



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΛΟΠΟΝΝΗΣΟΥ

Σχολή Θετικών Επιστημών και Τεχνολογίας

Τμήμα Επιστήμης και Τεχνολογίας Υπολογιστών

Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία

**Σύγκριση και ανάλυση πολυβηματικών μεθόδων σε
προβλήματα αστρονομίας**

Σαριπανίδης Ηλίας

2009028

Επιβλέπων Καθηγητής

Σίμος Θεόδωρος

Τρίπολη, 5 Φεβρουαρίου 2011

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα των δυο σωμάτων. Το πρόβλημα αυτό εκφράζεται μέσα από ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων με λύσεις που παρουσιάζουν ταλαντευτική συμπεριφορά. Το παραπάνω πρόβλημα υπόκειται σε μια κατηγορία τροχιακών προβλημάτων που περιγράφονται με την παρακάτω μορφή:

$$y'' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \text{με } x \in [x_0, x_n]$$

Για το παραπάνω πρόβλημα εμείς θα αναλύσουμε και θα συγκρίνουμε διάφορες γραμμικές μεθόδους πολλαπλών βημάτων, με γνώμονα πάντα την ακρίβεια, τον αριθμό δηλαδή των δεκαδικών ψηφίων, στα οποία προσεγγίζεται η ακριβής λύση. Η εργασία αυτή έχει διαρθρωθεί όπως περιγράφεται παρακάτω.

Αρχικά, στο πρώτο κεφάλαιο, περιλαμβάνεται η απαραίτητη θεωρία, και για την καλύτερη παρουσίασή της το χωρίζουμε σε πέντε βασικά υποκεφάλαια. Στο πρώτο υποκεφάλαιο θα κάνουμε μια σύντομη εισαγωγή στις διαφορικές εξισώσεις, περιγράφοντας παράλληλα και την διαδικασία εύρεσης προσεγγιστικής λύσης που προτείνει η αριθμητική ανάλυση. Θα δούμε ακόμα τα διάφορα είδη διαφορικών εξισώσεων, τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις δευτέρου βαθμού, και θα ορίσουμε το κατάλληλο μέγεθος βήματος.

Στο δεύτερο υποκεφάλαιο του πρώτου κεφαλαίου θα δούμε περιληπτικά τις διάφορες κατηγορίες μεθόδων, που επιλύουν μια διαφορική εξίσωση. Επίσης θα μιλήσουμε και για τα βασικά χαρακτηριστικά των μεθόδων αυτών, την αλγεβρική τάξη, την εμμεσότητα, την συμμετρία και την ευστάθεια. Κλείνοντας, στο υποκεφάλαιο αυτό, θα παρουσιάσουμε το πρόβλημα των αρχικών

τιμών, και θα προσδιορίσουμε τις καλώς και τις κακώς ορισμένες, διαφορικές εξισώσεις.

Στο τρίτο υποκεφάλαιο του πρώτου κεφαλαίου, έχοντας αναλύσει την έννοια της προσεγγιστικής λύσης θα δούμε τα διάφορα είδη σφαλμάτων που προκύπτουν στην προσπάθειά μας να φτάσουμε σ' αυτήν.

Στο τέταρτο υποκεφάλαιο, θα παρουσιάσουμε το πρόβλημα των δυο σωμάτων, το οποίο και θα μελετήσουμε. Θα κάνουμε μια μικρή αναδρομή στην προέλευσή του και παράλληλα θα δούμε κάποιους σπουδαίους ερευνητές που ασχολήθηκαν με αυτό. Επίσης θα παρουσιάσουμε τις εξισώσεις που το περιγράφουν, και θα δώσουμε μια οπτική αναπαράσταση, στην έννοια της εκκεντρότητας.

Στο πέμπτο υποκεφάλαιο, παρουσιάζουμε περιληπτικά κάποιες μονοβηματικές μεθόδους, που, αν και δεν μας ενδιαφέρουν άμεσα στην παρούσα έρευνά μας, είναι σημαντικές στο να κατανοήσουμε την λειτουργία των πολυβηματικών μεθόδων, που μελετάμε. Ακόμα αναφερόμαστε στις πολυβηματικές μεθόδους. Ιδιαίτερη αναφορά επίσης γίνεται στις γραμμικές και συμμετρικές πολυβηματικές μεθόδους.

Στο κεφάλαιο δυο παρουσιάζουμε τις μεθόδους και τις εφαρμόζουμε σε τροχιακά προβλήματα. Το κεφάλαιο αυτό το χωρίζουμε σε τέσσερα υποκεφάλαια

Στο υποκεφάλαιο ένα, παρουσιάζουμε τις μεθόδους που μελετούνται στην εργασία αυτή. Η ομαδοποίηση που έχει γίνει, έχει βασιστεί στον αριθμό των προαπαιτούμενων βημάτων, που η κάθε μέθοδος μελετάμε, χρειάζεται.

Στο υποκεφάλαιο δυο παραθέτουμε τα αποτελέσματα που πήραμε, απ τις δοκιμές που πραγματοποιήσαμε, για τις διάφορες τιμές του παράγοντα εκκεντρότητας. Η παρουσίαση των αποτελεσμάτων γίνεται με την χρήση διαγραμμάτων, με τις μεθόδους της ίδιας τάξης να διατηρούν παρόμοιες αποχρώσεις. Παράλληλα κάνουμε και σχολιασμό των μεθόδων που απεικονίζουμε στα διαγράμματα.

Σκεπτόμενοι ότι τα τροχιακά προβλήματα είναι προβλήματα μακρού χρόνου, επαναλαμβάνουμε κάποια από τα πειράματά μας ώστε να δούμε την συμπεριφορά που παρουσιάζουν οι μέθοδοι για μεγαλύτερο διάστημα ολοκλήρωσης. Αυτό μας δίνει μια σειρά από νέα αποτελέσματα που, όπως στο παραπάνω κεφάλαιο, τα παρουσιάζουμε διαγραμματικά και τα σχολιάζουμε στο υποκεφάλαιο τρία.

Στο τελευταίο υποκεφάλαιο του δεύτερου κεφαλαίου, παρουσιάζουμε τους πίνακες που προκύπτουν από την απόδοση των μεθόδων, για την κάθε τιμή της εκκεντρότητας. Συμπληρωματικά, σχολιάζουμε και την συμπεριφορά των μεθόδων που πρωτεύουν, σε κάθε πείραμα.

ABSTRACT

In the current project we will study the two - body problem. This problem can be expressed through a system of differential equations with solutions that show oscillatory behavior. The two - body problem is subjected to a class of orbital problems described in the following form:

$$y'' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \mu \varepsilon x \in [x_0, x_n]$$

For the above mentioned problem we will analyze and compare various linear multistep methods, always aiming for accuracy, i.e. the number of decimal digits to which the exact solution is approached. In the following paragraphs, we describe the structure of this paper.

Firstly, in chapter one, we present the basic theory, and for its best appearance we divide the chapter to five sub-chapters. In the first sub-chapter we will make a brief introduction to differential equations, describing, in the same time, the process of finding the approximated solution that numerical analysis propose. We will also present the different types of differential equations, the second order differential equations, and define the suitable step size.

In the second sub-chapter, of the first chapter, we summarize the different categories of methods that solve a differential equation. We will also give a description of some key features of these methods, such as the algebraic order, the implicitness, the symmetry and the stability.

Concluding this sub-chapter, we present the problem of initial values, and designate the well and the poorly defined differential equations.

In the third sub-chapter, of chapter one, having analyzed the meaning of approximated solution, we will see the different types of error that arise in our attempt to achieve so.

