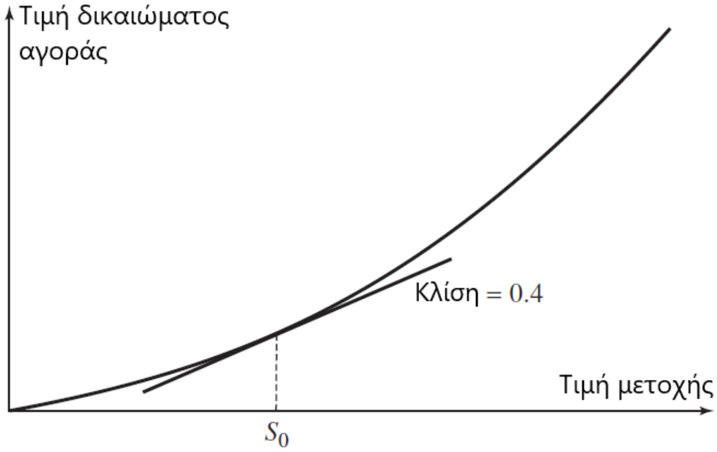
$$\Delta c = 0.4\Delta S$$

Αυτό σημαίνει ότι η κλίση της γραφικής παράστασης η οποία απεικονίζει τη σχέση μεταξύ των c και S είναι 0.4 (Γράφημα 19). Ένα ακίνδυνο χαρτοφυλάκιο θα μπορούσε να σχηματιστεί από:

1. Μια θέση πώλησης σε 40 μερίδια μιας μετοχής
2. Μια θέση αγοράς σε 100 δικαιώματα προαίρεσης

Έστω ότι η τιμή της μετοχής αυξάνεται κατά 10 λεπτά του ευρώ. Η τιμή του δικαιώματος προαίρεσης θα αυξηθεί κατά 4 λεπτά και το κέρδος $40 \times 0.1 = 4$€ από τα μερίδια θα ισούται με $100 \times 0.04 = 4$€ ζημία από τη θέση αγοράς στο δικαίωμα προαίρεσης.

Μια σημαντική διαφορά ανάμεσα στην ανάλυση του διωνυμικού μοντέλου που προηγήθηκε στο κεφάλαιο 3 και στην ανάλυση της διαφορικής εξίσωσης των Black-Scholes-Merton είναι ότι, στην τελευταία, οι θέσεις στη μετοχή και στο δικαίωμα προαίρεσης δεν έχουν κίνδυνο για ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα και για να παραμείνουν ακίνδυνες θα πρέπει συχνά να προσαρμόζονται. Στο παράδειγμά μας, η σχέση μεταξύ των Δc και ΔS ενώ σήμερα ήταν $\Delta c = 0.4\Delta S$, θα μπορούσε αύριο να μεταβληθεί σε $\Delta c = 0.5\Delta S$. Αυτό σημαίνει ότι, για να παραμείνει ακίνδυνη η θέση, θα πρέπει να αγοραστούν επιπλέον 10 μερίδια της μετοχής για κάθε 100 δικαιώματα προαίρεσης που πωλούνται.



Πηγή: Hull (2009)

Γράφημα 19. Σχέση μεταξύ τιμής δικαιώματος αγοράς και τιμής μετοχής. Τρέχουσα τιμή μετοχής S_0

Οι υποθέσεις που χρησιμοποιούνται για τον ορισμό της διαφορικής εξίσωσης των Black-Scholes-Merton παρατίθενται παρακάτω (Marroni, Perdomo, 2013):

1. Η τιμή της μετοχής ακολουθεί τη στοχαστική διαδικασία που περιγράφηκε στο κεφάλαιο 4, με σταθερές μ και σ.
2. Η ανοιχτή πώληση χρεογράφων επιτρέπεται.
3. Δεν υπάρχουν κόστη συναλλαγής και φόροι.
4. Δε διανέμονται μερίσματα κατά τη διάρκεια ζωής ενός παραγώγου.
5. Δεν υπάρχουν ευκαιρίες εξισορροπητικής κερδοσκοπίας.
6. Οι συναλλαγές χρεογράφων είναι συνεχείς.
7. Το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου, r, είναι σταθερό και ίδιο για όλες τις λήξεις.

5.7. Παραγωγή της διαφορικής εξίσωσης των Black-Scholes-Merton

Ας υποθέσουμε την τιμή ενός παραγώγου σε μια οποιαδήποτε χρονική στιγμή t, εκτός από τη χρονική στιγμή 0. Αν T είναι η ημερομηνία λήξης του παραγώγου, τότε ο χρόνος έως την ημερομηνία λήξης θα είναι $T - t$. Η διαδικασία που ακολουθεί η τιμή της μετοχής είναι αυτή που παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 4:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \qquad (\mathbf{5.8})$$

Ας υποθέσουμε επίσης ότι f είναι η τιμή ενός δικαιώματος αγοράς ή κάποιου άλλου παραγώγου εξαρτώμενου του S. Τότε η μεταβλητή f θα είναι μια συνάρτηση του S και του t. Από την εξίσωση (4.13) συνεπάγεται ότι

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S dz \qquad (\mathbf{5.9})$$

Σε διακριτό χρόνο οι παραπάνω εξισώσεις (5.8) και (5.9) γίνονται

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta z \qquad (\mathbf{5.10})$$

και

$$\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S \Delta z \qquad (\mathbf{5.11})$$

όπου Δf και ΔS οι μεταβολές των f και S σε ένα μικρό χρονικό διάστημα Δt.

Όπως είδαμε στην παράγραφο 4.4, οι διαδικασίες Wiener που ακολουθούν οι f και S είναι ίδιες. Με άλλα λόγια, το Δz $(= \varepsilon\sqrt{\Delta t})$ των εξισώσεων (5.8) και (5.9) είναι το ίδιο. Συνεπάγεται πως μπορεί να σχηματιστεί ένα χαρτοφυλάκιο, αποτελούμενο από μια μετοχή και ένα παράγωγο, τέτοιο ώστε να παραλείπεται η διαδικασία Wiener (Hull, 2009). Το χαρτοφυλάκιο αυτό σχηματίζεται από

-1 : παράγωγο

$+\dfrac{\partial f}{\partial S}$: μερίδια μετοχής

Ο κάτοχος του παραπάνω χαρτοφυλακίου έχει θέση πώλησης σε ένα παράγωγο και θέση αγοράς σε $\partial f/\partial S$ μερίδια της μετοχής. Θέτουμε Π την αξία του χαρτοφυλακίου. Εξ ορισμού θα ισχύει ότι

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S}S \qquad (\mathbf{5.12})$$

Η μεταβολή $\Delta\Pi$ της αξίας του χαρτοφυλακίου σε ένα χρονικό διάστημα Δt δίνεται από τη σχέση

$$\Delta\Pi = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S}\Delta S \qquad (\mathbf{5.13})$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (5.10) και (5.11) στην εξίσωση (5.13) έχουμε ότι

$$\Delta\Pi = \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t \qquad (\mathbf{5.14})$$

Καθώς η παραπάνω εξίσωση δεν περιέχει το Δz, το χαρτοφυλάκιο θα πρέπει να είναι ακίνδυνο κατά τη διάρκεια Δt (Hull, 2009). Από τις υποθέσεις της διαφορικής εξίσωσης των Black-Scholes-Merton που αναφέρθηκαν προηγουμένως, έπεται ότι το χαρτοφυλάκιο θα πρέπει στιγμιαία να απολαμβάνει την ίδια απόδοση με άλλα ακίνδυνα και μικρής χρονικής διάρκειας χρεόγραφα. Εάν απολάμβανε απόδοση μεγαλύτερη, arbitrageurs θα μπορούσαν να έχουν ακίνδυνο κέρδος δανειζόμενοι χρήματα για να αγοράσουν το χαρτοφυλάκιο, ενώ αν απολάμβανε μικρότερη απόδοση, θα έβγαζαν ακίνδυνο κέρδος πωλώντας το χαρτοφυλάκιο και αγοράζοντας άλλα ακίνδυνα χρεόγραφα. Συνεπώς ισχύει ότι

$$\Delta\Pi = r\Pi\Delta t \qquad (\mathbf{5.15})$$

όπου r το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου. Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (5.12) και (5.14) στην παραπάνω εξίσωση έχουμε ότι

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t = r\left(f - \frac{\partial f}{\partial S}S\right)\Delta t$$

ώστε

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf \qquad (\mathbf{5.16})$$

Η εξίσωση (5.16) αποτελεί τη διαφορική εξίσωση των Black-Scholes-Merton. Έχει πολλές λύσεις, οι οποίες εξαρτώνται από το παράγωγο στο οποίο υπόκειται η μεταβλητή S. Το παράγωγο που αποκτάται όταν επιλύεται η εξίσωση εξαρτάται από τις οριακές συνθήκες που έχουν χρησιμοποιηθεί. Αυτές ορίζουν τις τιμές των παραγώγων στα όρια των πιθανών τιμών των S και t. Στην περίπτωση ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς, η συνθήκη που επιλέγεται είναι

$$f = \max(S-K,0) \text{ όταν } t = T$$

Στην περίπτωση ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης, η συνθήκη που επιλέγεται

$$f = \max(K-S,0) \text{ όταν } t = T$$

5.8. Αποτίμηση ουδέτερου κινδύνου

Στην παράγραφο 3.3 μιλήσαμε για την αποτίμηση ουδέτερου κινδύνου αναφορικά με τη διωνυμική μέθοδο αποτίμησης της τιμής δικαιωμάτων προαίρεσης. Η αποτίμηση ουδέτερου κινδύνου αποτελεί ένα πολύ σημαντικό εργαλείο στην ανάλυση των παραγώγων και προκύπτει από μια ιδιότητα κλειδί της διαφορικής εξίσωσης Black-Scholes-Merton (5.16). Η ιδιότητα αυτή είναι ότι η διαφορική εξίσωση αυτή δεν περιέχει κάποια μεταβλητή η οποία να εξαρτάται από το επίπεδο του κινδύνου που επιλέγουν οι επενδυτές (Hull, 2009). Οι μεταβλητές που εμφανίζονται στην εξίσωση είναι η τρέχουσα τιμή της μετοχής, ο χρόνος, η μεταβλητότητα της τιμής της μετοχής και το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου, οι οποίες είναι όλες ανεξάρτητες του κινδύνου. Η διαφορική εξίσωση Black-Scholes-Merton δε θα ήταν ανεξάρτητη του κινδύνου αν περιείχε την αναμενόμενη απόδοση, μ, επί της μετοχής, καθώς αυτή εξαρτάται από το επίπεδο του κινδύνου που επιλέγεται από τους επενδυτές. Εφόσον ο παράγοντας του κινδύνου δεν εμφανίζεται στη διαφορική εξίσωση των Black-Scholes-Merton, είναι λογικό το επιχείρημα ότι ο κίνδυνος δε θα επηρεάζει και τη λύση της διαφορικής εξίσωσης αυτής. Συνεπώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί οποιοδήποτε επίπεδο κινδύνου κατά τον υπολογισμό της τιμής f, με αποτέλεσμα να είναι ρεαλιστική η υπόθεση ότι όλοι οι επενδυτές είναι ουδέτερου κινδύνου. Σε ένα περιβάλλον ουδέτερου κινδύνου, η αναμενόμενη επένδυση οποιασδήποτε επένδυσης ισούται με το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου r και η παρούσα αξία οποιασδήποτε χρηματοροής υπολογίζεται προεξοφλώντας την αναμενόμενη τιμή της με το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου.

Ας υποθέσουμε ένα παράγωγο το οποίο αποδίδει μια πληρωμή σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Για τον υπολογισμό της πληρωμής αυτής μέσω της αποτίμησης ουδέτερου κινδύνου:

1. Υποτίθεται ότι η αναμενόμενη απόδοση του περιουσιακού στοιχείου είναι το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου, r.
2. Υπολογίζεται η αναμενόμενη πληρωμή του παραγώγου.
3. Προεξοφλείται η αναμενόμενη πληρωμή που υπολογίστηκε με το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου.

Είναι σημαντικό να σημειωθεί πως η αποτίμηση ουδέτερου κινδύνου ή αλλιώς η υπόθεση ότι όλοι οι επενδυτές είναι ουδέτερου κινδύνου, αποτελεί ένα εργαλείο για την απόκτηση λύσεων της διαφορικής εξίσωσης των Black-Scholes-Merton. Οι λύσεις αυτές δεν είναι δεκτές μόνο σε ένα περιβάλλον ουδέτερου κινδύνου, αλλά και σε οποιοδήποτε περιβάλλον. Όταν μεταφερόμαστε από ένα περιβάλλον ουδέτερου κινδύνου σε ένα πραγματικό περιβάλλον, δύο πράγματα συμβαίνουν. Η αναμενόμενη απόδοση της τιμής μιας μετοχής και το προεξοφλητικό επιτόκιο που θα χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της τιμής του παραγώγου μεταβάλλονται και αποδεικνύεται πως οι μεταβολές αυτές αντισταθμίζουν η μία την άλλη.

5.9. Εξισώσεις αποτίμησης δικαιωμάτων των Black-Scholes-Merton

Διαδεδομένες λύσεις της διαφορικής εξίσωσης (5.16) αποτελούν οι εξισώσεις των Black-Scholes-Merton για τον υπολογισμό των τιμών Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης (Hull, 2009). Οι εξισώσεις αυτές είναι:

$$c = S_0 N(d_1) - K e^{-rt} N(d_2) \qquad (\mathbf{5.17})$$

και

$$p = K e^{-rt} N(-d_2) - S_0 N(-d_1) \qquad (\mathbf{5.18})$$

όπου

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Πηγή: Hull (2009)

Γράφημα 20. Η σκιασμένη περιοχή απεικονίζει την $N(x)$

Η συνάρτηση $N(x)$ είναι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής μιας μεταβλητής η οποία ακολουθεί κανονική κατανομή (Marroni, Perdomo, 2013). Η συνάρτηση αυτή απεικονίζεται στο γράφημα 20. Οι μεταβλητές c και p είναι οι τιμές των Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης αντίστοιχα, S_0 η τιμή της μετοχής στο χρόνο 0, K η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος προαίρεσης, r το συνεχώς ανατοκιζόμενο επιτόκιο μηδενικού κινδύνου, σ η μεταβλητότητα της τιμής της μετοχής και T η ημερομηνία λήξης του δικαιώματος προαίρεσης. Ένας τρόπος για την εξαγωγή των εξισώσεων (5.17) και (5.18) από τη διαφορική εξίσωση των Black-Scholes-Merton, είναι λύνοντας την τελευταία δεδομένων των συνθηκών που αναφέρθηκαν στην παράγραφο 5.5.

Καθώς η πρόωρη εξάσκηση ενός Αμερικανικού δικαιώματος αγοράς σε μετοχή που δεν αποδίδει μέρισμα δεν είναι ποτέ βέλτιστη, η εξίσωση (5.17) δίνει την αξία ενός Αμερικανικού δικαιώματος αγοράς σε μια μετοχή που δεν αποδίδει μέρισμα, ενώ δεν έχει παραχθεί ακόμα κάποια εξίσωση για τον υπολογισμό της αξίας ενός Αμερικανικού δικαιώματος πώλησης σε μετοχή που δεν αποδίδει μέρισμα (Hull, 2009).