In the fourth sub-chapter we will introduce the problem of two bodies, which we will study. We will do a little overview to its origin and will also see some great researchers involved in this. We will also present the equations that describe it, and give a visual representation of the concept of eccentricity.

In sub-chapter five, we present a summary of some single step methods, and although they do not directly concern us in this research, they are important so as to help the reader understand how multistep methods function. Moreover we make a brief presentation to the multistep methods. Special quote is also been given to linear and symmetric multistep methods.

In chapter two we present the methods and we apply them to orbital problems. This chapter is also divided into four sub-chapters.

In sub-chapter one, we present the methods studied in this paper. The grouping that we have done is based on the number of prerequisite steps, each method requires.

In the second sub-chapter we present the results that we got from tests, carried out for different values of the eccentricity factor. To present our results we make use of some diagrams, with methods of the same order to maintain similar tones

of color. At the same time we comment on each method shown in the charts.

Considering that orbital problems are long time problems, we reiterate some of our experiments to see how our methods behave for longer integration time. This gives us new results that we, as in the chapter above, will present graphically and comment in sub-chapter three.

Finally, in sub-chapter four, we present the tables resulting from the performance of our methods for each value of eccentricity.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	9
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΘΕΩΡΙΑ	11
1.1 ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ	11
1.1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ.....	11
1.1.2 Η ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΕΥΡΕΣΗΣ ΛΥΣΗΣ	12
1.1.3 ΕΜΠΛΕΚΟΜΕΝΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ	14
1.1.4 ΕΙΔΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ	14
1.1.5 ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ.....	15
1.1.6 ΜΕΓΕΘΟΣ ΒΗΜΑΤΟΣ	16
1.2 ΕΠΙΛΥΣΗ Δ. Ε. ΚΑΙ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΜΕΘΟΔΩΝ	17
1.2.1 ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ	17
1.2.2 ΒΑΣΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ.....	18
1.2.2.1 ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΤΑΞΗ	18
1.2.2.2 ΕΜΜΕΣΟΤΗΤΑ	18
1.2.2.3 ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ.....	19
1.2.2.4 ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ	19
1.2.3 ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΠΟΛΥΒΗΜΑΤΙΚΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ	19
1.2.4 ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΩΝ ΑΡΧΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ.....	21
1.2.5 ΚΑΛΩΣ ΚΑΙ ΚΑΚΩΣ ΟΡΙΣΜΕΝΕΣ	22
1.3 ΣΦΑΛΜΑΤΑ.....	24
1.3.1 ΣΦΑΛΜΑΤΑ ΜΕΘΟΔΩΝ	24
1.4 ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ	26
1.4.1 ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΩΝ ΔΥΟ ΣΩΜΑΤΩΝ.....	26
1.4.2 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΡΧΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ	27
1.5 ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΜΕΘΟΔΩΝ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ...	30
1.5.1 ΜΟΝΟΒΗΜΑΤΙΚΕΣ	30
1.5.2 ΠΟΛΥΒΗΜΑΤΙΚΕΣ	32
1.5.3 ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ	33
1.5.4 ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ.....	34
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ ΣΕ ΤΡΟΧΙΑΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ..	36
2.1 ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΟΥ ΜΕΛΕΤΟΥΜΕ	36
2.2 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΓΙΑ $t \in [0, 10^3]$	44
2.2.1 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΓΙΑ $e=0$	45
2.2.2 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΓΙΑ $e=0.2$	48
2.2.3 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΓΙΑ $e=0.4$	51
2.2.4 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΓΙΑ $e=0.6$	54
2.2.5 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΓΙΑ $e=0.8$	57
2.2.6 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΓΙΑ $e=0.9$	60
2.2.7 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΓΙΑ $e=0.95$	63
2.3 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΓΙΑ $t \in [0, 10^5]$	66
2.3.1 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΓΙΑ $e=0$	67
2.3.2 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΓΙΑ $e=0.3$	70
2.3.3 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΓΙΑ $e=0.6$	73
2.4 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	76
2.4.1 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΓΙΑ $t \in [0, 10^3]$ ΚΑΙ ΜΕΓΙΣΤΗ ΑΚΡΙΒΕΙΑ	76
2.4.2 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΓΙΑ $t \in [0, 10^5]$ ΚΑΙ ΜΕΓΙΣΤΗ ΑΚΡΙΒΕΙΑ	79
2.4.3 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΓΙΑ $t \in [0, 10^3]$ ΚΑΙ ΑΚΡΙΒΕΙΑ ΠΕΝΤΕ Δ.Ψ.	81
2.4.4 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΓΙΑ $t \in [0, 10^5]$ ΚΑΙ ΑΚΡΙΒΕΙΑ ΠΕΝΤΕ Δ.Ψ.	83
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	85

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Γύρω απ' το πρόβλημα των δυο σωμάτων, και γενικά προβλημάτων που μπορούν να εκφραστούν μέσα από ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων και οι λύσεις τους παρουσιάζουν ταλαντευτική συμπεριφορά, είναι αλήθεια ότι γίνεται αρκετή μελέτη. Τα προβλήματα αυτά έχουν την μορφή :

$$y'' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \text{με } x \in [x_0, x_n] \quad (1)$$

και χωρίζονται σε δυο κατηγορίες, αυτά για τα οποία γνωρίζουμε και αυτά για τα οποία δεν γνωρίζουμε την συχνότητά τους.

Εμείς εδώ θα μελετήσουμε τις γραμμικές μεθόδους πολλαπλών βημάτων για το παραπάνω πρόβλημα και δίνοντας παράλληλα τόσο τον ορισμό των γραμμικών μεθόδων όσο και των υποκατηγοριών τους.

Η μελέτη θα γίνει με κριτήριο την ακρίβεια, τα δεκαδικά ψηφία δηλαδή, στα οποία οι μέθοδοι που μελετούμε προσεγγίζουν την ακριβή λύση. Κριτήριο επίσης θα αποτελέσει και το πόσο γρήγορα φτάνει η εκάστοτε μέθοδος, τόσο στην ελάχιστη όσο και στην μέγιστη ακρίβειά της.

Μετά από την απαραίτητη εισαγωγή στις διαφορικές εξισώσεις και την αναφορά στις βασικές έννοιες που απαιτούνται για να κατανοήσει ο αναγνώστης τα αποτελέσματα της εργασίας αυτής, θα παρουσιάσουμε το πρόβλημα που μελετάμε, τις εξισώσεις που το περιγράφουν και τους παράγοντες που το επηρεάζουν, όπως η εκκεντρότητα και το διάστημα ολοκλήρωσης.

Οι απλούστερες μέθοδοι που θα δούμε στο πρώτο μέρος της εργασίας αυτής δεν είναι ιδιαίτερα χρήσιμες στην πράξη, λόγω της σχετικά μικρής τους αποδοτικότητας. Ο σκοπός που αναφερόμαστε σ' αυτές, είναι γιατί θέλουμε να εξοικειώσουμε τον αναγνώστη με τις διάφορες έννοιες που θα του χρειαστούν στην πορεία της

ανάγνωσής του, και αυτό είναι πολύ πιο εύκολο να γίνει στην περίπτωση μιας απλής μεθόδου, παρά σε κάποια πιο σύνθετη.

Στη συνέχεια, θα προχωρήσουμε, κάνοντας μια μικρή εισαγωγή στις μονοβηματικές μεθόδους επίλυσης διαφορικών εξισώσεων, σημειώνοντας ότι ιδίως οι μέθοδοι Runge-Kutta δεύτερης και τέταρτης τάξης χρησιμοποιούνται ευρέως τόσο για τον ικανοποιητικό βαθμό ακρίβειας που μας δίνουν όσο και για την ευκολία του προγραμματισμού τους σε ηλεκτρονικό υπολογιστή.

Έπειτα θα δούμε περιληπτικά κάποιες πολυβηματικές μεθόδους επίλυσης διαφορικών εξισώσεων, μεθόδων δηλαδή που για να βρουν μια λύση, συνυπολογίζουν τις προσεγγίσεις σε περισσότερα του ενός προηγούμενα σημεία. Έτσι ελπίζουμε να δώσουμε στον αναγνώστη το κατάλληλο υπόβαθρο, ώστε να εξοικειωθεί και να κατανοήσει πιο εύκολα τόσο τις διάφορες μεθόδους που θα συγκριθούν στην συνέχεια της εργασίας αυτής, όσο και τα αποτελέσματα και τα συμπεράσματα μας.

Στα διαγράμματα που παραθέτουμε, για να πετύχουμε την καλύτερη δυνατή εμφάνιση, έχουμε διαχωρίσει τις μεθόδους σε δυο ομάδες, αυτές που απαιτούν την γνώση μέχρι και εννέα προηγούμενων σημείων και αυτές που χρειάζονται από δέκα και επάνω. Οι μέθοδοι της ίδιας αλγεβρικής τάξης έχουμε επιλέξει να διατηρούν το ίδιο χρώμα, σε διαφορετική απόχρωση, για καλύτερη οπτικοποίηση. Η πιο σκουρόχρωμη απόχρωση αντιστοιχίζεται στην πρώτη μέθοδο της εκάστοτε αλγεβρικής τάξης, με την πιο ανοιχτόχρωμη να αντιστοιχίζεται στην τελευταία.

Τα αποτελέσματα της εργασίας, προκύπτουν από υπολογισμούς που έγιναν σε λειτουργικό περιβάλλον Windows 7, με χρήση της Matlab R2009a και θεωρώντας δεκαέξι σημαντικά ψηφία ακρίβειας. Ο υπολογιστής διέθετε 4 GB DDR3 μνήμη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΘΕΩΡΙΑ

1.1 ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

1.1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Ως διαφορική εξίσωση ορίζουμε μια μαθηματική έκφραση για στην οποία εμφανίζεται μια ή και περισσότερες παραγώγους μιας άγνωστης συνάρτησης. Οι διαφορικές εξισώσεις προκύπτουν σε πολλούς τομείς της επιστήμης και διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στην φυσική, την μηχανική, τα μαθηματικά και την πληροφορική.

Κάθε φορά που έχουμε στην διάθεσή μας συναρτήσεις που περιγράφουν την συνεχή μεταβολή κάποιων ποσοτήτων και τις παραγώγους αυτών, του ρυθμού μεταβολής τους δηλαδή, σε σχέση με το χρόνο και το χώρο, μιλάμε τυπικά για διαφορικές εξισώσεις. Ακόμα και όταν οι σχέσεις αυτές μπορούν να υποθεθούν ώστε να μοντελοποιήσουμε και να περιγράψουμε φυσικά φαινόμενα, τεχνικές ή φυσικές διεργασίες, δυναμικά συστήματα στη βιολογία, στην οικονομία και αλλού.

Το πιο κλασικό παράδειγμα προέρχεται από την επιστήμη της φυσικής, και συγκεκριμένα την κινηματική, όπου η κίνηση που διαγράφει ένα σώμα περιγράφεται από τη θέση και την ταχύτητά του σε συνάρτηση με το χρόνο.

Ο Νεύτωνας πρώτα, τόσο με τον πρώτο όσο και με τον δεύτερο νόμο του κατάφερε να συσχετίσει τη θέση, την ταχύτητα, τη επιτάχυνση και τις υπόλοιπες δυνάμεις που εφαρμόζονται σε ένα σώμα. Έτσι εμφανίζεται μια διαφορική εξίσωση στην οποία ο άγνωστος είναι η συνάρτηση της θέσης του σώματος σε σχέση με το χρόνο, και στις περισσότερες περιπτώσεις επιλύεται με την χρήση των εξισώσεων κίνησης. Ως λύση μιας διαφορικής εξίσωσης καθορίζεται οποιαδήποτε συνάρτηση ικανοποιεί την εξίσωση αυτή.

Όμως μόνο οι απλούστερες διαφορικές εξισώσεις έχουν λύσεις που περιγράφονται από αναλυτικούς τύπους, ώστε να πάρουμε τις ακριβείς τους λύσεις. Οι περισσότερες διαφορικές εξισώσεις που προκύπτουν στην πράξη, δεν είναι δυνατό να επιλυθούν. Οι ιδιότητες των λύσεων μιας δεδομένης διαφορικής εξίσωσης ενδέχεται να μπορούν να οριστούν χωρίς να βρεθεί η ακριβής μορφή της λύσης.

Ακόμα και στις περιπτώσεις που δεν έχουμε στα χέρια μας την αναλυτική έκφραση της λύσης ενδέχεται η λύση να μπορεί να προσεγγιστεί, με κάποιο δεδομένο βαθμό ακρίβειας, αριθμητικά με υπολογιστή. Στην κατεύθυνση αυτή προσανατολίζεται η Αριθμητική Ανάλυση, με διάφορες μεθόδους που έχει αναπτύξει, βοηθώντας έτσι σε μεγάλο βαθμό, τις διάφορες Εφαρμοσμένες Επιστήμες.

1.1.2 Η ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΕΥΡΕΣΗΣ ΛΥΣΗΣ

Έστω ότι ασχολούμαστε με την πιο απλή διαφορική εξίσωση, που είναι η συνήθης διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης, της μορφής:

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

με $y = y(x)$ να είναι η άγνωστη συνάρτηση του x , και η οποία ικανοποιεί την αρχική συνθήκη:

$$y(x_0) = y_0 \quad (2)$$

με τα x_0, y_0 γνωστά.

Η αριθμητική ανάλυση, με τις σχετικές μεθόδους που έχει αναπτύξει, δίνει τη λύση σε τέτοια προβλήματα, προσεγγιστικά, σχετικά γρήγορα και με σφάλμα μικρότερο και απ' αυτό που θα είχαμε, αν υπολογίζαμε την λύση της εξίσωσης σε κάποιο σημείο, μέσω της αναλυτικής της έκφρασης.

Όταν μιλάμε για αριθμητική λύση μιας διαφορικής εξίσωσης, συνήθως αναφερόμαστε σε έναν πίνακα από προσεγγιστικές τιμές, σε σημεία του πεδίου ορισμού της, που διαλέγονται από εμάς.

Για να το πετύχουμε αυτό, εργαζόμαστε με τον ακόλουθο τρόπο:

Αρχικά θα πρέπει να επιλέξουμε έναν φυσικό αριθμό n . Έπειτα, ονομάζουμε x_n το σημείο στο οποίο επιζητούμε την λύση. Έτσι αν υποθέσουμε ότι το x_n είναι μεγαλύτερο απ' το x_0 καταφέρνουμε να διακριτοποιήσουμε το συνεχές διάστημα $[x_0, x_n]$ και συνεπώς να το αντικαταστήσουμε από $n+1$ διακεκριμένα σημεία.

Έστω λοιπόν

$$x_i = x_0 + ih \mid i = 0(1)n, \text{ τα σημεία αυτά}$$

με βήμα $h = (x_n - x_0) / n$.