Ο όρος $N(d_2)$ στην εξίσωση (5.17) είναι η πιθανότητα το δικαίωμα αγοράς να εξασκηθεί σε ένα περιβάλλον ουδέτερου κινδύνου. Η παράσταση $S_0N(d_1)e^{rt}$ αποτελεί την αναμενόμενη τιμή της μετοχής στην ημερομηνία λήξης και σε ένα περιβάλλον ουδέτερου κινδύνου, όταν τιμές μετοχών μικρότερες της τιμής εξάσκησης θεωρούνται μηδενικές. Καθώς η τιμή εξάσκησης απολαμβάνεται μόνο όταν η τιμή της μετοχής είναι μεγαλύτερή της, γεγονός που έχει πιθανότητα να συμβεί ίση με $N(d_2)$, η αναμενόμενη πληρωμή σε ένα περιβάλλον ουδέτερου κινδύνου είναι

$$S_0N(d_1)e^{rt} - KN(d_2)$$

Προεξοφλώντας την παραπάνω πληρωμή παράγεται η εξίσωση Black-Scholes-Merton για ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς:

$$c = S_0N(d_1) - Ke^{-rt}N(d_2)$$

Ας υποθέσουμε ότι ένας επενδυτής είναι κάτοχος ενός δικαιώματος αγοράς, το οποίο του δίνει το δικαίωμα να αγοράσει το υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο του δικαιώματος προς 800€ σε ένα χρόνο. Η τρέχουσα τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείο είναι 1,000€, η μεταβλητότητά του είναι 25% και το συνεχώς ανατοκιζόμενο επιτόκιο μηδενικού κινδύνου είναι 5%. Αρχικά υπολογίζουμε τα d_1 και d_2 (Gottesman, 2016):

$$d_1 = \frac{\ln(1{,}000/800) + (0.05 + 0.25^2/2) \times 1}{0.25\sqrt{1}} = 1.2176$$

$$d_2 = \frac{\ln(1{,}000/800) + (0.05 - 0.25^2/2) \times 1}{0.25\sqrt{1}} = 0.9676$$

Τότε με χρήση της συνάρτησης Excel $\mathrm{NORM.S.DIST}()$

$$N(d_1) = \mathrm{NORM.S.DIST}(1.2176, 1) = 0.8883$$

$$N(d_2) = \mathrm{NORM.S.DIST}(0.9676, 1) = 0.8334$$

Συνεπώς από την εξίσωση (5.17) έχουμε ότι η αξία του δικαιώματος αγοράς θα είναι

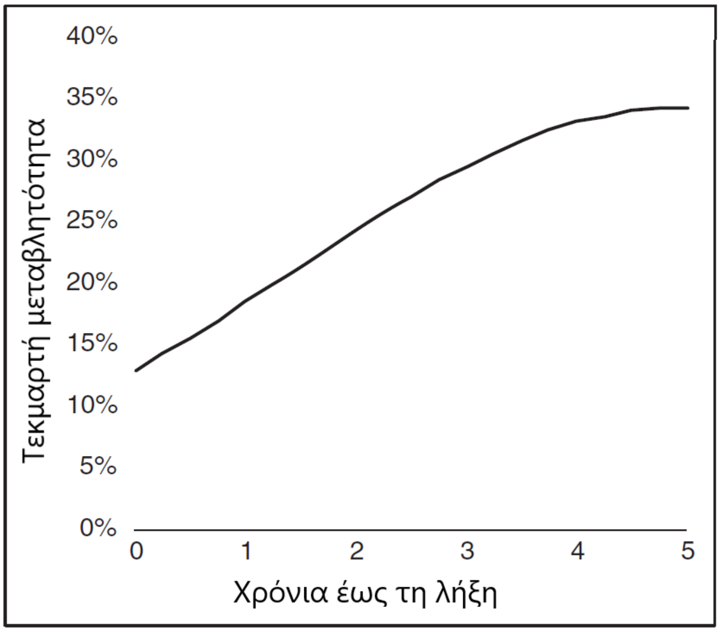
$$c = 1{,}000 \times 0.8883 - 800 \times e^{-0.05\times 1} \times 0.8334 = 254{,}13€$$

5.10. Τεκμαρτή μεταβλητότητα

Μια παράμετρος, η οποία δεν είναι δυνατό να παρατηρηθεί άμεσα στις εξισώσεις αποτίμησης των Black-Scholes-Merton, είναι η μεταβλητότητα της τιμής της μετοχής. Στην παράγραφο 5.4, είδαμε πως μπορεί να υπολογιστεί η μεταβλητότητα της τιμής μιας μετοχής μελετώντας ιστορικά δεδομένα αναφορικά με την τιμή της. Στην πραγματικότητα, οι συμμετέχοντες στην αγορά χρησιμοποιούν την τεκμαρτή μεταβλητότητα, δηλαδή τη μεταβλητότητα που μπορεί να υποτεθεί από τις τιμές των δικαιωμάτων προαίρεσης που παρατηρούνται στην αγορά (Whaley, 2013). Με τη μέθοδο αποτίμησης των Black-Scholes-Merton μπορούμε να υπολογίσουμε την αξία ενός δικαιώματος προαίρεσης, αν γνωρίζουμε την τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου, την τιμή εξάσκησης του δικαιώματος, το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου, την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος και τη μεταβλητότητα του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου. Καθώς στην πραγματικότητα γνωρίζουμε το ασφάλιστρο των δικαιωμάτων, δύναται οι εξισώσεις (5.17) ή (5.18) να επιλυθούν ως προς τη μεταβλητότητα του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου, η λύση των οποίων είναι η τεκμαρτή μεταβλητότητα (Gottesman, 2016).

Ας υποθέσουμε ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς σε μια μετοχή που δεν αποδίδει μέρισμα, αξίας 1.875, όταν $S_0 = 21, K = 20, r = 0.1$ και $T = 0.25$ (Hull, 2009). Η τεκμαρτή μεταβλητότητα είναι η τιμή του σ, η οποία όταν αντικατασταθεί στην εξίσωση (5.17), δίνει $c = 1.875$. Η εξίσωση (5.17) δε μπορεί να επιλυθεί ως προς σ, όμως μπορεί να χρησιμοποιηθεί μια διαφορετική διαδικασία για τον υπολογισμό του. Ας υποθέσουμε ότι $\sigma = 0.20$. Τότε $c = 1.76$, τιμή η οποία είναι αρκετά μικρή. Καθώς c και σ είναι ανάλογα ποσά, θα πρέπει να υποτεθεί μια μεγαλύτερη τιμή για τη μεταβλητότητα σ. Υποθέτοντας $\sigma = 0.30$, έχουμε ότι $c = 2.10$, τιμή η οποία είναι αρκετά μεγάλη, καταλήγοντας στο ότι η μεταβλητότητα θα πρέπει να έχει τιμή ανάμεσα σε 0.20 και 0.30. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία και για $\sigma = 0.25$, παρατηρούμε ότι η τιμή c είναι αρκετά μεγάλη, μικραίνοντας και πάλι το διάστημα στο οποίο δύναται να βρίσκεται η τιμή του σ. Καταλήγουμε στο ότι, στο συγκεκριμένο παράδειγμα, η τεκμαρτή μεταβλητότητα έχει τιμή 0.235 ή 23.5% ανά χρόνο. Παρόμοια διαδικασία μπορεί να ακολουθηθεί και για τον υπολογισμό της τεκμαρτής μεταβλητότητας σε Αμερικανικά δικαιώματα προαίρεσης.

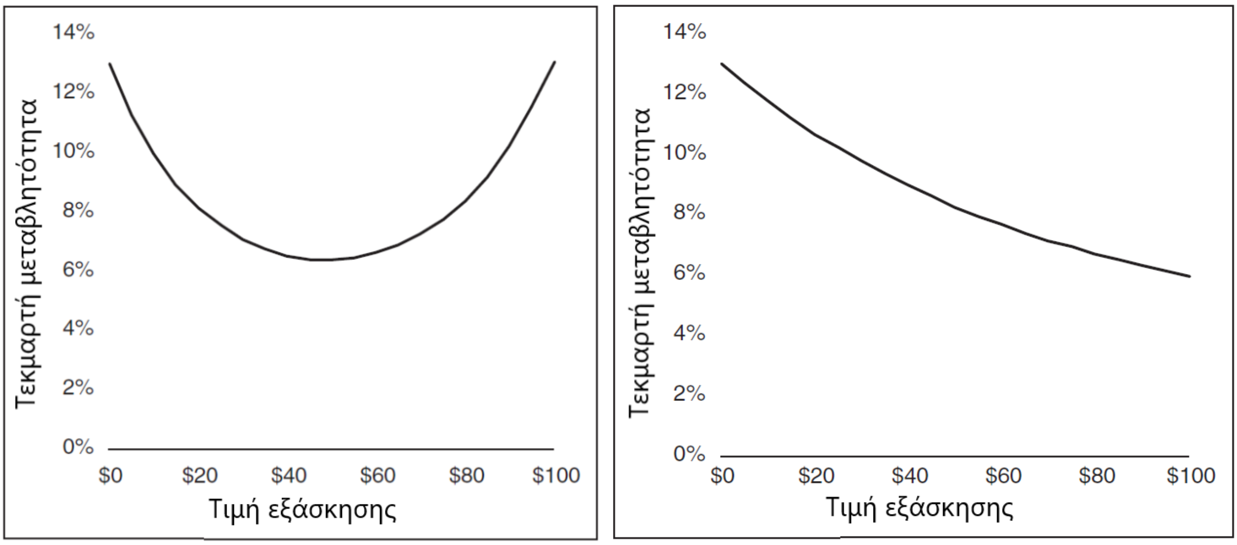
Η καμπύλη μεταβλητότητας στη λήξη (volatility term structure) είναι μια γραφική παράσταση της τεκμαρτής μεταβλητότητας έως τη λήξη ενός χρονικού διαστήματος (Gottesman, 2016). Στο γράφημα 21, ο οριζόντιος άξονας αντιστοιχεί στο χρόνο έως τη λήξη, ενώ ο κάθετος άξονας παρουσιάζει την ετήσια τεκμαρτή μεταβλητότητα και όπως φαίνεται, η τεκμαρτή μεταβλητότητα μεταβάλλεται για τις διαφορετικές ημερομηνίες λήξης. Στο παρόν γράφημα η τεκμαρτή μεταβλητότητα είναι υψηλή στην περίπτωση που το χρονικό διάστημα μέχρι τη λήξη είναι μεγάλο. Ένας λόγος που η τεκμαρτή μεταβλητότητα εξαρτάται από το χρόνο έως τη λήξη είναι ότι η αγορά έχει διαφορετικές μελλοντικές προσδοκίες όσον αφορά τη μεταβλητότητα ενός περιουσιακού στοιχείου με την πάροδο του χρόνου.



Πηγή: Gottesman (2016)

Γράφημα 21. Volatility term structure

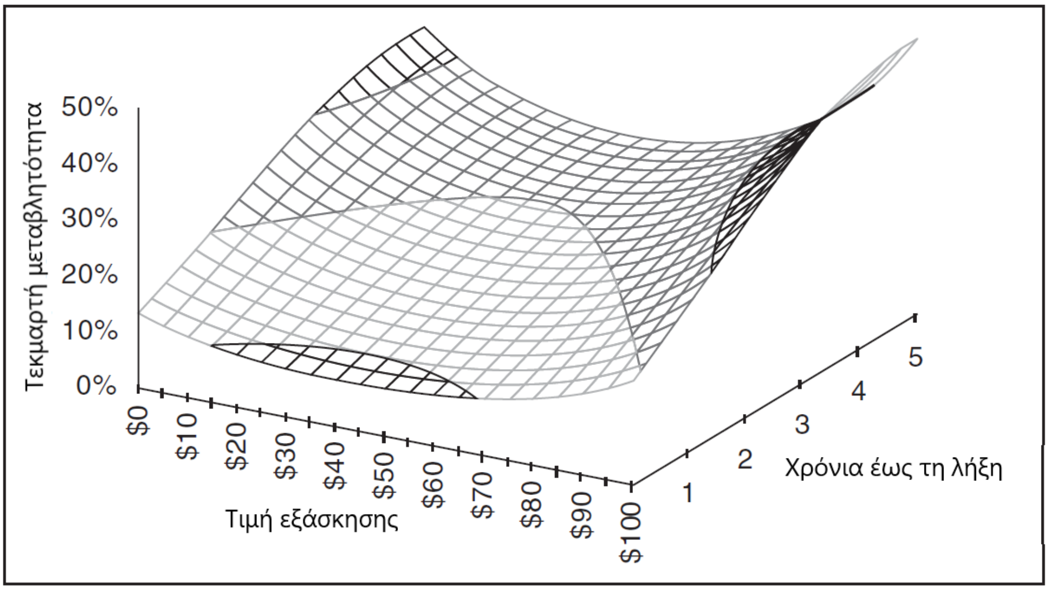
Ένα χαμόγελο μεταβλητότητας (volatility smile) ή λοξότητα μεταβλητότητας (volatility skew) είναι ένα γράφημα της τεκμαρτής μεταβλητότητας ως προς τις τιμές εξάσκησης (Gottesman, 2016). Οι όροι χαμόγελο και λοξότητα (smile και skew) αναφέρονται στο σχήμα που έχει το γράφημα της τεκμαρτής μεταβλητότητας ως προς τις τιμές εξάσκησης. Στο γράφημα 22 απεικονίζονται τα δύο αυτά γραφήματα. Όπως είδαμε, δύναται οι εξισώσεις (5.17) ή (5.18) να επιλυθούν ως προς τη μεταβλητότητα του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου, η λύση των οποίων είναι η τεκμαρτή μεταβλητότητα. Η ύπαρξη των παραπάνω γραφημάτων υποδηλώνουν ότι η τεκμαρτή μεταβλητότητα ποικίλει, όταν αυτή αποτελεί συνάρτηση της τιμής εξάσκησης ενός δικαιώματος, γεγονός που δε συμβαίνει όταν υπολογίζεται το ασφάλιστρο premium των δικαιωμάτων προαίρεσης, μέσω των παραπάνω εξισώσεων των Black-Scholes-Merton.



Πηγή: Gottesman (2016)

Γράφημα 22. Volatility smile και volatility skew

Είναι επίσης εφικτό η καμπύλη μεταβλητότητας στη λήξη (volatility term structure) και το χαμόγελο/λοξότητα μεταβλητότητας (volatility smile/skew) να μελετηθούν ταυτόχρονα, μέσω ενός τρισδιάστατου γραφήματος, το οποίο αναφέρεται ως επιφάνεια μεταβλητότητας (volatility surface) (Γράφημα 23) (Gottesman, 2016).



Πηγή: Gottesman (2016)

Γράφημα 23. Volatility surface

Η τεκμαρτή μεταβλητότητα αποτελεί ένα μέσο για την παρακολούθηση της στάσης της αγοράς αναφορικά με τη μεταβλητότητα μιας συγκεκριμένης μετοχής (Hull, 2009). Μελετώντας ιστορικά δεδομένα των τιμών μιας μετοχής μπορεί να υπολογιστεί η μεταβλητότητά της κοιτώντας στο παρελθόν, κοιτώντας όμως στο μέλλον μπορεί να υπολογιστεί η τεκμαρτή μεταβλητότητα. Οι συναλλασσόμενοι στις αγορές συνήθως εστιάζουν στην τεκμαρτή μεταβλητότητα ενός δικαιώματος προαίρεσης παρά στην τιμή του, καθώς η τεκμαρτή μεταβλητότητα ενός δικαιώματος προαίρεσης μεταβάλλεται λιγότερο σε σχέση με την τιμή του.

5.11. Μερίσματα

Μέχρι στιγμής έχει υποτεθεί ότι η μετοχή στην οποία είναι γραμμένο το δικαίωμα προαίρεσης δεν αποδίδει μερίσματα. Στην παράγραφο αυτή τροποποιείται το μοντέλο των Black-Scholes-Merton ώστε να λαμβάνονται υπόψη τα μερίσματα που αποδίδουν μετοχές. Υποθέτουμε ότι το μέγεθος των μερισμάτων και ο χρόνος κατά τον οποίο αυτά αποδίδονται είναι με βεβαιότητα γνωστός. Η ημερομηνία κατά την οποία αποδίδεται το μέρισμα υποτίθεται ότι είναι η προ μερίσματος ημερομηνία και κατά την ημερομηνία αυτή η τιμή της μετοχής μειώνεται κατά το μέγεθος του μερίσματος (Hull, 2009).

Τα Ευρωπαϊκά δικαιώματα προαίρεσης μπορούν να μελετηθούν υποθέτοντας ότι η τιμή της μετοχής προκύπτει από το άθροισμα δύο συστατικών: ένα συστατικό χωρίς ρίσκο, το οποίο αντιστοιχεί στα γνωστά μερίσματα που πρόκειται να αποδοθούν κατά τη διάρκεια ζωής του δικαιώματος προαίρεσης και σε ένα συστατικό το οποίο περιέχει ρίσκο (Hull, 2009). Το συστατικό χωρίς ρίσκο είναι, σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή, η παρούσα αξία όλων των μερισμάτων που πρόκειται να αποδοθούν κατά τη διάρκεια ζωής του δικαιώματος προαίρεσης προεξοφλημένα από την προ μερίσματος ημερομηνία με το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου. Μέχρι την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος, τα μερίσματα θα έχουν αποδοθεί και το συστατικό χωρίς ρίσκο θα έχει εξαφανιστεί. Η εξίσωση των Black-Scholes-Merton τότε θα επαληθεύεται, αν η τιμή της μετοχής στο χρόνο 0, S_0, ισούται με το συστατικό της τιμής της μετοχής που περιέχει ρίσκο και σ είναι η μεταβλητότητα της διαδικασίας που ακολουθείται από το συστατικό αυτό. Αρκετοί ερευνητές διαφωνούν με την προσέγγιση αυτή για τον υπολογισμό της αξίας ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος προαίρεσης γραμμένο σε μετοχή που αποδίδει μέρισμα, καθώς ισχυρίζονται ότι η μεταβλητότητα θα πρέπει να εφαρμόζεται στην τιμή της μετοχής και όχι στην τιμή της μετοχής ελαττωμένη κατά την παρούσα αξία των μερισμάτων. Πρακτικά οι τύποι των Black-Scholes-Merton δύναται να εφαρμοστούν υπό την προϋπόθεση ότι η τιμή της μετοχής μειώνεται κατά την παρούσα αξία όλων των μερισμάτων που δίνονται κατά τη διάρκεια ζωής του δικαιώματος και η προεξόφληση γίνεται από την προ μερίσματος ημερομηνία με το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου.

Ας υποθέσουμε ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα προαίρεσης σε μια μετοχή, όπου έχουν ανακοινωθεί οι προ μερίσματος ημερομηνίες σε 2 και 5 μήνες (Hull, 2009). Το μέρισμα σε κάθε μια από τις προ μερίσματος ημερομηνίες αναμένεται να είναι 0.50€. Η τρέχουσα τιμή της μετοχής είναι 40€, η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος είναι 40€, η ετήσια μεταβλητότητα της τιμής της μετοχής είναι 30%, το ετήσιο επιτόκιο μηδενικού κινδύνου είναι 9% και η ημερομηνία λήξης του δικαιώματος είναι 6 μήνες. Η παρούσα αξία των μερισμάτων είναι

$$0.5e^{-0.09\times 2/12} + 0.5e^{-0.09\times 2/12} = 0.9742$$

Η τιμή του δικαιώματος προαίρεσης μπορεί να υπολογιστεί από την εξίσωση των Black-Scholes-Merton, όπου $S_0 = 40 - 0.9742 = 39.0258$, $K = 40$, $r = 0.09$, $\sigma = 0.3$ και $T = 0.5$:

$$d_1 = \frac{\ln(39.0258/40) + (0.09 + 0.3^2/2) \times 0.5}{0.3\sqrt{0.5}} = 0.2020$$

$$d_2 = \frac{\ln(39.0258/40) + (0.09 - 0.3^2/2) \times 0.5}{0.3\sqrt{0.5}} = -0.0102$$

Τότε με χρήση της συνάρτησης Excel $\mathrm{NORM.S.DIST}()$

$$N(d_1) = 0.5800$$

$$N(d_2) = 0.4959$$

Συνεπώς από την εξίσωση (5.17) έχουμε ότι

$$39.0258 \times 0.5800 - 40 \times e^{-0.09\times0.5} \times 0.4959 = 3.67$$

ή 3.67€.

Όσον αφορά τα Αμερικανικά δικαιώματα προαίρεσης, όπως αναφέρθηκε στο κεφάλαιο 2, εν τη απουσία μερισμάτων αυτά δεν πρέπει να εξασκούνται νωρίτερα από την ημερομηνία λήξης τους. Στην περίπτωση που αποδίδονται μερίσματα, αποδεικνύεται ότι η βέλτιστη ημερομηνία για πρόωρη εξάσκηση του δικαιώματος είναι η ημερομηνία αμέσως πριν την προ μερίσματος ημερομηνία (Hull, 2009). Ας υποθέσουμε ότι αναμένονται n προ μερίσματος ημερομηνίες σε χρόνους $t_1, t_2, \dots, t_n$, με $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$. Τα μερίσματα που αντιστοιχούν στις ημερομηνίες αυτές ορίζονται αντίστοιχα ως $D_1, D_2, \dots, D_n$.

Αρχικά υποθέτουμε την περίπτωση πρόωρης εξάσκησης, λίγο πριν την τελευταία προ μερίσματος ημερομηνία, δηλαδή στο χρόνο t_n. Αν το δικαίωμα προαίρεσης εξασκηθεί την ημερομηνία αυτή, ο επενδυτής απολαμβάνει

$$S(t_n) - K$$

όπου $S(t)$ η τιμή της μετοχής στο χρόνο t. Αν το δικαίωμα δεν εξασκηθεί, η τιμή της μετοχής μειώνεται σε $S(t_n) - D_n$. Όπως είδαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο, η αξία ενός δικαιώματος προαίρεσης είναι μεγαλύτερη από

$$S(t_n) - D_n - Ke^{-r(T-t_n)}$$

Συνεπάγεται ότι, εάν

$$S(t_n) - D_n - Ke^{-r(T-t_n)} \geq S(t_n) - K$$

δηλαδή

$$D_n \leq K\left[1 - e^{-r(T-t_n)}\right] \qquad \mathbf{(5.19)}$$

η πρόωρη εξάσκηση στο χρόνο t_n δεν είναι η βέλτιστη επιλογή. Από την άλλη, εάν

$$D_n > K\left[1 - e^{-r(T-t_n)}\right] \qquad \mathbf{(5.20)}$$

αποδεικνύεται ότι είναι πάντα ωφέλιμη η εξάσκηση στο χρόνο t_n για μια ικανοποιητικά υψηλή τιμή $S(t_n)$. Η ανίσωση στην σχέση (5.20) τείνει να ικανοποιείται όταν η τελευταία προ μερίσματος ημερομηνία είναι σχετικά κοντά με την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος προαίρεσης και το μέρισμα είναι αρκετά μεγάλο. Ομοίως αποδεικνύεται ότι για οποιοδήποτε $i < n$, αν

$$D_i \leq K\left[1 - e^{-r(t_{i+1}-t_i)}\right] \qquad \mathbf{(5.21)}$$

δεν είναι βέλτιστη η εξάσκηση του δικαιώματος αμέσως πριν την ημερομηνία t_i. Η ανίσωση (5.21) είναι προσεγγιστικά ισοδύναμη με

$$D_i \leq Kr(t_{i+1} - t_i)$$

Υποθέτοντας ότι η τιμή εξάσκησης K είναι σχετικά κοντά στην τρέχουσα τιμή της μετοχής, η παραπάνω ανίσωση ικανοποιείται όταν η μερισματική απόδοση της μετοχής είναι μικρότερη από το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου. Από την παραπάνω ανάλυση συμπεραίνουμε, ότι σε πολλές περιπτώσεις, η συνηθέστερη ημερομηνία για την πρόωρη εξάσκηση ενός Αμερικανικού δικαιώματος προαίρεσης είναι αυτή αμέσως πριν την προ μερίσματος ημερομηνία, t_n. Επιπλέον, αν ικανοποιούνται οι ανισώσεις (5.19) και (5.21) για $i = 1,2,\dots,n-1$, είμαστε βέβαιοι πως η πρόωρη εξάσκηση δεν είναι βέλτιστη και το Αμερικανικό δικαίωμα προαίρεσης μπορεί να αντιμετωπιστεί όπως ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα προαίρεσης (Hull, 2009).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: Greek Letters

6.1. Εισαγωγή

Ένας χρηματοοικονομικός οργανισμός, ο οποίος πουλάει εκτός χρηματιστηρίου ένα δικαίωμα προαίρεσης σε έναν πελάτη, έρχεται αντιμέτωπος με το πρόβλημα της διαχείρισης του ρίσκου που ενέχει το δικαίωμα προαίρεσης. Στην περίπτωση που το δικαίωμα προαίρεσης είναι το ίδιο με αυτό που συναλλάσσεται στο χρηματιστήριο, τότε ο χρηματοοικονομικός οργανισμός μπορεί να αντισταθμίσει το ρίσκο που δημιουργείται, αγοράζοντας στο χρηματιστήριο το ίδιο δικαίωμα προαίρεσης το οποίο πούλησε. Όταν όμως το δικαίωμα προαίρεσης είναι προσαρμοσμένο στις απαιτήσεις του πελάτη και δεν είναι όμοιο με άλλα δικαιώματα προαίρεσης που συναλλάσσονται σε μια χρηματιστηριακή αγορά, η αντιστάθμιση του κινδύνου είναι μια αρκετά περίπλοκη διαδικασία (Hull, 2009).

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται διαφορετικές προσεγγίσεις για την επίλυση του παραπάνω προβλήματος, με τη χρήση των ελληνικών γραμμάτων (Greek letters ή Greeks). Κάθε ελληνικό γράμμα μετρά μια διαφορετική διάσταση του κινδύνου που ενέχει η θέση σε ένα δικαίωμα προαίρεσης και ο στόχος του συναλλασσόμενου είναι ο υπολογισμός όλων των γραμμάτων έτσι ώστε τα ρίσκα που προκύπτουν να είναι αποδεκτά.

6.2. Αντιστάθμιση κινδύνου με χρήση του Δέλτα

Το δέλτα (Δ) ενός δικαιώματος προαίρεσης γραμμένο σε μια μετοχή είναι ο λόγος μεταβολής της τιμής αυτού του δικαιώματος προαίρεσης προς τη μεταβολή της τιμής του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου του δικαιώματος, δηλαδή της μετοχής (Hull, 2009). Συμβολίζει τον αριθμό των μεριδίων της μετοχής που πρέπει να αγοραστούν για κάθε μία θέση πώλησης σε ένα δικαίωμα προαίρεσης, προκειμένου να σχηματιστεί ένα χαρτοφυλάκιο με μηδενικό κίνδυνο. Αν υποθέσουμε ότι το δέλτα ενός δικαιώματος αγοράς είναι 0.7, στην περίπτωση που η τιμή της μετοχής μεταβάλλεται κατά ένα μικρό ποσό, η τιμή του δικαιώματος μεταβάλλεται κατά 70% αυτού του ποσού.

Κατά την ημερομηνία λήξης ενός δικαιώματος προαίρεσης, στην περίπτωση που η τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου είναι μεγαλύτερη από την τιμή εξάσκησης ενός δικαιώματος αγοράς ή είναι αρκετά μικρότερη από την τιμή εξάσκησης ενός δικαιώματος πώλησης (είναι δηλαδή in-the-money), το δέλτα ενός δικαιώματος αγοράς θα είναι ίσο με 1 και το δέλτα ενός δικαιώματος πώλησης θα είναι ίσο με -1 (Marroni, Perdomo, 2013). Ο λόγος είναι ότι τα παραπάνω δικαιώματα έχουν εικονικά 100% πιθανότητα να λήξουν όντας in-the-money και συνεπώς 100% πιθανότητα να εξασκηθούν.

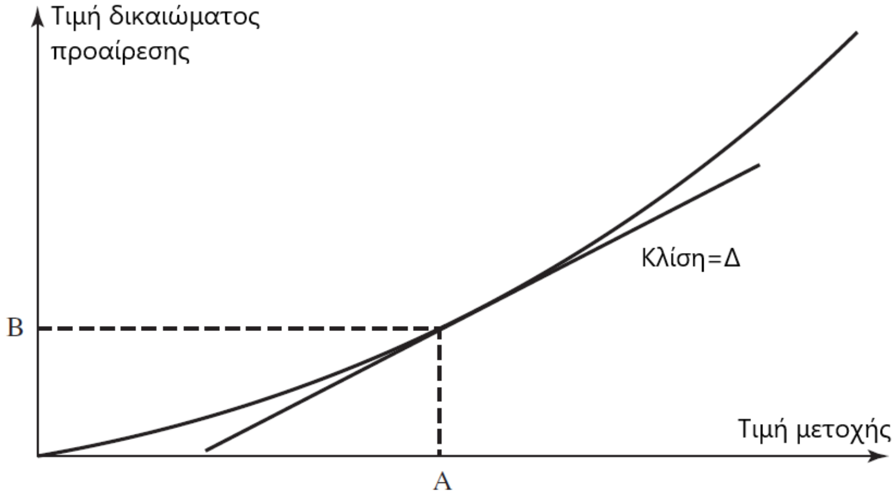
Συνεπώς, για το παραπάνω παράδειγμα, η κατοχή ενός δικαιώματος αγοράς είναι εικονικά ίδια με την κατοχή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου (το δικαίωμα αγοράς αξίας C θα συμπεριφέρεται όπως το υποκείμενο περιουσιακού στοιχείου S, συνεπώς $dC/dS = 1$), ενώ η κατοχή ενός δικαιώματος πώλησης είναι εικονικά ίδια με την κατοχή θέσης πώλησης στο υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο (το δικαίωμα πώλησης αξίας P θα συμπεριφέρεται με τρόπο αντίθετο από το υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο αξίας S, συνεπώς $dP/dS = -1$).

Ομοίως, αν η τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου είναι μικρότερη από την τιμή εξάσκησης ενός δικαιώματος αγοράς ή μεγαλύτερη από την τιμή εξάσκησης ενός δικαιώματος πώλησης (είναι δηλαδή out-of-the-money), το δέλτα του δικαιώματος προαίρεσης θα ισούται με μηδέν, όταν η διάρκεια ζωής του δικαιώματος είναι αρκετά κοντά στο τέλος της. Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι κατά τη διάρκεια ζωής ενός δικαιώματος προαίρεσης, το δέλτα θα έχει εύρος τιμών από 0 έως 1 (για δικαιώματα αγοράς) ή από -1 έως 0 (για δικαιώματα πώλησης) (Marroni, Perdomo, 2013).

Γραφικά το δέλτα απεικονίζεται ως η κλίση της γραφικής παράστασης, η οποία συσχετίζει την τιμή του δικαιώματος προαίρεσης με την τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου του (Γράφημα 24). Όταν η τιμή της μετοχής αντιστοιχεί στο σημείο Α, η τιμή του δικαιώματος προαίρεσης αντιστοιχεί στο σημείο Β και Δ είναι η κλίση της γραμμής που παρουσιάζεται στο παρακάτω γράφημα (Hull, 2009). Γενικά,

$$\Delta = \frac{\partial c}{\partial S}$$

όπου c η τιμή του δικαιώματος αγοράς και S η τιμή της μετοχής.



Πηγή: Hull (2009)

Γράφημα 24. Υπολογισμός του Δέλτα

Όπως είδαμε στο κεφάλαιο 3, το δέλτα μιας θέσης σε μετοχή αντισταθμίζει το δέλτα μιας θέσης σε ένα δικαίωμα προαίρεσης και μια θέση με μηδενικό δέλτα αναφέρεται ως θέση ουδέτερου δέλτα. Καθώς το δέλτα ενός δικαιώματος προαίρεσης δεν είναι σταθερό, η θέση του συναλλασσόμενου είναι αντισταθμισμένη κατά δέλτα ως προς τον κίνδυνο ή αλλιώς είναι θέση ουδέτερου δέλτα, μόνο για ένα σχετικά μικρό χρονικό διάστημα (Hull, 2009). Έτσι η αντιστάθμιση του κινδύνου προσαρμόζεται περιοδικά, μια διαδικασία που ονομάζεται επανεξισορρόπηση (rebalancing). Όταν η αντιστάθμιση του κινδύνου γίνεται σε σταθερή βάση, η διαδικασία αναφέρεται ως δυναμική αντιστάθμιση (dynamic hedging), ενώ όταν η αντιστάθμιση γίνεται μια φορά στην αρχή της συναλλαγής και δεν προσαρμόζεται έως την ολοκλήρωση της συναλλαγής, η διαδικασία καλείται στατική αντιστάθμιση (static hedging).

Για ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς σε μια μετοχή, αποδεικνύεται ότι

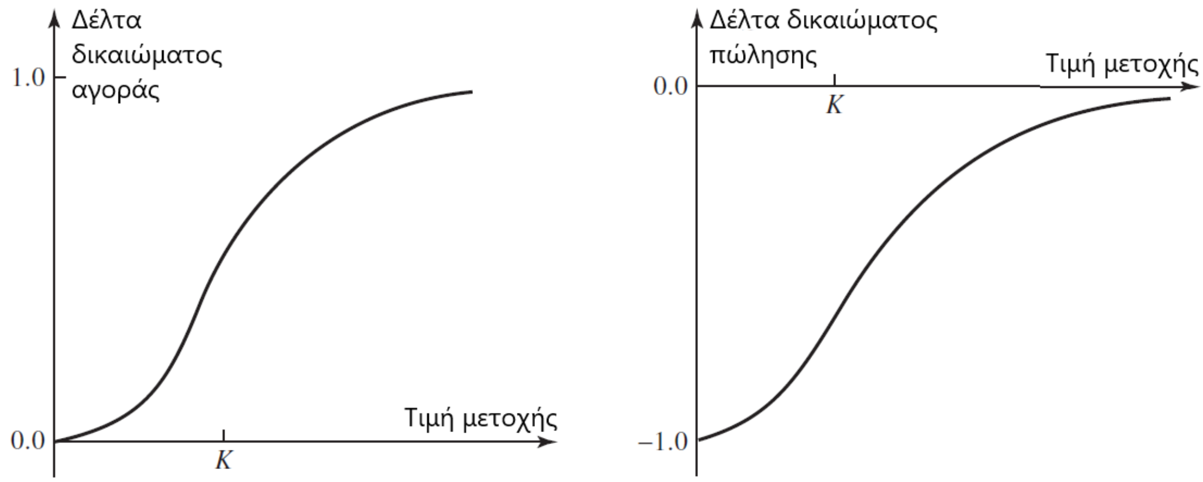
$$\Delta(call) = e^{-\delta T} N(d_1)$$

ενώ για ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης σε μια μετοχή, το δέλτα δίνεται από τον τύπο

$$\Delta(put) = -e^{-\delta T} N(-d_1)$$

όπου το d_1 είναι το ίδιο με αυτό της εξίσωσης (5.17), $N(x)$ η συνάρτηση κατανομής μιας κανονικής κατανομής και δ το μέρισμα που αποδίδεται.