Μετά θα ονομάζουμε y_i την λύση y , στο σημείο i , όπου $x = x_i$. Την τελική ζητούμενη τιμή, $y(x) = y(x_n) = y_n$, θα την βρίσκουμε με την εύρεση των τιμών σε όλα τα σημεία x_i για i από 1 έως n , δηλαδή $y_i = y(x_i) \mid i = 1(1)n$.

Ωστόσο η διαδικασία αυτή δεν σταματά εδώ, στην πραγματικότητα την επαναλαμβάνουμε με διπλασιασμό κάθε φορά της τιμής του n , και σταματάμε μόνο όταν συμπέσουν δυο διαδοχικές τιμές της $y(x)$ σε τόσα δεκαδικά ψηφία, όσα ικανοποιούν την ακρίβεια που ζητάμε.

Στην συνέχεια της εργασίας αυτής, θα αναλυθούν δυο βασικές κατηγορίες μεθόδων, οι μονοβηματικές και οι πολυβηματικές, και θα συνδυαστούν στην προσπάθειά μας για ανεύρεση και σύγκριση των διαφόρων λύσεων που θα μας δώσει η καθεμιά απ' τις συναρτήσεις που θα μελετηθούν.

1.1.3 ΕΜΠΛΕΚΟΜΕΝΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ

Η μελέτη των διαφορικών εξισώσεων καταλαμβάνει ένα μεγάλο μέρος των επιστημών και κυμαίνεται από τα καθαρά έως και τα εφαρμοσμένα μαθηματικά. Όπως θα δούμε και παρακάτω υπάρχουν διάφορα είδη διαφορικών εξισώσεων που μπορούμε να συναντήσουμε, με πιο σημαντική ίσως τη διάκριση που γίνεται ανάμεσα σε γραμμικές και μη-γραμμικές. Οι ιδιότητες των διαφορικών εξισώσεων, η δυσκολία ή ευκολία με την οποία επιλύονται (αν επιλύονται) διαφέρουν πολύ ανάλογα με το είδος της διαφορικής εξίσωσης.

Τα καθαρά μαθηματικά μελετούν μεταξύ άλλων αν μια εξίσωση έχει λύση, και όταν έχει αν αυτή είναι μοναδική.

Τα εφαρμοσμένα μαθηματικά δίνουν έμφαση στις διεξοδικές μεθόδους προσέγγισης των λύσεων και στη εξέταση του κατά πόσο οι προσεγγίσεις αυτές είναι κοντά στις κανονικές λύσεις.

Οι φυσικοί και οι μηχανικοί συνήθως ενδιαφέρονται περισσότερο για τον υπολογισμό προσεγγιστικών λύσεων για διαφορικές εξισώσεις και λιγότερο για εξηγήσεις του αν οι προσεγγίσεις αυτές είναι κοντά στις κανονικές λύσεις. Οι λύσεις αυτές χρησιμοποιούνται στη συνέχεια για να προσομοιώσουν την κίνηση των ουρανίων σωμάτων, την προσομοίωση νευρώνων, το σχεδιασμό γεφυρών, αυτοκινήτων, αεροπλάνων, υδραυλικών συστημάτων, κλπ.

1.1.4 ΕΙΔΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Υπάρχουν διάφορες κατηγορίες διαφορικών εξισώσεων, συνήθεις, μερικές, καθυστέρησης, στοχαστικές και αλγεβρικές, με τις τρεις πρώτες ωστόσο να είναι οι πιο αξιοσημείωτες.

Η πρώτη κατηγορία, λοιπόν, είναι η **συνήθης** διαφορική εξίσωση. Έτσι χαρακτηρίζουμε την εξίσωση για την οποία η άγνωστη συνάρτηση (συχνά γνωστή και ως εξαρτημένη μεταβλητή) είναι συνάρτηση **μιας και μόνο** ανεξάρτητης μεταβλητής.

Αντίστοιχα ως **μερική** διαφορική εξίσωση χαρακτηρίζουμε την εξίσωση εκείνη για την οποία η άγνωστη συνάρτηση είναι συνάρτηση **πολλών** ανεξάρτητων μεταβλητών.

Καθυστέρησης λέγεται η διαφορική εξίσωση στην οποία η παράγωγος της άγνωστης συνάρτησης σε μια δεδομένη χρονική στιγμή δίδεται σε σχέση με τιμές της συνάρτησης

Όλες οι παραπάνω κατηγορίες διαφορικών εξισώσεων διαιρούνται σε γραμμικές και μη γραμμικές υποκατηγορίες. Όταν η εξαρτημένη μεταβλητή και όλες οι παράγωγοί της εμφανίζονται στη δύναμη 1 και δεν υπάρχουν γινόμενα ή συναρτήσεις της εξαρτημένης μεταβλητής, η εξίσωση θα λέγεται *γραμμική*. Σε αντίθετη περίπτωση θα λέγεται *μη γραμμική*. Συνεπώς με το y' είναι η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης y , η εξίσωση $y' = y$ είναι *γραμμική*, ενώ αντιθέτως η εξίσωση $y' = y^2$ είναι μη γραμμική.

Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό μιας διαφορικής εξίσωσης είναι ο *βαθμός* της, ο οποίος είναι ο βαθμός της μεγαλύτερης παραγώγου (μιας εξαρτημένης μεταβλητής) που εμφανίζεται στην εξίσωση, οπότε μπορούν να ταξινομηθούν επιπλέον, ανάλογα με τον βαθμό τους.

1.1.5 ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

Πολλά τροχιακά προβλήματα, εκφράζονται από διαφορικές εξισώσεις δευτέρου βαθμού, ή μέσα από ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων, όπου δεν έχουμε καμία πληροφορία για την πρώτη

παράγωγο του $y(x)$. Τέτοιου τύπου συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, συχνά εμφανίζονται στην αστρονομία και την αστροφυσική, αλλά και αλλού. Οι διαφορικές εξισώσεις δευτέρου βαθμού, περιγράφονται με την παρακάτω μορφή:

$$y'' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \text{με } x \in [x_0, x_n]$$

1.1.6 ΜΕΓΕΘΟΣ ΒΗΜΑΤΟΣ

Εάν η ακολουθία των προσεγγίσεων έχει ήδη υπολογιστεί χρησιμοποιώντας ένα συγκεκριμένο βήμα και, για κάποιους λόγους, παίρνουμε την απόφαση να το αλλάξουμε, τότε προκύπτουν αρκετές επιλογές ως προς τον τρόπο με τον οποίο αυτό θα μπορούσε να γίνει.

Παραδείγματος χάριν, εάν επιλέξουμε να διπλασιάσουμε το βήμα, τότε η απαραίτητη πληροφορία να μας είναι ήδη διαθέσιμη χωρίς περαιτέρω υπολογισμούς.

Η διχοτόμηση δεν είναι τόσο βολική επειδή απαιτούνται νέες προσεγγίσεις των $y(x)$ και $y'(x)$ στα ενδιάμεσα, απ' αυτά που έχουν ήδη υπολογιστεί, σημεία.

Εντούτοις, και οι δύο αυτές είναι ειδικές περιπτώσεις και συνήθως απαιτείται η αλλαγή του βήματος μιας τάξης, που είναι ίσως μεγαλύτερη από 0.5 και μικρότερη από 2.0.

1.2 ΕΠΙΛΥΣΗ Δ. Ε. ΚΑΙ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΜΕΘΟΔΩΝ

1.2.1 ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Όπως θα αναπτύξουμε και στην συνέχεια της εργασίας αυτής, υπάρχουν δυο κατηγορίες μεθόδων, και διαχωρίζονται ανάλογα με τον τρόπο που βρίσκουν την λύση της διαφορικής στο ζητούμενο σημείο.