Το δέλτα αντιπροσωπεύει το πόσο θα αλλάξει ένα δικαίωμα προαίρεσης ως προς μια δεδομένη αλλαγή στη μετοχή, διατηρώντας όλες τις άλλες παραμέτρους σταθερές (Marroni, Perdomo, 2013). Θυμόμαστε ότι $N(d_1)$ είναι τιμή που προκύπτει από την αθροιστική συνάρτηση κατανομής μιας τυποποιημένης κανονικής κατανομής, συνεπώς το εύρος τιμών θα είναι από 0 έως 1. Προκύπτει ότι το δέλτα ενός δικαιώματος αγοράς θα έχει εύρος τιμών από 0 έως $e^{-\delta T}$, ενώ το δέλτα ενός δικαιώματος πώλησης από $-e^{-\delta T}$ έως 0. Καθώς η τιμή της μετοχής αυξάνεται, το δικαίωμα αγοράς γίνεται περισσότερο in-the-money και η τιμή του $N(d_1)$ πλησιάζει το 1, ενώ όταν η τιμή της μετοχής μειώνεται, το δικαίωμα αγοράς γίνεται περισσότερο out-of-the-money και η τιμή του $N(d_1)$ πλησιάζει το 0. Όταν το δικαίωμα πλησιάζει την ημερομηνία λήξης του, το δέλτα θα τείνει είτε προς το 0, αν το δικαίωμα προαίρεσης είναι out-of-the-money, ενώ θα τείνει προς το 1 αν αυτό είναι in-the-money.

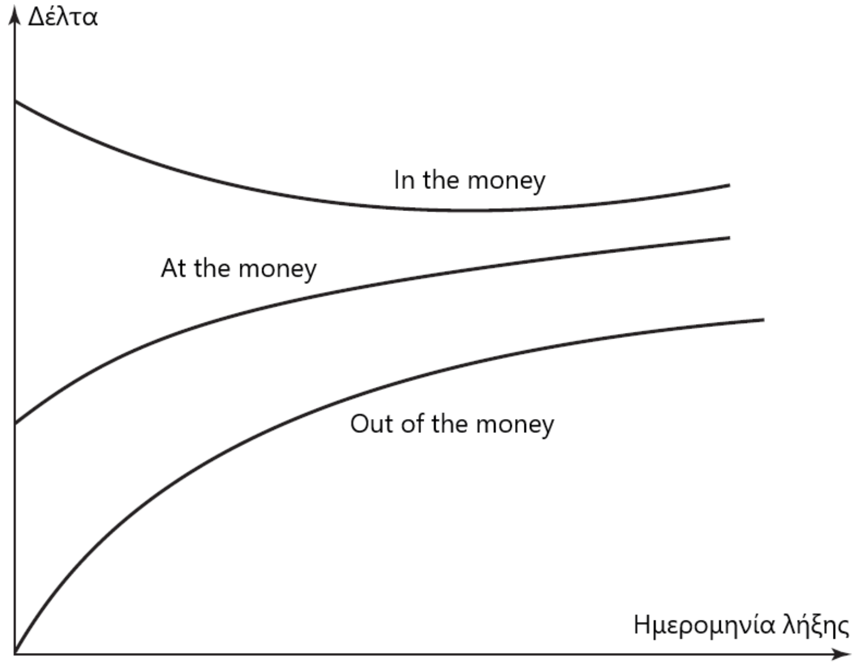


(α) (β)

Πηγή: Hull (2009)

Γράφημα 25. Μεταβολή του Δέλτα: (α) δικαιώματος αγοράς, (β) δικαιώματος πώλησης, ως προς την τιμή μετοχής που δεν αποδίδει μέρισμα

Στο γράφημα 26 απεικονίζεται η μεταβολή του δέλτα ως προς την ημερομηνία λήξης δικαιώματος αγοράς που είναι in-the-money, at-the-money και out-of-the-money.



Πηγή: Hull (2009)

Γράφημα 26. Μεταβολή του Δέλτα ως προς την ημερομηνία λήξης δικαιώματος αγοράς

Υποθέτουμε ένα δικαίωμα αγοράς σε μια μετοχή που δεν αποδίδει μέρισμα, όπου η τιμή της μετοχής είναι 49€, η τιμή εξάσκησης είναι 50€, το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου είναι 5%, το χρονικό διάστημα έως την ημερομηνία λήξης είναι 20 εβδομάδες (=0.3846 χρόνια) και η μεταβλητότητα είναι 20% (Hull, 2009). Σε αυτήν την περίπτωση,

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{49}{50}\right) + \left(0.05 + \frac{0.2^2}{2}\right) \times 0.3846}{0.2 \times \sqrt{0.3846}} = 0.0542$$

Το δέλτα είναι $N(d_1)$ ή 0.522. Όταν η τιμή της μετοχής μεταβάλλεται κατά ΔS, η τιμή του δικαιώματος προαίρεσης μεταβάλλεται κατά $0.0542\Delta S$.

Η αντιστάθμιση του κινδύνου ενός δικαιώματος προαίρεσης με τη χρήση του δέλτα αναφέρεται ως delta hedging και επιτυγχάνεται αποκτώντας μια θέση στην υποκείμενη μετοχή, ποσότητας που υποδεικνύεται από το δέλτα του δικαιώματος προαίρεσης, ώστε να μην υπάρχει έκθεση σε μικρές ανοδικές ή καθοδικές κινήσεις της τιμής της μετοχής (Marroni, Perdomo, 2013). Συνεπώς για την αντιστάθμιση κινδύνου ενός μόνο δικαιώματος προαίρεσης με χρήση του δέλτα, απαιτείται ο υπολογισμός του δέλτα του δικαιώματος και ύστερα η αγορά ή η πώληση δέλτα μεριδίων της μετοχής. Γενικότερα η διαδικασία delta hedging αναφέρεται στη διαχείριση του δέλτα ενός χαρτοφυλακίου, τροποποιώντας κατάλληλα τις θέσεις που απαρτίζουν το χαρτοφυλάκιο. Ένα χαρτοφυλάκιο ουδέτερου δέλτα αναφέρεται στην κατασκευή ενός χαρτοφυλακίου με μηδενικό δέλτα, που σημαίνει ότι η αξία του χαρτοφυλακίου δε θα αλλάξει σε περίπτωση μικρών κινήσεων της τιμής του χρηματοοικονομικού μέσου.

Το δέλτα ενός χαρτοφυλακίου αποτελούμενο από δικαιώματα προαίρεσης ή άλλα παράγωγα, τα οποία υπόκεινται σε ένα περιουσιακό στοιχείο του οποίου η τιμή είναι S είναι

$$\frac{\partial \Pi}{\partial S}$$

όπου Π η αξία του χαρτοφυλακίου.

Το δέλτα ενός χαρτοφυλακίου δύναται να υπολογιστεί από τα δέλτα των εκάστοτε δικαιωμάτων προαίρεσης από τα οποία αποτελείται αυτό (Hull, 2009). Αν το χαρτοφυλάκιο αποτελείται από πλήθος w_i δικαιωμάτων προαίρεσης i, $(1 \leq i \leq n)$, το δέλτα του χαρτοφυλακίου δίνεται από τον τύπο

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} w_i \Delta_i$$

όπου Δ_i το δέλτα του i-οστού δικαιώματος προαίρεσης. Ο τύπος αυτός μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της θέσης στο υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο που πρέπει να ληφθεί, ώστε το δέλτα του χαρτοφυλακίου να είναι μηδενικό και το χαρτοφυλάκιο να είναι ουδέτερου δέλτα.

6.3. Θήτα

Το θήτα (theta ή Θ) ενός χαρτοφυλακίου δικαιωμάτων προαίρεσης είναι ο λόγος της μεταβολής της αξίας του χαρτοφυλακίου προς την πάροδο του χρόνου, με όλους τους άλλους παράγοντες σταθερούς. Για ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς σε μια μετοχή προκύπτει ότι (Cuthbertson et al., 2020)

$$\Theta(call) = -\frac{S_0 N'(d_1)\sigma e^{-\delta T}}{2\sqrt{T}} - rKe^{-rT}N(d_2) + \delta S_0 N(d_1) e^{-\delta T}$$

όπου τα d_1 και d_2 ορίζονται στην εξίσωση (5.17) και

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \qquad \mathbf{(6.1)}$$

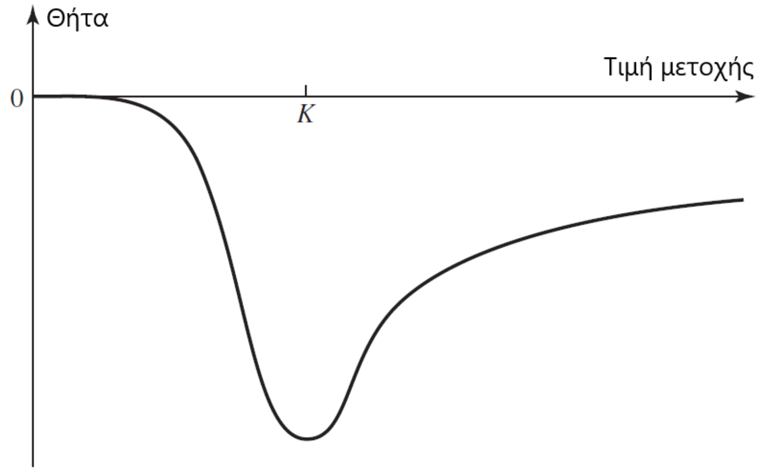
η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για μια τυποποιημένη κανονική κατανομή, ενώ δ το μέρισμα που αποδίδει η μετοχή.

Για ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης στη μετοχή,

$$\Theta(put) = -\frac{S_0 N'(d_1)\sigma e^{-\delta T}}{2\sqrt{T}} + rKe^{-rT}N(-d_2) + \delta S_0 N(-d_1)e^{-\delta T} > 0 \text{ ή } < 0$$

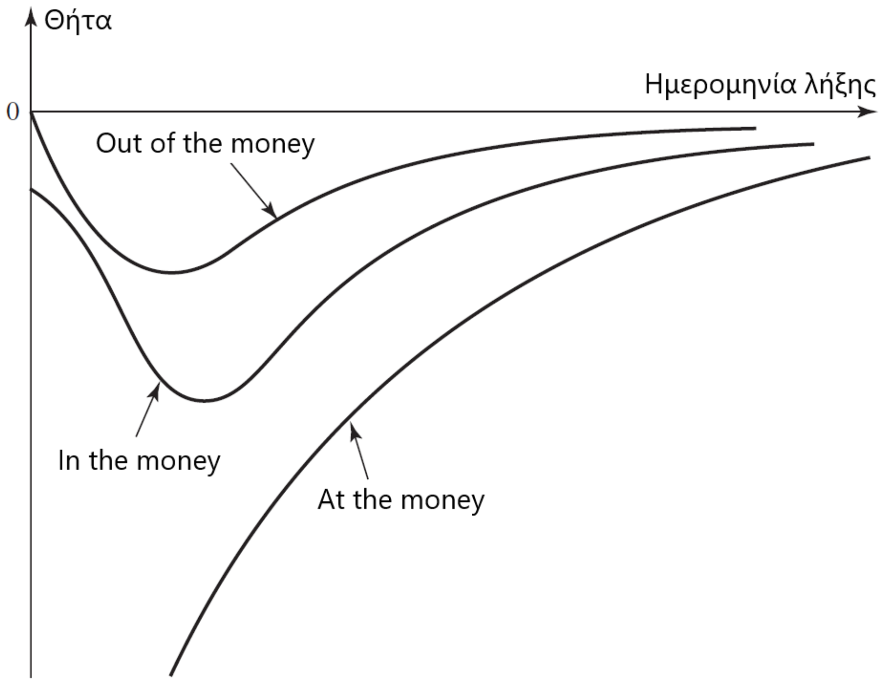
Αν $\delta = 0$, τότε θα προκύπτει το θήτα της εξίσωσης των Black-Scholes-Merton για ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς σε μια μετοχή που δεν αποδίδει μέρισμα. Στους παραπάνω τύπους ο χρόνος μετριέται σε χρόνια, παραδείγματος χάριν αν $\theta = 20$, τότε η αλλαγή στην τιμή του δικαιώματος στο πέρασμα δύο ημερών διαπραγμάτευσης θα είναι $-20 \times (2/252) = -0.16$ (16 λεπτά του ευρώ) (Cuthbertson et al., 2020). Το θήτα είναι συνήθως αρνητικό για μια θέση αγοράς σε ένα δικαίωμα προαίρεσης, καθώς με την πάροδο του χρόνου αυτό χάνει την αξία του. Το θήτα δεν αποτελεί παράμετρο αντιστάθμισης κινδύνου παρόμοιας με το δέλτα. Υπάρχει αβεβαιότητα για τη μελλοντική τιμή της μετοχής και είναι λογική η αντιστάθμιση του κινδύνου ως προς τις μεταβολές της, όμως δεν υπάρχει αβεβαιότητα όσον αφορά την πάροδο του χρόνου οπότε και δεν έχει νόημα οποιαδήποτε αντιστάθμιση κινδύνου.

Η μεταβολή του θήτα ως προς την τιμή μιας μετοχής για ένα δικαίωμα αγοράς σε μετοχή απεικονίζεται στο γράφημα 27 (Hull, 2009). Όταν η τιμή της μετοχής είναι χαμηλή, το θήτα είναι κοντά στο μηδέν. Για ένα δικαίωμα αγοράς που είναι at-the-money, το θήτα είναι αρκετά μεγάλο και αρνητικό και καθώς αυξάνεται η τιμή της μετοχής, το θήτα τείνει στο $-rKe^{-rT}$. Στο γράφημα 28 απεικονίζεται η μεταβολή του θήτα ως προς την ημερομηνία λήξης δικαιωμάτων αγοράς in-the-money, at-the-money και out-of-the-money.



Πηγή: Hull (2009)

Γράφημα 27. Μεταβολή του Θήτα δικαιώματος αγοράς ως προς την τιμή της μετοχής



Πηγή: Hull (2009)

Γράφημα 28. Μεταβολή του Θήτα ως προς την ημερομηνία λήξης δικαιώματος αγοράς

Υποθέτουμε ένα δικαίωμα αγοράς σε μια μετοχή που δεν αποδίδει μέρισμα, όπου η τιμή της μετοχής είναι 49€, η τιμή εξάσκησης είναι 50€, το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου είναι 5%, το χρονικό διάστημα έως την ημερομηνία λήξης είναι 20 εβδομάδες (=0.3846 χρόνια) και η μεταβλητότητα είναι 20% (Hull, 2009). Τότε, $S_0 = 49$, $K = 50$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.2$ και $T = 0.3846$. Το θήτα του δικαιώματος προαίρεσης θα είναι

$$-\frac{S_0 N'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} - rKe^{-rT}N(d_2) = -4.31$$

Το θήτα είναι $-4.31/365 = -0.0118$ ανά ημέρα του ημερολογίου ή $-4.31/252 = -0.0171$ ανά ημέρα διαπραγμάτευσης.

6.4. Γάμμα

Όπως αναφέρθηκε, το δέλτα αντιπροσωπεύει το πόσο θα αλλάξει ένα δικαίωμα προαίρεσης ως προς μια μικρή αλλαγή στην τιμή της μετοχής. Αν αυτή η αλλαγή είναι αρκετά μεγάλη, το ελληνικό γράμμα που χρησιμοποιείται είναι το γάμμα (Pirie, 2017). Το γάμμα (gamma ή Γ) ενός δικαιώματος προαίρεσης ορίζεται ως η μεταβολή του δέλτα του δικαιώματος προαίρεσης ως προς μια αλλαγή στην τιμή της υποκείμενης μετοχής, με όλους τους άλλους παράγοντες σταθερούς. Για ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς ή πώλησης σε μια μετοχή που αποδίδει μέρισμα, το γάμμα δίνεται από τον τύπο

$$\Gamma = \frac{N'(d_1)e^{-\delta T}}{S_0 \sigma \sqrt{T}}$$

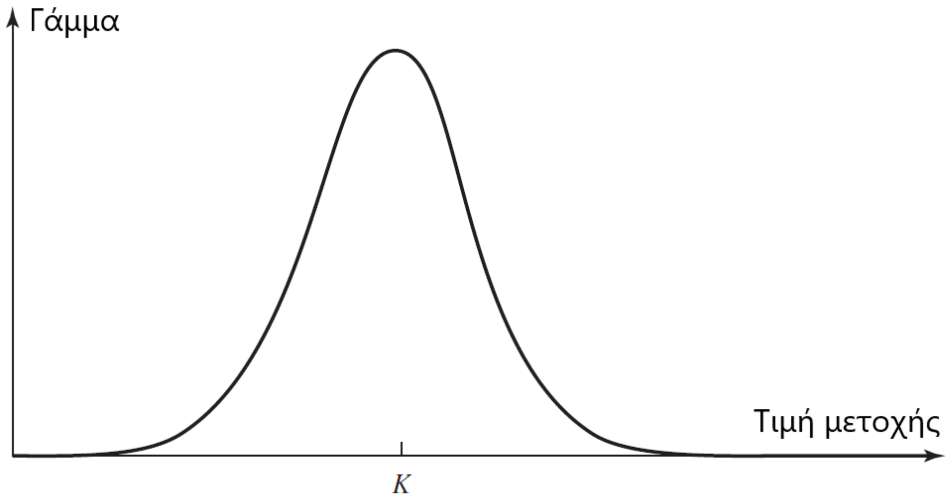
όπου το d_1 ορίζεται στην εξίσωση (5.17) και το $N'(x)$ δίνεται από την εξίσωση (6.1) και δ το μέρισμα που αποδίδει η μετοχή.

Το γάμμα (gamma ή Γ) ενός χαρτοφυλακίου δικαιωμάτων προαίρεσης ενός περιουσιακού στοιχείου είναι η δεύτερη μερική παράγωγος της αξίας του χαρτοφυλακίου ως προς την τιμή της μετοχής:

$$\Gamma = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2}$$

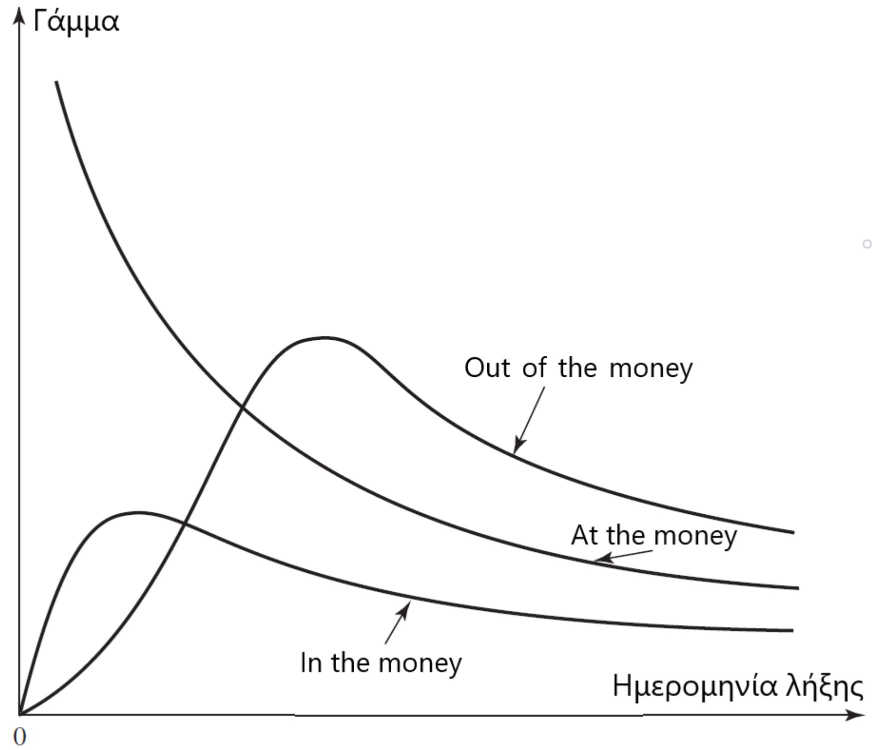
Όταν το γάμμα είναι μικρό, το δέλτα μεταβάλλεται αργά, με αποτέλεσμα οι προσαρμογές που απαιτούνται ώστε το χαρτοφυλάκιο να παραμείνει ουδέτερου δέλτα να μην είναι συχνές (Hull, 2009). Ωστόσο, όταν το γάμμα είναι αρκετά αρνητικό ή αρκετά θετικό, το δέλτα γίνεται ευαίσθητο ως προς την τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου και ενέχει σημαντικό κίνδυνο, το να μη γίνουν προσαρμογές σε ένα χαρτοφυλάκιο ουδέτερου δέλτα για αρκετό χρονικό διάστημα.

Το γάμμα μιας θέσης αγοράς είναι πάντα θετικό και μεταβάλλεται ως προς την τιμή της μετοχής όπως φαίνεται στο γράφημα 29. Η μεταβολή του γάμμα ως προς την ημερομηνία λήξης δικαιωμάτων προαίρεσης που είναι out-of-the-money, at-the-money και in-the-money απεικονίζεται στο γράφημα 30. Για ένα at-the-money δικαίωμα προαίρεσης, το γάμμα αυξάνεται καθώς ο χρόνος πλησιάζει προς την ημερομηνία λήξης του (Hull, 2009). Δικαιώματα προαίρεσης at-the-money με μικρή διάρκεια ζωής έχουν υψηλά γάμμα, που σημαίνει ότι η αξία της θέσης του κατόχου του δικαιώματος είναι επηρεάζεται σε μεγάλο βαθμό από μεταβολές της τιμής της μετοχής.



Πηγή: Hull (2009)

Γράφημα 29. Μεταβολή του Γάμμα δικαιώματος αγοράς ως προς την τιμή της μετοχής



Πηγή: Hull (2009)

Γράφημα 30. Μεταβολή του Γάμμα ως προς την ημερομηνία λήξης δικαιώματος προαίρεσης

Υποθέτουμε ένα δικαίωμα αγοράς σε μια μετοχή που δεν αποδίδει μέρισμα, όπου η τιμή της μετοχής είναι 49€, η τιμή εξάσκησης είναι 50€, το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου είναι 5%, το χρονικό διάστημα έως την ημερομηνία λήξης είναι 20 εβδομάδες (=0.3846 χρόνια) και η μεταβλητότητα είναι 20% (Hull, 2009). Τότε, $S_0 = 49$, $K = 50$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.2$ και $T = 0.3846$. Το γάμμα του δικαιώματος προαίρεσης θα είναι

$$\frac{N'(d_1)}{S_0 \sigma \sqrt{T}} = 0.066$$

Όταν η τιμή της μετοχής μεταβάλλεται κατά ΔS, το δέλτα του δικαιώματος προαίρεσης μεταβάλλεται κατά $0.066\Delta S$.

6.5. Βέγκα

Μέχρι στιγμής έχουμε υποθέσει πως η μεταβλητότητα του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου ενός παραγώγου είναι σταθερή. Στην πραγματικότητα, η μεταβλητότητα αλλάζει με την πάροδο του χρόνου, το οποίο σημαίνει ότι η αξία ενός παραγώγου υπόκειται σε αλλαγές εξαιτίας των κινήσεων της μεταβλητότητας, αλλά και των μεταβολών της τιμής του περιουσιακού στοιχείου και της παρόδου του χρόνου (Hull, 2009). Το βέγκα (vega) ενός χαρτοφυλακίου, $\mathcal{V}$, είναι ο λόγος της μεταβολής της αξίας του χαρτοφυλακίου προς τη μεταβλητότητα του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου

$$\mathcal{V} = \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma}$$

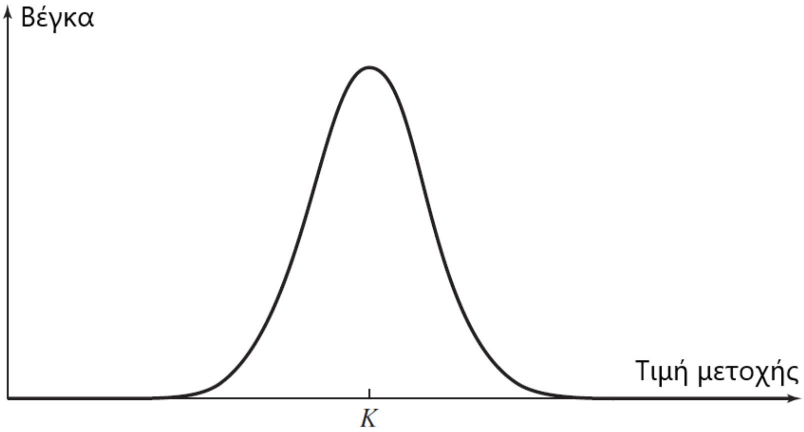
Για ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς ή πώλησης σε μια μετοχή που αποδίδει μέρισμα, το βέγκα δίνεται από τον τύπο

$$\mathcal{V} = e^{-\delta T} S_0 \sqrt{T} N'(d_1)$$

όπου το d_1 ορίζεται στην εξίσωση (5.17) και το $N'(x)$ δίνεται από την εξίσωση (6.1).

Αν το βέγκα είναι υψηλά θετικό ή υψηλά αρνητικό, η αξία του χαρτοφυλακίου είναι πολύ ευαίσθητη σε μικρές αλλαγές της μεταβλητότητας. Αν αυτό είναι κοντά στο μηδέν, οι αλλαγές της μεταβλητότητας έχουν σχετικά μικρή επίδραση στην αξία του χαρτοφυλακίου (Hull, 2009).

Το βέγκα μιας θέσης αγοράς σε ένα δικαίωμα προαίρεσης Ευρωπαϊκού ή Αμερικανικού τύπου είναι πάντα θετικό, ενώ το βέγκα μιας θέσης πώλησης σε ένα δικαίωμα προαίρεσης είναι αρνητικό (Cuthbertson et al., 2020). Στο γράφημα 31 απεικονίζεται η μεταβολή του βέγκα δικαιώματος αγοράς ως προς την τιμή της μετοχής.



Πηγή: Hull (2009)

Γράφημα 31. Μεταβολή του Βέγκα δικαιώματος αγοράς ως προς την τιμή της μετοχής

Υποθέτουμε ένα δικαίωμα αγοράς σε μια μετοχή που δεν αποδίδει μέρισμα, όπου η τιμή της μετοχής είναι 49€, η τιμή εξάσκησης είναι 50€, το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου είναι 5%, το χρονικό διάστημα έως την ημερομηνία λήξης είναι 20 εβδομάδες (=0.3846 χρόνια) και η μεταβλητότητα είναι 20% (Hull, 2009). Τότε, $S_0 = 49$, $K = 50$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.2$ και $T = 0.3846$. Το βέγκα του δικαιώματος προαίρεσης θα είναι

$$S_0\sqrt{T}N'(d_1) = 12.1$$

Συνεπώς μια αύξηση της τάξης του 1% στη μεταβλητότητα (21% από 20%), αυξάνει την αξία του δικαιώματος προαίρεσης κατά περίπου $0.01 \times 12.1 = 0.121$.

6.6. Rho

Το rho ενός χαρτοφυλακίου είναι ο λόγος της μεταβολής της αξίας του χαρτοφυλακίου ως προς το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου (Pirie, 2017)

$$\frac{\partial \Pi}{\partial r}$$

Αποτελεί ένα μέτρο ευαισθησίας της αξίας του χαρτοφυλακίου ως προς μια αλλαγή στο επιτόκιο μηδενικού κινδύνου, όλων των άλλων παραγόντων σταθερών. Για δικαιώματα με υποκείμενα περιουσιακά στοιχεία μετοχές που δεν αποδίδουν μέρισμα, η ευαισθησία στα επίπεδα των επιτοκίων προκύπτει από δύο πηγές. Από τη μία, τα επίπεδα των επιτοκίων επηρεάζουν την αξία της μέλλουσας τιμής του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου (Marroni, Perdomo, 2013). Υψηλά επίπεδα επιτοκίων αντικατοπτρίζουν υψηλές μέλλουσες τιμές και συνεπώς επηρεάζουν θετικά την τιμή ενός δικαιώματος αγοράς και αρνητικά την τιμή ενός δικαιώματος πώλησης. Από την άλλη, τα επίπεδα των επιτοκίων επηρεάζουν τον προεξοφλητικό παράγοντα που χρησιμοποιείται στη διαδικασία αποτίμησης. Υψηλά επίπεδα επιτοκίων οδηγούν σε χαμηλότερους προεξοφλητικούς παράγοντες και εν συνεχεία σε χαμηλότερες τιμές τόσο για τα δικαιώματα αγοράς όσο και για τα δικαιώματα πώλησης. Τα αντίθετα συμπεράσματα προκύπτουν στην περίπτωση χαμηλών επιπέδων επιτοκίων. Για ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς σε μια μετοχή που δεν αποδίδει μέρισμα,

$$\mathrm{rho}(call) = KTe^{-rt}N(d_2)$$

όπου το d_2 ορίζεται στην εξίσωση (5.17). Για ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης,

$$\mathrm{rho}(put) = -KTe^{-rt}N(-d_2)$$

Υποθέτουμε ένα δικαίωμα αγοράς σε μια μετοχή που δεν αποδίδει μέρισμα, όπου η τιμή της μετοχής είναι 49€, η τιμή εξάσκησης είναι 50€, το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου είναι 5%, το χρονικό διάστημα έως την ημερομηνία λήξης είναι 20 εβδομάδες (=0.3846 χρόνια) και η μεταβλητότητα είναι 20% (Hull, 2009). Τότε, $S_0 = 49$, $K = 50$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.2$ και $T = 0.3846$. Το rho του δικαιώματος προαίρεσης θα είναι

$$KTe^{-rt}N(d_2) = 8.91$$

Αυτό σημαίνει ότι μια αύξηση της τάξης του 1% στο επιτόκιο (6% από 5%). αυξάνει την αξία του δικαιώματος προαίρεσης κατά περίπου $0.01 \times 8.91 = 0.0891$.

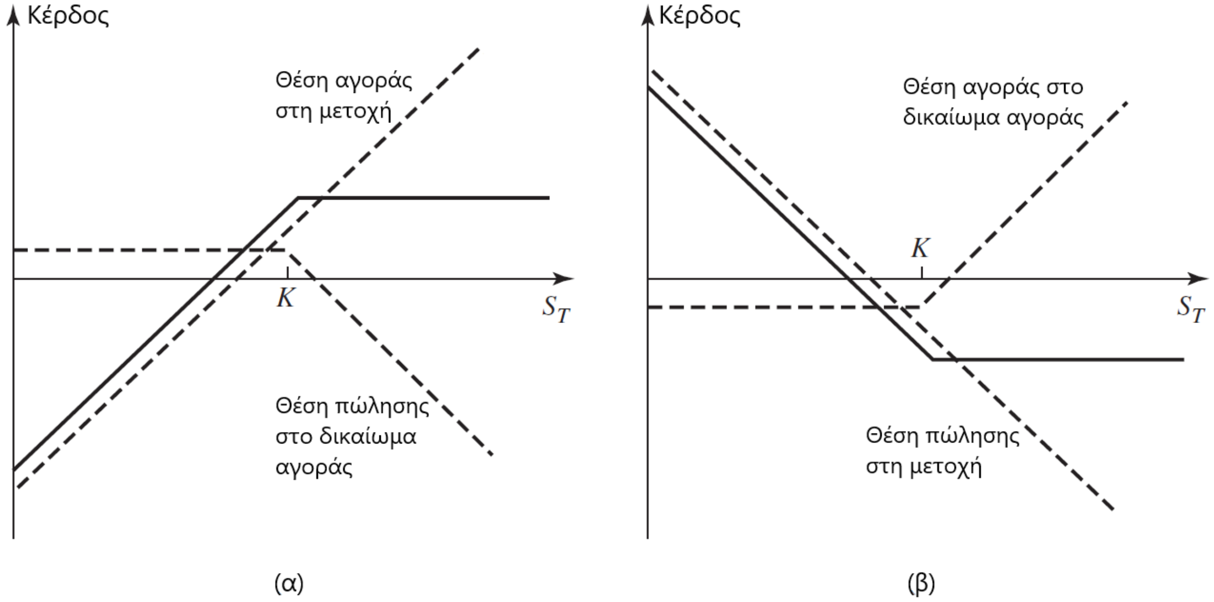
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7: Στρατηγικές τοποθέτησης σε δικαιώματα προαίρεσης

7.1. Εισαγωγή

Μέχρι στιγμής έχουν παρουσιαστεί πληρωμές που μπορεί να έχει ένας επενδυτής αναλόγως τη θέση που έχει λάβει σε ένα δικαίωμα προαίρεσης (Marroni, Perdomo, 2014). Στην παρούσα παράγραφο θα παρουσιαστούν στρατηγικές τοποθέτησης που μπορεί να λάβει ένας επενδυτής ταυτοχρόνως σε περισσότερα από ένα δικαίωμα προαίρεσης.

7.2. Καλυμμένο δικαίωμα αγοράς

Έστω ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο συνίσταται από μία θέση αγοράς σε μία μετοχή και από μία θέση πώλησης σε ένα δικαίωμα αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου (Hull, 2009). Η τοποθέτηση αυτή καλείται καλυμμένο δικαίωμα αγοράς (covered call). Η θέση αγοράς σε μία μετοχή προστατεύει τον επενδυτή από την πληρωμή από τη θέση πώλησης του δικαιώματος αγοράς, η οποία είναι αναγκαία στην περίπτωση μεγάλης αύξησης της τιμής της μετοχής. Αντίθετη από αυτή τη στρατηγική είναι η απόκτηση θέσης πώλησης σε μία μετοχή και θέσης αγοράς σε ένα δικαίωμα αγοράς. Στο γράφημα 32α παρουσιάζονται τα κέρδη από τη στρατηγική του καλυμμένου δικαιώματος αγοράς, όπου S_T η τιμή της μετοχής στην ημερομηνία λήξης και K η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος, ενώ η διακεκομμένη γραμμή παριστάνει τη σχέση μεταξύ του κέρδους και της τιμής της μετοχής από τις διαφορετικές θέσεις από τις οποίες αποτελείται το χαρτοφυλάκιο και η συνεχής γραμμή παριστάνει τη σχέση μεταξύ του συνολικού κέρδους και της τιμής της μετοχής για το χαρτοφυλάκιο. Στο γράφημα 32β παρουσιάζονται τα κέρδη από την αντίθετη του καλυμμένου δικαιώματος αγοράς στρατηγική.