Αρχικά, θα αναφερθούμε στις **μονοβηματικές μεθόδους** ή **μεθόδους απλού βήματος**. Οι μέθοδοι που ανήκουν στην κατηγορία αυτή βρίσκουν την εκάστοτε ζητούμενη τιμή y_i κάνοντας χρήση μόνο της λύσης στο προηγούμενο σημείο y_{i-1} , από ένα σύνολο ήδη υπολογισμένων και άρα γνωστών λύσεων $y_i \mid i = 1(1)n-1$.

Η άλλη βασική κατηγορία είναι οι **πολυβηματικές μέθοδοι** ή **μέθοδοι πολλαπλών βημάτων**. Στην κατηγορία αυτή, οι μέθοδοι, βρίσκουν την εκάστοτε ζητούμενη τιμή y_i κάνοντας χρήση περισσότερων από μιας γνωστών τιμών $y_{i-1}, y_{i-2} \mid i = 1(1)n$. Εδώ γίνεται και περεταιίρω κατηγοριοποίησή τους, ανάλογα με το πόσες από τις προηγούμενες γνωστές τιμές χρησιμοποιούν. Έτσι αν κάνουν χρήση δυο τιμών, προκύπτουν οι μέθοδοι δυο βημάτων, αν κάνουν χρήση τριών, οι τριών βημάτων, και ούτω καθεξής.

Οι **γραμμικές** μέθοδοι πολλαπλών βημάτων είναι αριθμητικές μέθοδοι που χρησιμοποιούν τις πρόσθετες προσεγγίσεις εκτός από αυτές στα διακριτοποιημένα σημεία. Έτσι αυξάνουν την αλγεβρική τους τάξη, σχετικά με τα προηγούμενα σημεία. Τέτοιες μέθοδοι χρησιμοποιούνται για την αριθμητική λύση τόσο στα συστήματα πρώτης όσο και σε αυτά της δεύτερης αλγεβρικής τάξης των συνήθων διαφορικών εξισώσεων.

Στις περισσότερες των περιπτώσεων είναι και αποδοτικότερες από τις μεθόδους απλού βήματος, γιατί εκμεταλλεύονται τα δεδομένα από περισσότερα του ενός σημεία. Έτσι μειώνουν και το

υπολογιστικό κόστος, καθώς αρκούνται σε έναν υπολογισμό της συνάρτησης ανά βήμα.

Οι **συμμετρικές** μέθοδοι έχουν αναπτυχθεί προκειμένου να ενσωματώνουν τα αντιστρέψιμου χρόνου συστήματα των συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Αυτό το καταφέρνουν με την ικανότητα του μη μηδενικού διαστήματός της περιοδικότητας τους. Το κύριο μειονέκτημά τους όμως είναι ότι, στις περισσότερες περιπτώσεις των ήδη κατασκευασμένων μεθόδων και για μερικές μοναδικές τιμές του μεγέθους του βήματος, οι μέθοδοι δεν συγκλίνουν καθόλου, λόγω της ύπαρξης των πλαστών ριζών της αντίστοιχης χαρακτηριστικής τους εξίσωσης. [4]

1.2.2 ΒΑΣΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ

Κάποιες βασικές ιδιότητες των παραπάνω μεθόδων παραθέτονται περιληπτικά εδώ, ενώ γίνεται και εκτενέστερη αναφορά τους στην συνέχεια της εργασίας.

1.2.2.1 ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΤΑΞΗ

Εξετάζουμε μεθόδους από τρίτης μέχρι και δέκατης πέμπτης αλγεβρικής τάξης. Οι χαμηλής τάξης μέθοδοι είναι ευκολότερο να εφαρμοστούν και στις περισσότερες περιπτώσεις έχουν χαμηλότερες απαιτήσεις μνήμης, ενώ οι υψηλής τάξης μέθοδοι έχουν μεγαλύτερη αποδοτικότητα, δηλ. υψηλότερη ακρίβεια για το ίδιο υπολογιστικό κόστος.

1.2.2.2 ΕΜΜΕΣΟΤΗΤΑ

Έμμεσες ονομάζουμε τις μεθόδους όπου είναι απαραίτητο να αξιολογηθεί η τιμή της συνάρτησης στο τρέχον διακριτοποιημένα σημείο. Έτσι λοιπόν πρέπει να λυθεί το παραγόμενο σύστημα των μη γραμμικών εξισώσεων, οι οποίες θα παραγάγουν τις τιμές της

συνάρτησης που θα χρησιμοποιηθούν στο επόμενο βήμα. Οι έμμεσες μέθοδοι έχουν βελτιωμένες ιδιότητες σε σύγκριση με τις άμεσες.

1.2.2.3 ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

Η συμμετρία είναι μια επιθυμητή ιδιότητα για τα προβλήματα αντιστρέψιμου χρόνου. Όλες οι συμμετρικές γραμμικές πολυβηματικές μέθοδοι έχουν μηδενικές απώλειες.

1.2.2.4 ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ

Η ευστάθεια μιας αριθμητικής μεθόδου μελετάται μέσω της ευστάθειας της συνάρτησης της μεθόδου, η οποία προέρχεται από μια συγκεκριμένη δοκιμαστική εξίσωση για κάθε τύπο ευστάθειας. Α-ευστάθεια, L-ευστάθεια ή P-ευστάθειας είναι πολύ σημαντικές για την περιοδική/ταλαντώτικη λύση.

1.2.3 ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΠΟΛΥΒΗΜΑΤΙΚΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ

Αρχικά, πριν μιλήσουμε για την ευστάθεια, θα πρέπει να ορίσουμε την συνέχεια, έτσι λοιπόν παραθέτουμε την **συνθήκη συνέχειας του Lipschitz**.

Συνθήκη Lipschitz

Αν A ένα υποσύνολο του \mathbb{R}^2 θα λέμε ότι μια συνάρτηση $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ ικανοποιεί μια **συνθήκη Lipschitz ως προς y** , όταν υπάρχει σταθερά $k > 0$ έτσι ώστε για κάθε (x, y_1) και (x, y_2) που ανήκουν στο A να ισχύει:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < k |y_1 - y_2|.$$

Σημείωση: Η σταθερά k ονομάζεται **σταθερά του Lipschitz**.

Τώρα μπορούμε να προχωρήσουμε, με τον ορισμό της ευστάθειας, όσον αφορά τις πολυβηματικές μεθόδους. Έστω λοιπόν το παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$y' = f(x,y), \quad x_0 \leq x \leq x_n$$

$$y(x_0) = y_0$$

με την $f : [x_0, x_n]$ να είναι συνεχείς και να ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz.

Συμβολίζοντας με n τα σημεία ολοκλήρωσης, το βήμα h θα γράφεται

$$h = \frac{x_0 - x_n}{n} \text{ και το } x_i = x_0 + ih \quad | \quad i=0(1)n.$$

Έτσι μια πολυβηματική μέθοδος k βημάτων, με σταθερές $\alpha_k, \dots, \alpha_0, \beta_k, \dots, \beta_0$ θα λέγεται ευσταθής εάν υπάρχει μια σταθερά C , εξαρτούμενη της συνάρτησης f αλλά ανεξάρτητη του πλήθους των σημείων ολοκλήρωσης n , τέτοια ώστε για τις ακολουθίες y_i, z_i με την παρακάτω μορφή

$$y_0, \dots, y_{k-1} \quad \text{ως δεδομένα}$$

$$\alpha_k y_{i+k} + \dots + \alpha_0 y_i = h(\beta_k f(x_{i+k}, y_{i+k}) + \dots + \beta_0 f(x_i, y_i)) \quad | \quad i=0(1)n-k$$

και

$$z_0, \dots, z_{k-1} \quad \text{ως δεδομένα}$$

$$\alpha_k z_{i+k} + \dots + \alpha_0 z_i = h(\beta_k f(x_{i+k}, z_{i+k}) + \dots + \beta_0 f(x_i, z_i)) \quad | \quad i=0(1)n-k$$

η ποσότητα

$$\max |y_i - z_i| \quad | \quad 0 \leq i \leq n$$

να είναι πάντοτε μικρότερη ή ίση με την ποσότητα

$$C \cdot \max |y_j - z_j| \quad | \quad 0 \leq j \leq n-1$$

Επίσης αναγκαία για την ευστάθεια μιας μεθόδου, είναι και το να πληρείται η συνθήκη των ριζών, που θα ορίσουμε στις επόμενες γραμμές [5].

Μια πολυβηματική μέθοδος, θα ικανοποιεί την **συνθήκη των ριζών** αν για το χαρακτηριστικό της πολυώνυμο π που είναι:

$$\pi(y) = a_k y^k + \dots + a_0,$$

όλες του οι ρίζες έχουν μέτρο μικρότερο ή το πολύ ίσο με την μονάδα και αυτές που θα έχουν μέτρο ίσο με τη μονάδα να είναι απλές.

Δηλαδή:

$$\text{Αν } \pi(y) = 0 \quad \text{τότε} \quad |y| \leq 1,$$

$$\text{και αν } \pi(y) = \pi'(y) = 0 \quad \text{τότε} \quad |y| < 1$$

1.2.4 ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΩΝ ΑΡΧΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

Αρχικά για να περιγράψουμε, με συντομία, το πρόβλημα των αρχικών τιμών θα πρέπει να θεωρήσουμε x_0 και x_n που ανήκουν το R , με $x_0 < x_n$, μια συνάρτηση $f : [x_0, x_n]$ στο R , και y_0 που επίσης ανήκει στο R .

Τότε το κλασικό πρόβλημα των αρχικών τιμών μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

Ψάχνουμε μια συνάρτηση $y : [x_0, x_n]$ στο R , τέτοια ώστε

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad x_0 \leq x \leq x_n,$$

και
$$y(x_0) = y_0$$

Έστω τώρα ότι η f είναι μια συνεχής συνάρτηση που ανήκει στο R . Κάθε συνάρτηση y που ικανοποιεί τόσο την διαφορική εξίσωση, όσο και την αρχική μας συνθήκη $y(x_0) = y_0$ θα λέγεται λύση του προβλήματος των αρχικών μας τιμών, που περιγράψαμε πιο πάνω.

Το παραπάνω πρόβλημα εξετάζεται από την θεωρία των συνήθων διαφορικών εξισώσεων, και ειδικότερη μελέτη γίνεται στις συνθήκες της f που εξασφαλίζουν είτε την ύπαρξη λύσης, είτε την μοναδικότητά της, είτε και τα δυο. Μελέτη ωστόσο γίνεται και για το κατά πόσο η λύση αυτή εξαρτάται συνεχώς από τα αρχικά μας δεδομένα. «Εξαρτάται συνεχώς» εδώ σημαίνει το εξής:

Υποθέτοντας ότι y είναι η λύση του αρχικού μας προβλήματος και t η λύση του αντίστοιχου προβλήματος με αρχική τιμή t_0 αντί για y_0 , θέλουμε όταν η διαφορά των αρχικών τιμών $|t_0 - y_0|$ είναι μικρή, και η αντίστοιχη διαφορά των λύσεων $|t - y|$ να είναι επίσης μικρή.

Έτσι λοιπόν ένα πρόβλημα θα λέμε ότι είναι πρόβλημα αρχικών τιμών, εάν η συνθήκη ή οι συνθήκες που περιγράφουν το πρόβλημα είναι γνωστές, στην αρχή του διαστήματος επίλυσης. Αντίστοιχα, ένα πρόβλημα θα λέμε ότι είναι πρόβλημα συνοριακών τιμών, εάν η συνθήκη ή οι συνθήκες που περιγράφουν το πρόβλημα είναι γνωστές, τόσο στην αρχή, όσο και στο τέλος, του διαστήματος επίλυσης.

1.2.5 ΚΑΛΩΣ ΚΑΙ ΚΑΚΩΣ ΟΡΙΣΜΕΝΕΣ

Ένα μαθηματικό πρόβλημα περιγράφεται με μοναδικό τρόπο κάτω από καθορισμένες αρχικές και συνοριακές συνθήκες. Για να καταφέρουμε να ορίσουμε μονοσήμαντα τη λύση ενός προβλήματος αρχικών ή συνοριακών τιμών, θα πρέπει το πρόβλημα να είναι **καλά τοποθετημένο** ή **καλά ορισμένο**.

Οι προϋποθέσεις για να χαρακτηρίσουμε ένα πρόβλημα ως καλά ορισμένο είναι οι ακόλουθες:

- Να δίνεται η μαθηματική περιγραφή, υπό τη μορφή διαφορικής εξίσωσης, που περιγράφει το πρόβλημα.
- Να έχει λύση η διαφορική εξίσωση
- Η λύση να είναι μοναδική , και
- Να ικανοποιούνται τα δεδομένα του προβλήματος

Με λίγα λόγια θα πρέπει το πρόβλημα να έχει λύση, η λύση αυτή να είναι μοναδική, και να εξαρτάται κατά τρόπο συνεχή, απ' τα δεδομένα του προβλήματος.

Έτσι λοιπόν, οι πιθανές διαταραχές που μπορεί να εμφανιστούν σε κάποιες απ' τις λύσεις της διαφορικής εξίσωσης, η οποία είναι καλώς ορισμένη, θα σβήνουν με τον χρόνο, καθώς οι λύσεις θα συγκλίνουν, ενώ αντιθέτως στις κακώς ορισμένες εξισώσεις, η διαταραχές αυτές τείνουν να διογκώνονται, καθώς οι λύσεις παρουσιάζουν αποκλίνουσα συμπεριφορά.

1.3 ΣΦΑΛΜΑΤΑ

1.3.1 ΣΦΑΛΜΑΤΑ ΜΕΘΟΔΩΝ

Όπως έχουμε ήδη πει, η Αριθμητική Ανάλυση δημιουργεί μεθόδους που επιλύουν διαφορικές εξισώσεις με την βοήθεια του Η/Υ. Αυτό σημαίνει πως γίνεται χρήση μόνο των τεσσάρων βασικών πράξεων (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός και διαίρεση). Το γεγονός αυτό είναι αυτό που ουσιαστικά ευθύνεται για την δημιουργία του σφάλματος.

Έχουμε επίσης αναφέρει ότι οι λύσεις υπολογίζονται προσεγγιστικά. Έτσι λοιπόν προκύπτουν οι έννοιες της ακριβής και της προσεγγιστικής τιμής, όπου όταν καλούμαστε να εφαρμόσουμε μια μέθοδο θα θεωρούμε πως τα δεδομένα μας δίνονται με την ακριβή τους τιμή, ενώ αντιθέτως τα αποτελέσματα θα τα παίρνουμε με την προσεγγιστική τους.

Τα δεδομένα ωστόσο, μπορεί να έχουν προκύψει από μια άλλη υπολογιστική μέθοδο και συνεπώς να αποκλίνουν τα ίδια, από την πραγματική τιμή. Το σφάλμα αυτό το αντιμετωπίζουμε, ενσωματώνοντάς το στο ολικό σφάλμα.