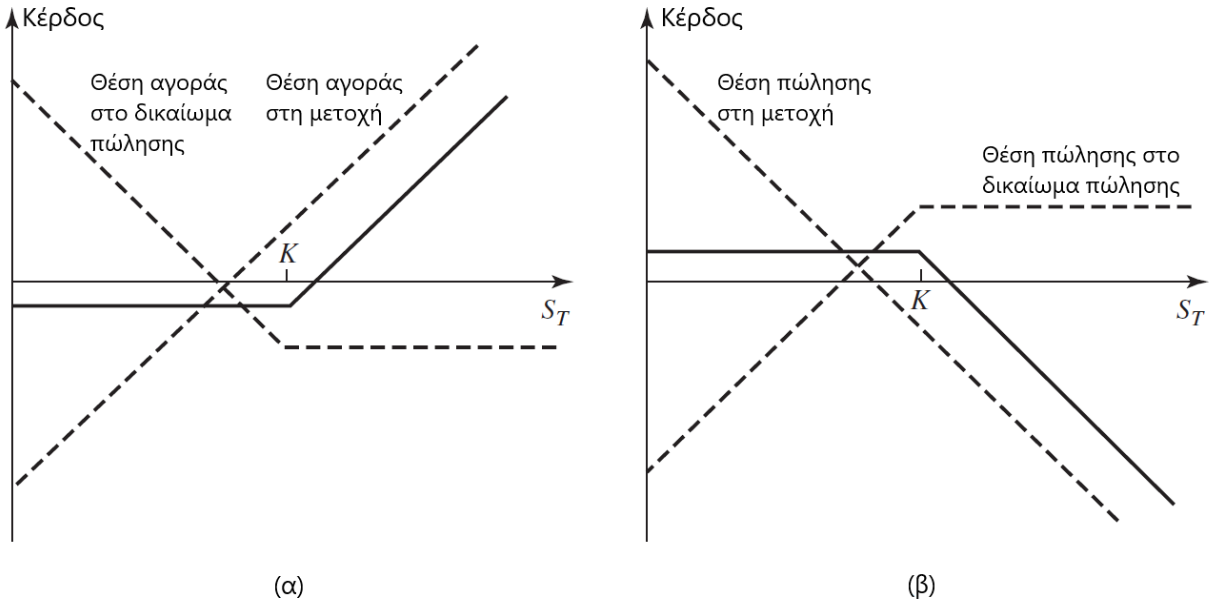


Πηγή: Hull (2009)

Γράφημα 32. Κέρδος από: (α) θέση αγοράς σε μια μετοχή και θέση πώλησης σε ένα δικαίωμα αγοράς, (β) θέση πώλησης σε μια μετοχή και θέση αγοράς σε ένα δικαίωμα αγοράς

7.3. Προστατευτικό δικαίωμα πώλησης

Το προστατευτικό δικαίωμα πώλησης (protective put) συνίσταται από τη θέση αγοράς σε ένα δικαίωμα πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου και τη θέση αγοράς σε μία μετοχή (Hull, 2009). Η θέση αγοράς στο δικαίωμα πώλησης καλύπτει τον επενδυτή έναντι μεγάλης αύξησης της τιμής της μετοχής. Αντίθετη από αυτή τη στρατηγική είναι η θέση πώλησης σε μία μετοχής και η θέση πώλησης σε ένα δικαίωμα πώλησης. Στο γράφημα 33α παρουσιάζονται τα κέρδη από τη στρατηγική του προστατευτικού δικαιώματος πώλησης, όπου S_T η τιμή της μετοχής στην ημερομηνία λήξης και K η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος ενώ η διακεκομμένη γραμμή παριστάνει τη σχέση μεταξύ του κέρδους και της τιμής της μετοχής από τις διαφορετικές θέσεις από τις οποίες αποτελείται το χαρτοφυλάκιο και η συνεχής γραμμή παριστάνει τη σχέση μεταξύ του συνολικού κέρδους και της τιμής της μετοχής για το χαρτοφυλάκιο. Στο γράφημα 33β παρουσιάζονται τα κέρδη από την αντίθετη του προστατευτικού δικαιώματος αγοράς στρατηγική.



Πηγή: Hull (2009)

Γράφημα 33. Κέρδος από: (α) θέση αγοράς σε μια μετοχή και θέση αγοράς σε ένα δικαίωμα πώλησης, (β) θέση πώλησης σε μια μετοχή και θέση πώλησης σε ένα δικαίωμα αγοράς

Οι γραφικές παραστάσεις του κέρδους στα παραπάνω γραφήματα είναι παρόμοιες με τις γραφικές παραστάσεις των πληρωμών από τις θέσεις που παρουσιάστηκαν στην παράγραφο 2.2 (Hull, 2009). Το γεγονός αυτό υποστηρίζεται και από τη σχέση ισοτιμίας δικαιωμάτων πώλησης και αγοράς (put-call parity) που παρουσιάστηκε μέσω της ισότητας (2.10), η οποία δείχνει ότι η θέση αγοράς σε ένα δικαίωμα πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου σε συνδυασμό με την αγορά της μετοχής είναι ισοδύναμη με τη θέση αγοράς σε ένα δικαίωμα αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου και ένα χρηματικό ποσό (αξίας $D + Ke^{-rT}$). Η παραπάνω ισότητα (2.10) μπορεί να τροποποιηθεί ώστε:

$$S_0 - c = Ke^{-rT} + D - p$$

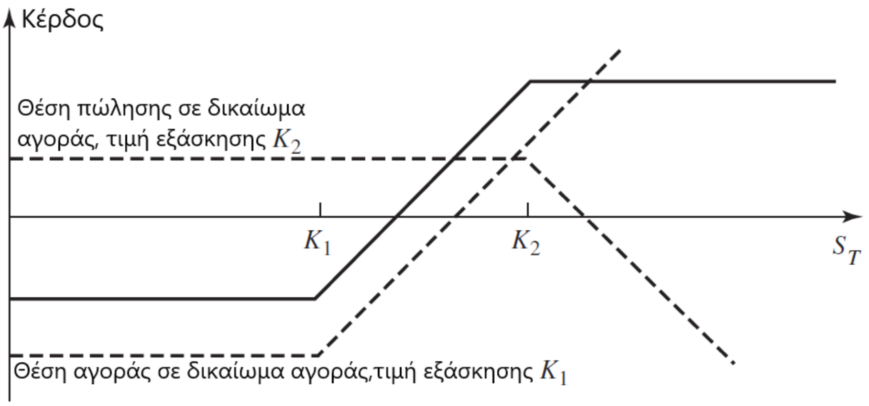
η οποία δείχνει ότι η θέση αγοράς σε μια μετοχή σε συνδυασμό με τη θέση πώλησης σε ένα δικαίωμα αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου είναι ισοδύναμη με τη θέση πώλησης ενός δικαιώματος πώλησης σε συνδυασμό με ένα χρηματικό ποσό (αξίας $Ke^{-rT} + D$).

7.4. Option Spreads

Τα ανοίγματα δικαιωμάτων προαίρεσης (option spreads) αποτελούν μια στρατηγική η οποία περιλαμβάνει τη θέση σε δικαιώματα αγοράς και πώλησης, όπου κάποια δικαιώματα αγοράζονται και κάποια πωλούνται (Marroni, Perdomo, 2014). Αν τα ανοίγματα δικαιωμάτων προαίρεσης σχηματίζονται αποκλειστικά είτε από δικαιώματα αγοράς είτε δικαιώματα πώλησης, αναφέρονται ως κάθετα ανοίγματα δικαιωμάτων προαίρεσης (vertical spreads), ενώ δύναται να σχηματιστούν και ανοίγματα που αποτελούνται από δικαιώματα αγοράς και πώλησης ταυτόχρονα προσθέτοντας μεγαλύτερη πολυπλοκότητα, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι οι στρατηγικές αυτές πλεονεκτούν των κάθετων ανοιγμάτων δικαιωμάτων προαίρεσης.

7.4.1. Bull Spread

Το ανοδικό άνοιγμα δικαιωμάτων προαίρεσης (bull spread) μπορεί να σχηματιστεί λαμβάνοντας θέση αγοράς ένα δικαίωμα αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου σε μία μετοχή με συγκεκριμένη τιμή εξάσκησης και θέση πώλησης σε ένα δικαίωμα αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου στην ίδια μετοχή με μεγαλύτερη τιμή εξάσκησης (Hull, 2009). Τα δύο δικαιώματα έχουν την ίδια ημερομηνία λήξης. Καθώς η αξία ενός δικαιώματος αγοράς μειώνεται όταν αυξάνεται η τιμή εξάσκησής του, η αξία του δικαιώματος που πωλείται είναι πάντα μικρότερη από την αξία του δικαιώματος που αγοράζεται. Συνεπώς, όταν ένα bull spread σχηματίζεται από δικαιώματα αγοράς, απαιτεί μια αρχική επένδυση. Η παραπάνω στρατηγική απεικονίζεται στο γράφημα 34. Τα κέρδη από τις δύο διαφορετικές θέσεις παρουσιάζονται από τις διακεκομμένες γραμμές, ενώ το συνολικό κέρδος από τη στρατηγική, το οποίο είναι το άθροισμα των κερδών από τις επιμέρους θέσεις, παρουσιάζεται από τη συνεχή γραμμή. Η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος αγοράς που αγοράστηκε συμβολίζεται με K_1, η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος αγοράς που πωλήθηκε συμβολίζεται με K_2 και με S_T συμβολίζεται η τιμή της μετοχής κατά την ημερομηνία λήξης των δύο δικαιωμάτων. Στον πίνακα 5 παρουσιάζεται η συνολική πληρωμή από τη στρατηγική αυτή στις εκάστοτε περιπτώσεις. Αν η τιμή της μετοχής είναι μεγαλύτερη από τη μεγαλύτερη εκ των δύο τιμών εξάσκησης των δικαιωμάτων, η πληρωμή θα είναι η διαφορά των τιμών εξάσκησης, $K_2 - K_1$. Αν η τιμή της μετοχής κατά την ημερομηνία λήξης των δικαιωμάτων είναι μεταξύ των τιμών εξάσκησης, τότε η πληρωμή θα είναι $S_T - K_1$. Αν η τιμή της μετοχής κατά την ημερομηνία λήξης των δικαιωμάτων είναι μικρότερη από τη μικρότερη τιμή εξάσκησης, η πληρωμή θα είναι μηδενική.



Πηγή: Hull (2009)

Γράφημα 34. Κέρδος από ανοδικό άνοιγμα δικαιωμάτων σχηματιζόμενο από δικαιώματα αγοράς

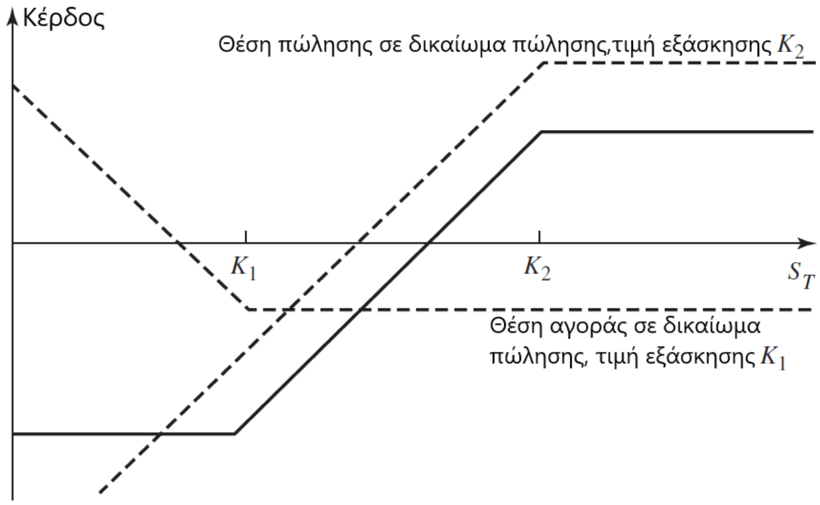
Πίνακας 5: Πληρωμή από ανοδικό άνοιγμα δικαιωμάτων σχηματιζόμενο από δικαιώματα αγοράς

Εύρος τιμών μετοχής	*Πληρωμή από θέση αγοράς στο δικαίωμα αγοράς*	*Πληρωμή από θέση πώλησης στο δικαίωμα αγοράς*	*Συνολική πληρωμή*
$S_T \leqslant K_1$	0	0	0
$K_1 < S_T < K_2$	$S_T - K_1$	0	$S_T - K_1$
$S_T \geqslant K_2$	$S_T - K_1$	$-(S_T - K_2)$	$K_2 - K_1$

Πηγή: Hull (2009)

Η στρατηγική του ανοδικού ανοίγματος δικαιωμάτων περιορίζει το κέρδος του επενδυτή σε περίπτωση ανόδου της τιμής της μετοχής, αλλά και τη ζημία του σε περίπτωση που αυτό δε συμβεί (Hull, 2009). Ο επενδυτής έχει ένα δικαίωμα αγοράς σε μετοχή με τιμή εξάσκησης K_1 και επιλέγει να παραχωρήσει πιθανά κέρδη από άνοδο της τιμής της μετοχής, πωλώντας ένα δικαίωμα αγοράς σε μετοχή με τιμή εξάσκησης $K_2 > K_1$. Έτσι έχει κερδίσει την αξία του δικαιώματος αγοράς με τιμή εξάσκησης K_2.

Ανοδικό άνοιγμα δικαιωμάτων μπορεί να σχηματιστεί λαμβάνοντας θέση αγοράς σε ένα δικαίωμα πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου σε χαμηλή τιμή εξάσκησης και θέση πώλησης σε ένα δικαίωμα πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου με υψηλή τιμή εξάσκησης, στρατηγική η οποία απεικονίζεται στο γράφημα 35 (Hull, 2009). Σε αντίθεση με τη στρατηγική που σχηματίζεται από δικαιώματα αγοράς, η στρατηγική αυτή περιλαμβάνει εξαρχής μια θετική χρηματοροή προς τον επενδυτή (δεν απαιτείται αρχική επένδυση), η πληρωμή όμως είναι από αρνητική έως μηδενική.

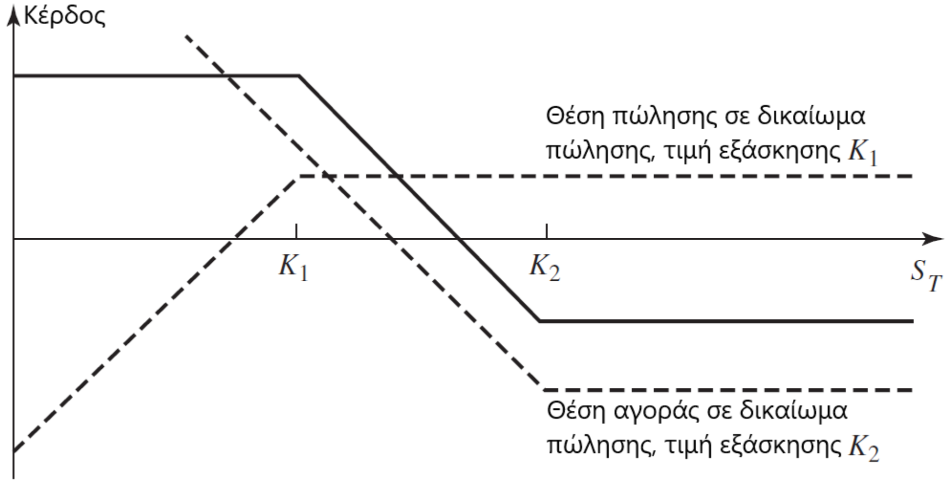


Πηγή: Hull (2009)

Γράφημα 35. Κέρδος από ανοδικό άνοιγμα δικαιωμάτων σχηματιζόμενο από δικαιώματα πώλησης

7.4.2. Bear Spread

Ένας επενδυτής ο οποίος σκοπεύει να ακολουθήσει τη στρατηγική του καθοδικού ανοίγματος δικαιωμάτων (bear spread) προσβλέπει σε πτώση της τιμής της μετοχής (Hull, 2009). Το καθοδικό άνοιγμα δικαιωμάτων είναι μια στρατηγική η οποία μπορεί να σχηματιστεί λαμβάνοντας θέση αγοράς σε ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης με μια τιμή εξάσκησης και θέση πώλησης σε ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης με διαφορετική τιμή εξάσκησης. Η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος που αγοράστηκε είναι μεγαλύτερη από την τιμή εξάσκησης του δικαιώματος που πωλήθηκε, σε αντίθεση με τη στρατηγική του ανοδικού ανοίγματος δικαιωμάτων. Στο γράφημα 36 το συνολικό κέρδος από τη στρατηγική απεικονίζεται από τη συνεχή γραμμή. Η στρατηγική του καθοδικού ανοίγματος δικαιωμάτων με χρήση δικαιωμάτων πώλησης προϋποθέτει μια αρχική επένδυση εκ μέρους του επενδυτή, καθώς η τιμή του δικαιώματος πώλησης που πωλήθηκε είναι μικρότερη από την τιμή του δικαιώματος πώλησης που αγοράστηκε. Ουσιαστικά ο επενδυτής αγόρασε ένα δικαίωμα πώλησης με συγκεκριμένη τιμή εξάσκησης και επέλεξε να θυσιάσει ένα πιθανό κέρδος που αυτό θα του επέφερε, πωλώντας ένα δικαίωμα πώλησης με χαμηλότερη τιμή εξάσκησης, λαμβάνοντας ως αντάλλαγμα την τιμή στην οποία πωλήθηκε το δικαίωμα πώλησης.



Πηγή: Hull (2009)

Γράφημα 36. Κέρδος από καθοδικό άνοιγμα δικαιωμάτων σχηματιζόμενο από δικαιώματα πώλησης

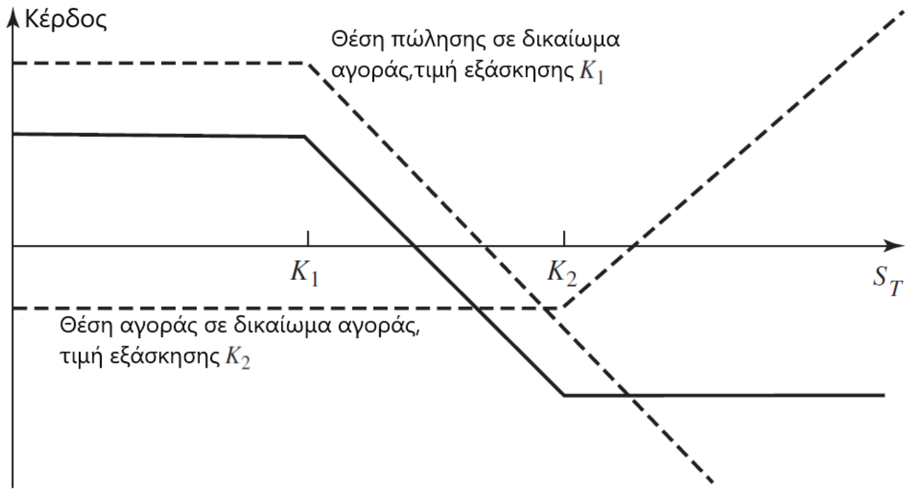
Υποθέτουμε ότι K_1, K_2 είναι οι τιμές εξάσκησης των δικαιωμάτων με $K_1 < K_2$. Ο πίνακας 6 δείχνει τις διαφορετικές πληρωμές που θα λάβει ο επενδυτής στις εκάστοτε περιπτώσεις. Αν η τιμή της μετοχής είναι μεγαλύτερη της τιμής εξάσκησης K_2, η πληρωμή θα είναι μηδενική. Αν η τιμή της μετοχής είναι μικρότερη της τιμής εξάσκησης K_1, η πληρωμή θα είναι $K_2 - K_1$. Αν η τιμή της μετοχής είναι ανάμεσα στις τιμές K_1, K_2, η πληρωμή θα είναι $K_2 - S_T$. Το κέρδος υπολογίζεται αφαιρώντας την αρχική επένδυση για την αγορά του δικαιώματος πώλησης από την πληρωμή.

Πίνακας 6: Πληρωμή από καθοδικό άνοιγμα δικαιωμάτων σχηματιζόμενο από δικαιώματα πώλησης

Εύρος τιμών μετοχής	*Πληρωμή από θέση αγοράς στο δικαίωμα πώλησης*	*Πληρωμή από θέση πώλησης σε δικαίωμα πώλησης*	*Συνολική πληρωμή*
$S_T \leqslant K_1$	$K_2 - S_T$	$-(K_1 - S_T)$	$K_2 - K_1$
$K_1 < S_T < K_2$	$K_2 - S_T$	0	$K_2 - S_T$
$S_T \geqslant K_2$	0	0	0

Πηγή: Hull (2009)

Όπως και η στρατηγική ανοδικού ανοίγματος δικαιωμάτων (bull spread), έτσι και η στρατηγική bear spread περιορίζει to κέρδος ή τη ζημία που μπορεί να έχει ο επενδυτής (Hull, 2009). Η στρατηγική καθοδικού ανοίγματος δικαιωμάτων μπορεί να σχηματιστεί και με δικαιώματα αγοράς, λαμβάνοντας δηλαδή θέση αγοράς σε ένα δικαίωμα αγοράς με μεγάλη τιμή εξάσκησης και θέση πώλησης ένα δικαίωμα αγοράς μικρότερη τιμή εξάσκησης, όπως φαίνεται στο γράφημα 37.

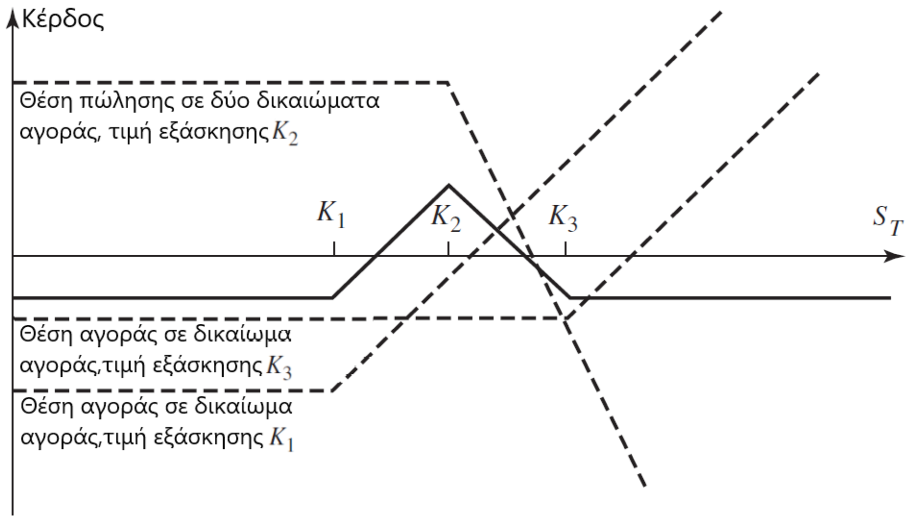


Πηγή: Hull (2009)

Γράφημα 37. Κέρδος από καθοδικό άνοιγμα δικαιωμάτων σχηματιζόμενο από δικαιώματα αγοράς

7.4.3. Butterfly Spread

Το άνοιγμα δικαιωμάτων πεταλούδας (butterfly spread) σχηματίζεται λαμβάνοντας θέσεις σε δικαιώματα προαίρεσης τριών διαφορετικών τιμών εξάσκησης (Hull, 2009). Μπορεί να σχηματιστεί λαμβάνοντας θέση αγοράς σε ένα δικαίωμα αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου με σχετικά μικρή τιμή εξάσκησης K_1, θέση αγοράς σε ένα δικαίωμα αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου με σχετικά μεγάλη τιμή εξάσκησης K_3 και θέση πώλησης σε δύο δικαιώματα αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου με τιμή εξάσκησης K_2, η οποία είναι ίση με τον αριθμητικό μέσο των K_1 και K_3. Το μοτίβο των κερδών από τη στρατηγική απεικονίζεται στο γράφημα 38. Το άνοιγμα δικαιωμάτων πεταλούδας (butterfly spread) οδηγεί σε κέρδος αν η τιμή της μετοχής είναι κοντά στην τιμή εξάσκησης K_2, οδηγεί όμως σε ζημία αν η τιμή της μετοχής κινείται προς τις τιμές των δύο άλλων τιμών εξάσκησης K_1 και K_3. Συνεπώς αποτελεί κατάλληλη στρατηγική για έναν επενδυτή ο οποίος θεωρεί ότι δε θα υπάρξουν μεταβολές στην τιμή της μετοχής. Η πληρωμή από τη στρατηγική το ανοίγματος δικαιωμάτων πεταλούδας απεικονίζεται στον πίνακα 7.



Πηγή: Hull (2009)

Γράφημα 38. Κέρδος από άνοιγμα δικαιωμάτων πεταλούδας σχηματιζόμενο από δικαιώματα αγοράς

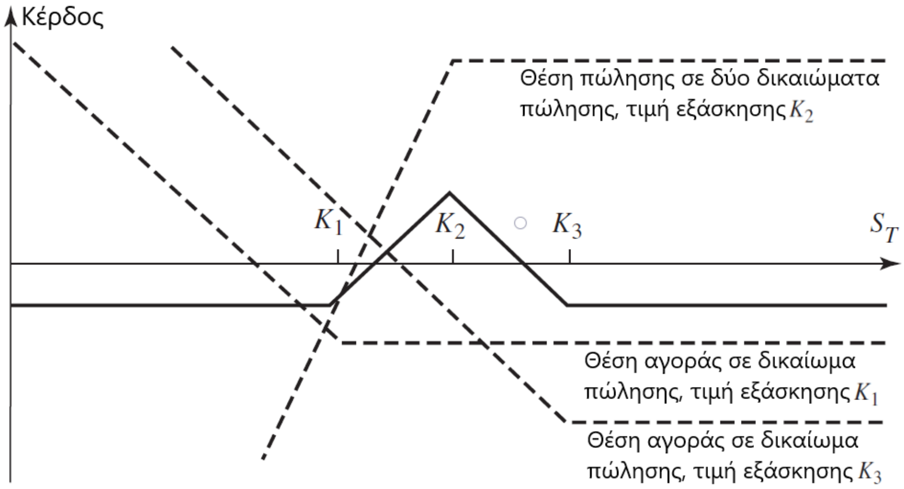
Πίνακας 7: Πληρωμή από άνοιγμα δικαιωμάτων πεταλούδας

Εύρος τιμών μετοχής	*Πληρωμή από τη θέση αγοράς στο πρώτο δικαίωμα αγοράς*	*Πληρωμή από τη θέση αγοράς στο δεύτερο δικαίωμα αγοράς*	*Πληρωμή από τη θέση αγοράς στα δικαιώματα πώλησης*	*Συνολική πληρωμή**
$S_T \leqslant K_1$	0	0	0	0
$K_1 < S_T \leqslant K_2$	$S_T - K_1$	0	0	$S_T - K_1$
$K_2 < S_T < K_3$	$S_T - K_1$	0	$-2(S_T - K_2)$	$K_3 - S_T$
$S_T \geqslant K_3$	$S_T - K_1$	$S_T - K_3$	$-2(S_T - K_2)$	0

**Οι πληρωμές υπολογίζονται με χρήση της σχέσης* $K_2 = 0.5(K_1 + K_3)$.

Πηγή: Hull (2009)

Η στρατηγική butterfly spread μπορεί να σχηματιστεί λαμβάνοντας θέση και σε δικαιώματα πώλησης (Hull, 2009). Ο επενδυτής αγοράζει δύο δικαιώματα πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου, ένα με χαμηλή τιμή εξάσκησης και ένα με υψηλή τιμή εξάσκησης και πουλάει δύο δικαιώματα πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου με τιμή εξάσκησης τον αριθμητικό μέσο των τιμών εξάσκησης των δύο άλλων δικαιωμάτων, όπως φαίνεται στο γράφημα 39.



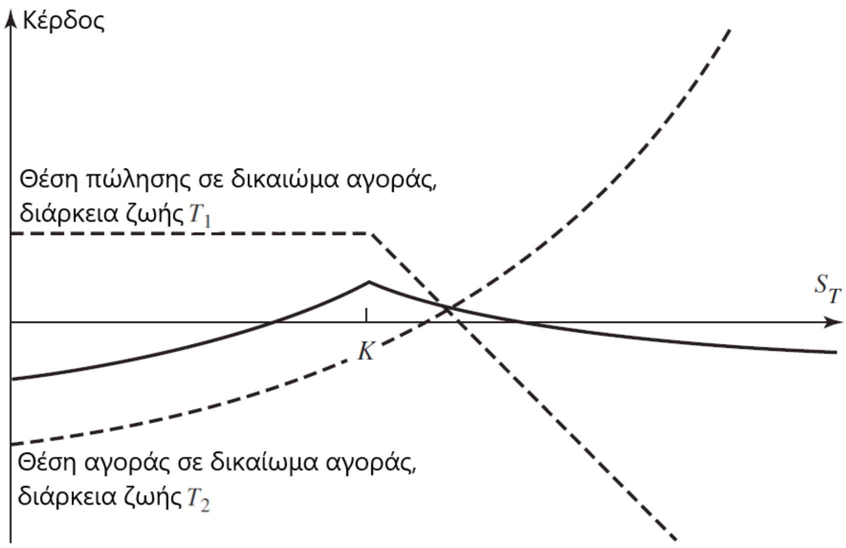
Πηγή: Hull (2009)

Γράφημα 39. Κέρδος από άνοιγμα δικαιωμάτων πεταλούδας σχηματιζόμενο από δικαιώματα πώλησης

Ένα άνοιγμα δικαιωμάτων πεταλούδας μπορεί να πωληθεί ακολουθώντας την αντίθετη στρατηγική, δηλαδή πωλώντας δικαιώματα προαίρεσης με τιμές εξάσκησης K_1 και K_3 και αγοράζοντας δύο δικαιώματα προαίρεσης με τιμή εξάσκησης K_2, το μέσο των K_1 και K_3 (Hull, 2009). Η στρατηγική αυτή αποδίδει κέρδος στον επενδυτή στην περίπτωση που υπάρχει σημαντική μεταβολή στην τιμή της μετοχής.

7.4.4. Calendar Spread

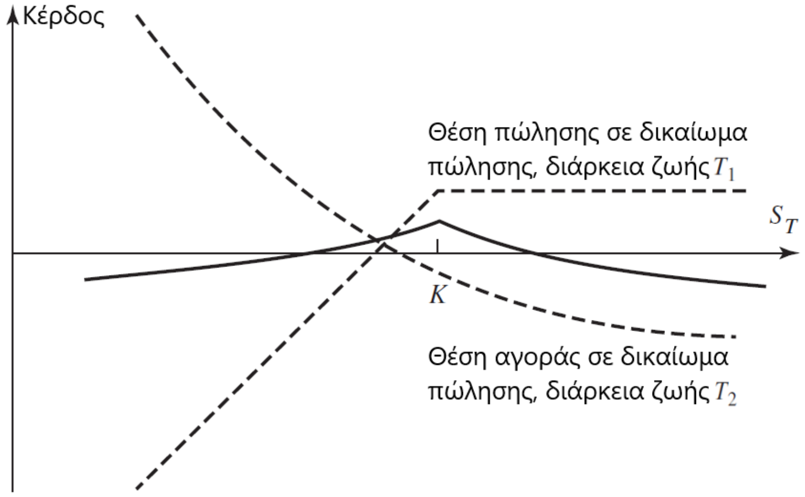
Η στρατηγική κατά την οποία ο συμμετέχων στις αγορές πουλάει ένα δικαίωμα αγοράς με μικρή διάρκεια ζωής και αγοράζει ένα άλλο, με μεγαλύτερη διάρκεια ζωής, το οποίο υπόκειται στο ίδιο περιουσιακό στοιχείο και έχει την ίδια τιμή εξάσκησης, αναφέρεται ως ημερολογιακό άνοιγμα δικαιωμάτων (calendar spread) (Pirie, 2017). Συνήθως όσο μεγαλύτερη είναι η διάρκεια ζωής, τόσο ακριβότερο είναι και το δικαίωμα προαίρεσης (Hull, 2009). Ένα ημερολογιακό άνοιγμα δικαιωμάτων απαιτεί συνεπώς μια αρχική επένδυση. Από τα διαγράμματα κέρδους μπορούμε να δούμε το κέρδος που παράγεται όταν λήγει το δικαίωμα προαίρεσης με τη μικρότερη διάρκεια ζωής, υπό την προϋπόθεση ότι το δικαίωμα με τη μεγαλύτερη διάρκεια ζωής έχει ήδη εξασκηθεί. Ένας επενδυτής έχει κέρδος αν η τιμή της μετοχής κατά την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος με τη μικρότερη διάρκεια ζωής είναι σχετικά κοντά στην τιμή εξάσκησης του ίδιου δικαιώματος, ενώ θα έχει ζημία αν η τιμή της μετοχής είναι σημαντικά μεγαλύτερη ή μικρότερη από την τιμή εξάσκησης αυτού του δικαιώματος. Στο γράφημα 40 παρουσιάζεται το κέρδος από τη στρατηγική του ημερολογιακού ανοίγματος δικαιωμάτων με χρήση δικαιωμάτων αγοράς.