Αν θεωρήσουμε, λοιπόν, x την πραγματική και x^* την προσεγγιστική τιμή μιας αριθμητικής μεθόδου, τότε **σφάλμα** θα ονομάζουμε την ποσότητα $x - x^*$ και θα την συμβολίζουμε με «ε». Η **διόρθωση**, αντίστοιχα, θα είναι η ποσότητα $-ε$ και θα συμβολίζεται με «τ». Το απόλυτο σφάλμα θα είναι το $|τ|$ ή το $|ε|$. Το **σχετικό σφάλμα** θα δίνεται από την σχέση $\delta = \frac{\varepsilon}{x}$, και κατά συνέπεια το απόλυτο σχετικό σφάλμα θα είναι το $|\delta| = \left| \frac{\varepsilon}{x} \right|$.

Εάν τώρα θεωρήσουμε ότι δεν υπάρχουν σφάλματα στα δεδομένα του προβλήματος, τα σφάλματα που προκύπτουν κατά τον υπολογισμό της προσεγγιστικής λύσης από τη μέθοδο, θα διακρίνονται σε δυο κύρια είδη. Το σφάλματα αποκοπής και το σφάλμα στρογγύλευσης.

Όταν η μέθοδος υπολογίσει ένα αλγεβρικό άθροισμα πεπερασμένου πλήθους όρων, αντί για μια σειρά (δηλαδή ένα αλγεβρικό άθροισμα με άπειρους όρους), θα προκύψει το σφάλμα που ονομάζουμε σφάλμα **αποκοπής**. Το σφάλμα αυτό, μπορεί να διαχωριστεί σε τοπικό και ολικό, με το πρώτο να αφορά στο σφάλμα που προκύπτει σε ένα και μόνο βήμα της μεθόδου, ενώ το δεύτερο να αποτελεί το συσσωρευμένο σφάλμα που προκύπτει από το άθροισμα όλων των προηγούμενων τοπικών σφαλμάτων.

Τέλος το σφάλμα **στρογγύλευσης** θα προκύπτει όταν αντικαθιστούμε έναν αριθμό, από έναν άλλο με πεπερασμένο αριθμό δεκαδικών ψηφίων.

Τόσο τα σφάλματα αποκοπής όσο και αυτά της στρογγύλευσης είναι αναπόφευκτα, αφού για τους υπολογισμούς μας, είμαστε αναγκασμένοι να χρησιμοποιούμε πεπερασμένο πλήθος αριθμών, και αριθμούς πεπερασμένων δεκαδικών ψηφίων.

1.4 ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

1.4.1 ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΩΝ ΔΥΟ ΣΩΜΑΤΩΝ

Στην κλασσική μηχανική, το πρόβλημα των δύο σωμάτων (two-body problem) είναι ο καθορισμός της κίνησης δύο υλικών σημείων πεπερασμένης μάζας που έλκονται αμοιβαία με δύναμη αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασής τους (νόμος του Νεύτωνα, δεδομένων των αρχικών συνθηκών θέσεως και ταχύτητας).

Τα πιο χαρακτηριστικά παραδείγματα περιλαμβάνουν έναν δορυφόρο που κινείται σε τροχιά γύρω από έναν πλανήτη, ένας πλανήτης σε τροχιά γύρω από ένα αστέρι, δύο αστέρια που το ένα κινείται σε τροχιά γύρω απ' το άλλο (ένα δυαδικό αστέρι), και το πιο κλασσικό απ' όλα, ένα ηλεκτρόνιο που γυρίζει σε τροχιά γύρω από έναν ατομικό πυρήνα.

[9] Το πρόβλημα των δύο σωμάτων μπορεί να αναδιατυπωθεί ως δύο ανεξάρτητα προβλήματα ενός σώματος, ένα τετριμμένο και ένα που προϋποθέτει την επίλυση για την κίνηση του σωματιδίου, σε μια εξωτερική δύναμη.

Δεδομένου ότι για πολλά προβλήματα ενός σώματος μπορεί να βρεθεί η ακριβής λύση, αφού όπως αποδείχθηκε μπορούν να εκφραστούν με γνωστές συναρτήσεις και συγκεκριμένα τις συναρτήσεις των κωνικών τομών, το αντίστοιχο πρόβλημα των δύο σωμάτων μπορεί επίσης να λυθεί ακριβώς. Αντιθέτως, το πρόβλημα των τριών σωμάτων (και, γενικότερα, το πρόβλημα των N σωμάτων για N μεγαλύτερο ή και ίσο του τρία) δεν μπορεί να λυθεί ακριβώς, εκτός από κάποιες ειδικές περιπτώσεις.

Η ιστορία του προβλήματος αρχίζει με τους Euler και Lagrange περί το 1722 ενώ έχουν συμβάλει ιδιαίτερα και οι Jacobi το 1836, Hill το 1878, Brown το 1896, Poincare το 1899 και Birkhoff το 1950. Παρά το ότι οι εξισώσεις του προβλήματος είχαν διατυπωθεί από την εποχή του Lagrange, με την απόδειξη της μη αναλυτικής λύσης του

προβλήματος από τον Burns το 1892, οι ερευνητές περιορίστηκαν στην ποιοτική του μελέτη.

Ανάλογα με την τροχιά που διαγράφουν τα σωματίδια που μελετούνται διακρίνουμε:

- Το **κυκλικό πρόβλημα**, στο οποίο ο παράγοντας εκκεντρότητας (e) ισούται με μηδέν. Έτσι τα σωματίδια εκτελούν κυκλική κίνηση γύρω από το κέντρο μάζας τους.
- Το **ελλειπτικό πρόβλημα**, στο οποίο ο παράγοντας εκκεντρότητας (e) παίρνει διακριτές τιμές από το σύνολο $(0,1]$. Έτσι τα σωματίδια εκτελούν ελλειπτική κίνηση γύρω από το κέντρο μάζας τους.

Συγκριτικά, μελέτη του ελλειπτικού προβλήματος παρουσιάζει μεγαλύτερο ενδιαφέρον γιατί οι συχνότερα παρουσιαζόμενες περιπτώσεις στον πραγματικό κόσμο, πληρούν ακριβέστερα τις προϋποθέσεις του ελλειπτικού, παρά του κυκλικού προβλήματος.

Έτσι λοιπόν, ο τομέας της θεωρητικής φυσικής που ασχολείται με το πρόβλημα των N-σωμάτων συχνά στηρίζεται σε ένα σύνολο προσεγγίσεων που κάνει το συγκεκριμένο πρόβλημα πιο προσιτό, και το κατατάσσει μεταξύ των πιο υπολογιστικά δύσκολων προβλημάτων της επιστήμης.

1.4.2 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΡΧΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ

Στο παράδειγμα που θα μελετήσουμε σ' αυτήν την εργασία, το πρόβλημα περιγράφεται από το ζεύγος των διαφορικών εξισώσεων που ακολουθεί:

$$y'' = -\frac{y}{r^3}, \quad \text{με } y(0) = 1 - e \quad \text{και } y'(0) = 0$$

$$z'' = -\frac{z}{r^3}, \quad \text{με } z(0) = 0 \quad \text{και } z'(0) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

όπου για την ακτίνα "r" έχουμε: $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ και το ϵ είναι ο παράγοντας εκκεντρότητας.