Πηγή: Hull (2009)

Γράφημα 40. Κέρδος από ημερολογιακό άνοιγμα δικαιωμάτων σχηματιζόμενο από δύο δικαιώματα αγοράς, υπολογισμένο κατά την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος με τη μικρότερη διάρκεια ζωής

Για να καταλάβουμε το διάγραμμα κέρδους της στρατηγικής αυτής, ας δούμε τι συμβαίνει όταν η τιμή της μετοχής είναι πολύ χαμηλή κατά την ημερομηνία λήξης του συντομότερου δικαιώματος (Hull, 2009). Το δικαίωμα με τη μικρότερη ημερομηνία λήξης δεν έχει αξία, ενώ η αξία του δικαιώματος με τη μεγαλύτερη ημερομηνία λήξης είναι σχεδόν μηδενική. Συνεπώς ο επενδυτής έχει ζημία του ύψους της αρχικής επένδυσης που χρειάστηκε για το σχηματισμό της στρατηγικής. Όταν η τιμή της μετοχής είναι πολύ μεγάλη κατά την ημερομηνία λήξης του συντομότερου δικαιώματος, ο επενδυτής έχει ξανά ζημία του ύψους της αρχικής επένδυσης που χρειάστηκε για το σχηματισμό της στρατηγικής, καθώς το δικαίωμα με τη μικρότερη ημερομηνία λήξης κοστίζει $S_T - K$, ενώ το δικαίωμα με τη μεγαλύτερη ημερομηνία λήξης έχει αξία κοντά στην τιμή $S_T - K$, όπου K η τιμή εξάσκησης των δικαιωμάτων. Όταν η τιμή της μετοχής είναι κοντά στην τιμή εξάσκησης των δικαιωμάτων, το δικαίωμα με τη μικρότερη ημερομηνία λήξης κοστίζει στον επενδυτή ελάχιστα ή καθόλου, ενώ το δικαίωμα με τη μεγαλύτερη ημερομηνία λήξης έχει ακόμα αρκετή αξία, συνεπώς ο επενδυτής θα έχει κέρδος. Ημερολογιακό άνοιγμα δικαιωμάτων μπορεί να σχηματιστεί και από δικαιώματα πώλησης. Ο επενδυτής αγοράζει ένα δικαίωμα πώλησης με μεγάλη ημερομηνία λήξης και πωλεί ένα δικαίωμα πώλησης με μικρότερη ημερομηνία λήξης. Στο γράφημα 41 παρουσιάζεται το κέρδος από ημερολογιακό άνοιγμα δικαιωμάτων με χρήση δικαιωμάτων πώλησης, που όπως βλέπουμε είναι παρόμοιο του κέρδους της ίδιας στρατηγικής με χρήση δικαιωμάτων αγοράς.



Πηγή: Hull (2009)

Γράφημα 41. Κέρδος από ημερολογιακό άνοιγμα δικαιωμάτων σχηματιζόμενο από δύο δικαιώματα πώλησης, υπολογισμένο κατά την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος με τη μικρότερη διάρκεια ζωής

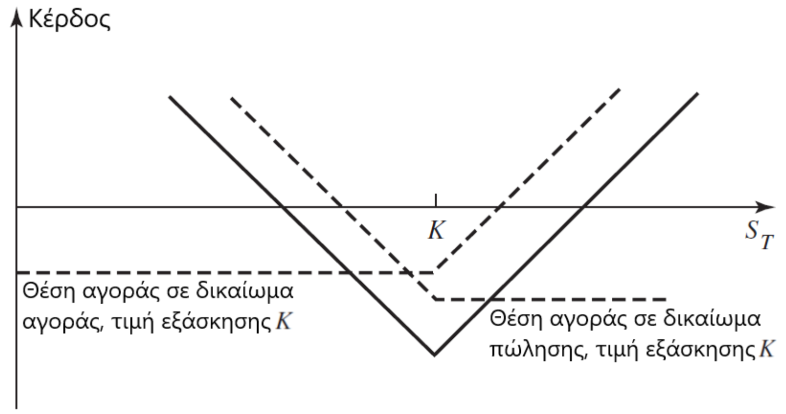
Ένα αντίστροφο ημερολογιακό άνοιγμα δικαιωμάτων (reverse calendar spread) μπορεί να σχηματιστεί, όταν ο επενδυτής αγοράσει ένα δικαίωμα προαίρεσης με μικρή διάρκεια ζωής και πωλήσει ένα δικαίωμα προαίρεσης με μεγαλύτερη διάρκεια ζωής (Hull, 2009). Τότε ο επενδυτής θα έχει κέρδος αν η τιμή της μετοχής κατά την ημερομηνία λήξης του συντομότερου δικαιώματος είναι αρκετά μεγαλύτερη ή αρκετά μικρότερη της τιμής εξάσκησης του ίδιου δικαιώματος. Διαφορετικά, όταν η τιμή της μετοχής είναι κοντά στην τιμή εξάσκησης του συντομότερου δικαιώματος κατά την ημερομηνία λήξης του, ο επενδυτής θα υποστεί ζημία.

7.5. Συνδυασμοί

Οι συνδυασμοί δικαιωμάτων αποτελούν στρατηγικές οι οποίες σχηματίζονται λαμβάνοντας θέση ταυτοχρόνως σε δικαιώματα αγοράς και πώλησης στην ίδια μετοχή (Hull, 2009). Στους συνδυασμούς δικαιωμάτων ανάγονται οι στρατηγικές straddle, strip, strap και strangle.

7.5.1. Straddle

Η στρατηγική straddle σχηματίζεται αν ο επενδυτής λάβει θέση αγοράς ταυτόχρονα σε ένα δικαίωμα αγοράς και ένα δικαίωμα πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου με την ίδια τιμή εξάσκησης K και την ίδια ημερομηνία λήξης (Hull, 2009). Αν η τιμή της μετοχής είναι κοντά στην τιμή εξάσκησης κατά την ημερομηνία λήξης των δύο δικαιωμάτων, η στρατηγική οδηγεί σε ζημία για τον επενδυτή. Αν όμως η τιμή της μετοχής αποκλίνει από την τιμή εξάσκησης των δικαιωμάτων είτε θετικά είτε αρνητικά, ο επενδυτής θα έχει κέρδος. Η στρατηγική straddle είναι κατάλληλη όταν ο επενδυτής προβλέπει αλλαγή στην τιμή της μετοχής, αλλά δε γνωρίζει αν η τιμή αυτή θα κινηθεί ανοδικά ή καθοδικά. Το κέρδος από μια στρατηγική straddle παρουσιάζεται στο γράφημα 42, ενώ η πληρωμή από τη στρατηγική στον πίνακα 8.



Πηγή: Hull (2009)

Γράφημα 42. Κέρδος από straddle

Πίνακας 8: Πληρωμή από straddle

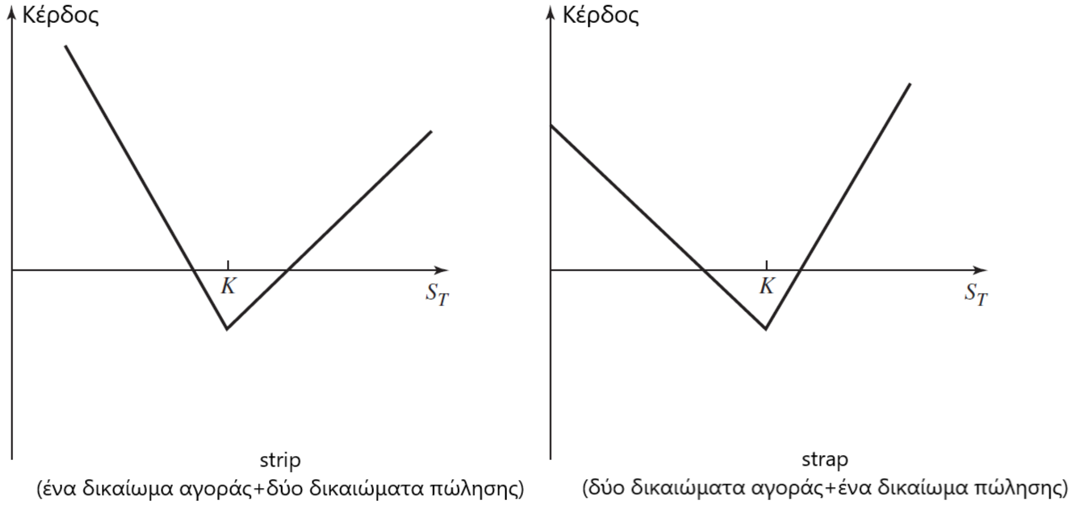
Εύρος τιμών μετοχής	*Πληρωμή από δικαίωμα αγοράς*	*Πληρωμή από δικαίωμα πώλησης*	*Συνολική πληρωμή*
$S_T \leqslant K$	0	$K - S_T$	$K - S_T$
$S_T > K$	$S_T - K$	0	$S_T - K$

Πηγή: Hull (2009)

Η στρατηγική straddle που παρουσιάστηκε παραπάνω αναφέρεται και ως bottom straddle ή straddle purchase (Hull, 2009). Αντίθετη από αυτή τη στρατηγική είναι η top straddle ή straddle write, η οποία σχηματίζεται αν ο επενδυτής πωλήσει ένα δικαίωμα αγοράς και ένα δικαίωμα πώλησης με την ίδια τιμή εξάσκησης και ημερομηνία λήξης. Με αυτή τη στρατηγική, ο επενδυτής θα έχει κέρδος αν η τιμή της μετοχής είναι κοντά στην τιμή εξάσκησης των δικαιωμάτων κατά την ημερομηνία λήξης τους, θα έχει όμως ζημία αν η τιμή της μετοχής κινηθεί ανοδικά ή καθοδικά. Συνεπώς η στρατηγική αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί όταν ο επενδυτής αναμένει ότι δε θα υπάρξει μεταβολή της τιμής της μετοχής, διαφορετικά η ζημία που θα έχει ο επενδυτής από τη μεταβολή της μετοχής μπορεί να είναι απεριόριστη (Garrett, 2013).

7.5.2. Strips και Straps

Η στρατηγική strip περιλαμβάνει τη θέση αγοράς σε ένα δικαίωμα αγοράς και δύο δικαιώματα πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου, με την ίδια τιμή εξάσκησης και την ίδια ημερομηνία λήξης (Hull, 2009). Ο επενδυτής προσβλέπει σε μεγάλη μεταβολή της τιμής της μετοχής και συγκεκριμένα στην πτώση της. Η στρατηγική strap σχηματίζεται λαμβάνοντας θέση αγοράς σε δύο δικαιώματα αγοράς και ένα δικαίωμα πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου, με την ίδια τιμή εξάσκησης και την ίδια ημερομηνία λήξης. Αντίθετα με τη στρατηγική strip, ο επενδυτής προσβλέπει σε μεγάλη άνοδο της τιμής της μετοχής. Τα κέρδη από τις στρατηγικές αυτές παρουσιάζονται στο γράφημα 43.

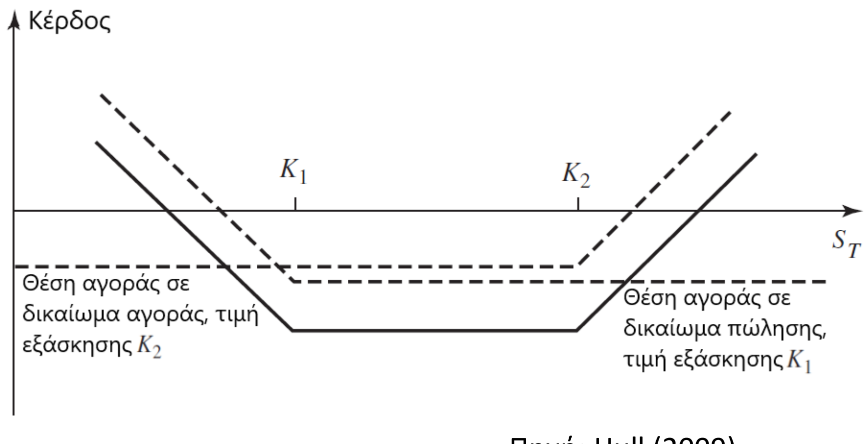


Πηγή: Hull (2009)

Γράφημα 43. Κέρδος από strip και strap

7.5.3. Strangle

Στη στρατηγική strangle, αλλιώς αναφερόμενη ως bottom vertical combination, ο επενδυτής λαμβάνει θέση αγοράς σε ένα δικαίωμα αγοράς και ένα δικαίωμα πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου, με την ίδια ημερομηνία λήξης αλλά διαφορετικές τιμές εξάσκησης (Hull, 2009). Η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος αγοράς K_2 είναι μεγαλύτερη από την τιμή εξάσκησης του δικαιώματος πώλησης K_1. Το κέρδος από τη στρατηγική αυτή απεικονίζεται στο γράφημα 44, ενώ η πληρωμή από τη στρατηγική στον πίνακα 9. Όσο περισσότερο αποκλίνουν οι τιμές εξάσκησης των δύο δικαιωμάτων, τόσο μικρότερη θα είναι η πιθανή ζημία του επενδυτή και τόσο μεγαλύτερη πρέπει να είναι η μεταβολή της τιμής της μετοχής, προκειμένου ο επενδυτής να έχει κέρδος.



Πηγή: Hull (2009)

Γράφημα 44. Κέρδος από strangle

Πίνακας 9: Πληρωμή από strangle

Εύρος τιμών μετοχής	Πληρωμή από δικαίωμα αγοράς	Πληρωμή από δικαίωμα πώλησης	Συνολική πληρωμή
$S_T \leqslant K_1$	0	$K_1 - S_T$	$K_1 - S_T$
$K_1 < S_T < K_2$	0	0	0
$S_T \geqslant K_2$	$S_T - K_2$	0	$S_T - K_2$

Πηγή: Hull (2009)

Η στρατηγική strangle είναι παρόμοια με τη στρατηγική straddle, καθώς και εδώ ο επενδυτής προσβλέπει σε μεγάλη μεταβολή της τιμής της μετοχής, χωρίς όμως να ξέρει αν η τιμή θα κινηθεί ανοδικά ή καθοδικά (Hull, 2009). Συγκρίνοντας τις γραφικές παραστάσεις των κερδών από τις δύο στρατηγικές (γραφήματα 42 και 44), συμπεραίνουμε ότι η μεταβολή της τιμής της μετοχής πρέπει να είναι μεγαλύτερη όταν ακολουθείται η στρατηγική strangle, προκειμένου ο επενδυτής να έχει κέρδος, ενώ αν η τιμή της μετοχής δε μεταβληθεί σημαντικά η ζημία για τον επενδυτή που ακολουθεί τη στρατηγική strangle θα είναι μικρότερη από αυτή που θα είχε αν ακολουθούσε τη straddle στρατηγική. Η στρατηγική η οποία σχηματίζεται από την πώληση δύο δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου με την ίδια ημερομηνία λήξης και διαφορετικές τιμές εξάσκησης καλείται top vertical combination και είναι αντίθετη από τη στρατηγική strangle που είδαμε. Η χρήση αυτής της στρατηγικής είναι κατάλληλη για έναν επενδυτή ο οποίος θεωρεί ότι δε θα υπάρξει μεταβολή της τιμής της μετοχής. Όμως, όπως και στη στρατηγική straddle που σχηματίζεται από την πώληση δύο δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης, η ζημία που μπορεί να έχει ο επενδυτής είναι απεριόριστη.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Algieri, B. (2018) “A journey through the history of commodity derivatives markets and the political economy of (de)regulation,” *SSRN Electronic Journal* [Preprint]. Available at: https://doi.org/10.2139/ssrn.3301143.

Bingham, N.H. and Kiesel Rüdiger (2004) *Risk-neutral valuation: Pricing and hedging of financial derivatives*. London: Springer.

Constantinides, G., Stulz, R. M., & Harris, M. (2003). *Handbook of the Economics of Finance: Financial Markets and Asset Pricing (Volume 1B)* (1st ed.). North Holland.

Cuthbertson, K., Nitzsche, D. and O'Sullivan, N.M. (2020) *Derivatives theory and practice*. West Sussex, United Kingdom: John Wiley & Sons Ltd.

Fan, Q., & Feng, S. (2022). An empirical study on the characterization of implied volatility and pricing in the Chinese option market. *Finance Research Letters*, *49*, 103160. https://doi.org/10.1016/j.frl.2022.103160

Garrett, S.J. (2016) *An introduction to the mathematics of finance: A deterministic approach*. Amsterdam: Butterworth-Heinemann.

Gottesman, A. (2016) *Derivatives essentials: An introduction to forwards, futures, options and swaps*. Hoboken, NJ: Wiley.

Gupta, S.L. (2018) *Financial derivatives: Theory, concepts and problems)*. Delhi: PHI Learning, Privat limited.

Hull, J. (2010) *Options, futures and other derivatives*. Upper Saddle River, NJ: Pearson Education.

Hunt, P.J. and Kennedy, J.E. (2000) *Financial derivatives in theory and Practice*. Chichester, West Sussex, England: Wiley.

Kolb, R.W. and Overdahl, J.A. (2003) *Financial derivatives*. Hoboken, NJ: John Wiley.

Malkiel, B.G. (2003) “The efficient market hypothesis and its critics,” *Journal of Economic Perspectives*, 17(1), pp. 59–82. Available at: https://doi.org/10.1257/089533003321164958.

Marroni, L. and Perdomo, I. (2014) *Pricing and hedging financial derivatives a guide for Practitioners*. Chichester, England: Wiley.

Peters, L. (2016) *Real options illustrated*. Switzerland: Springer.

Peterson, P. E. (2018). *Commodity Derivatives: A Guide for Future Practitioners* (1st ed.). Routledge.

Pirie, W.L. (2017) *Derivatives*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc.

Wang, S. (2020). *The fitted finite volume and power penalty methods for option pricing*. Springer Singapore.

Wilmott, Howison and Dewynne (1996) *The mathematics of financial derivatives: A student introduction*. Cambridge: Cambridge university press.