Η ακριβής λύση του προβλήματος δίνεται από τις παρακάτω εξισώσεις:

$$y(x) = \cos(u) - \epsilon \quad \text{και} \quad z(x) = \sqrt{1 - \epsilon^2} \sin(x)$$

με το "u" να βρίσκεται από την επίλυση της εξίσωσης:

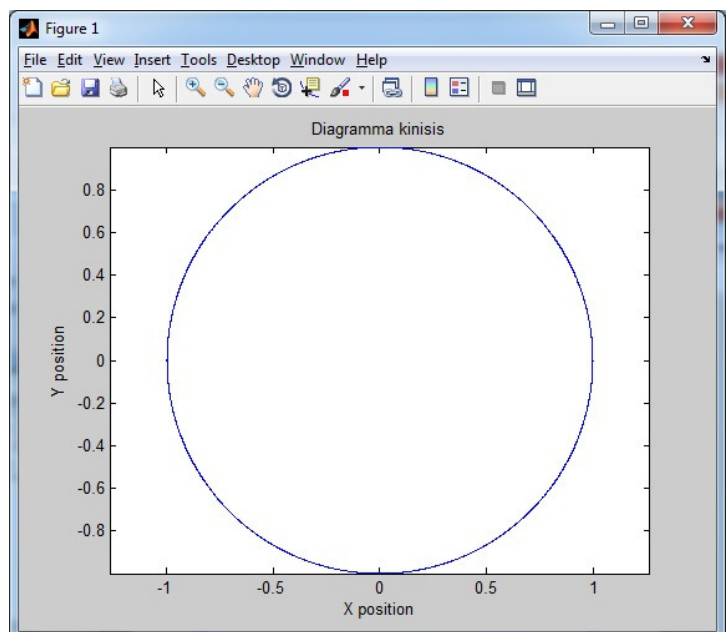
$$u - \epsilon \sin(u) - x = 0.$$

Το σύστημα θα επιλυθεί στο διάστημα χρόνου $t \in [0, 1000]$ και $t \in [0, 100000]$, και η εκτιμηθείσα συχνότητα έχει οριστεί να είναι

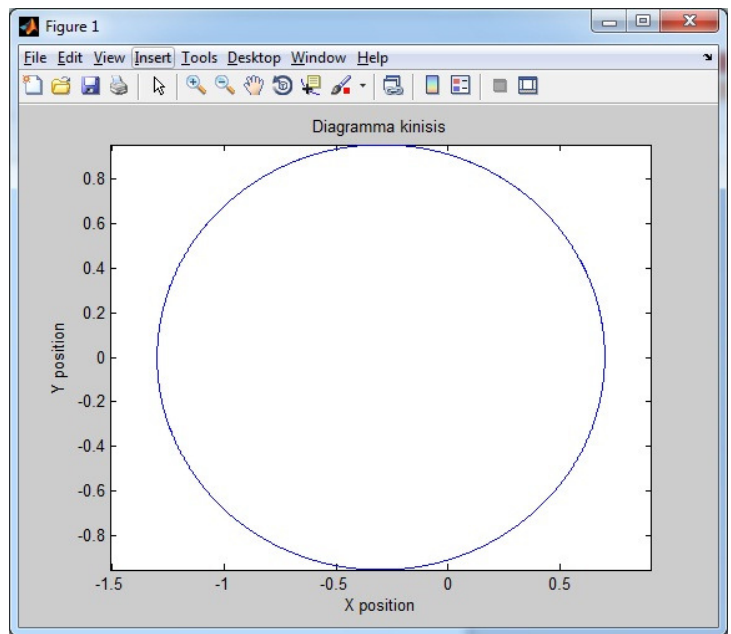
$$w = \sqrt{\frac{1}{r^3}}.$$

Έτσι, για να γίνει πιο εύκολα κατανοητή η έννοια της εκκεντρότητας, παρουσιάζουμε κάποια διαγράμματα θέσης του σώματος για διαφορετικές τιμές του ϵ .

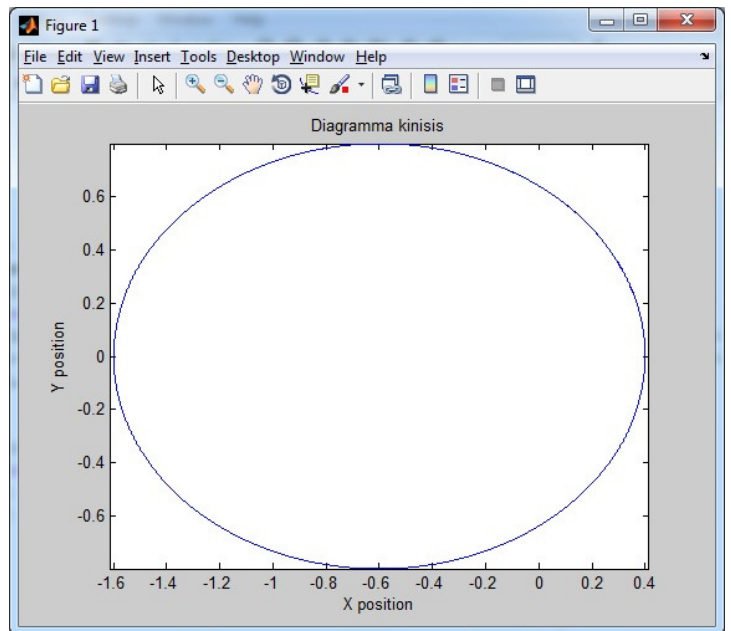
Για $\epsilon = 0$



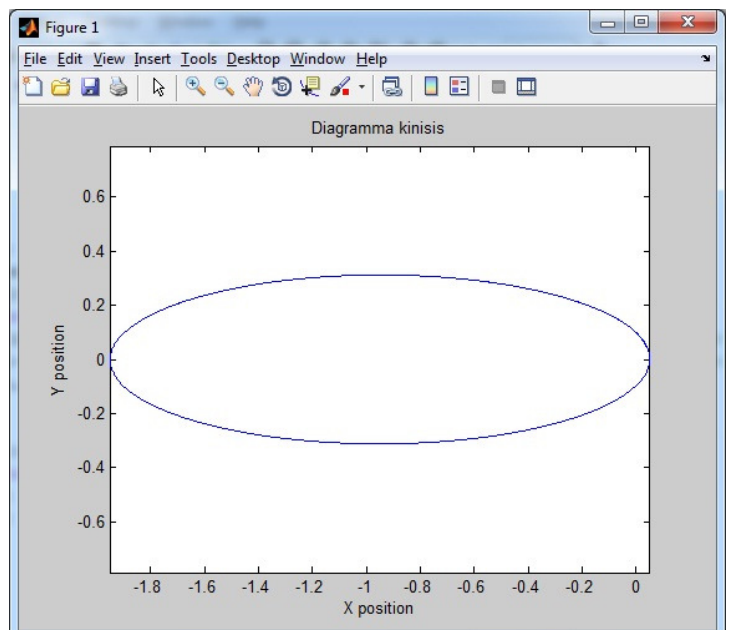
Για $e = 0.3$



Για $e = 0.6$



Για $e = 0.95$



1.5 ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΜΕΘΟΔΩΝ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

1.5.1 ΜΟΝΟΒΗΜΑΤΙΚΕΣ

Στην παρούσα εργασία, δεν θα αναφερθούμε αναλυτικά στις μονοβηματικές μεθόδους επίλυσης διαφορικών εξισώσεων, όμως κρίνεται απαραίτητη μια μικρή αναφορά, ώστε ο αναγνώστης να καταλάβει πως, δεδομένης μιας αρχικής κατάστασης, μπορεί με τις τεχνικές αυτές, να παράγει λύσεις σε περισσότερα του ενός σημεία. Έτσι, δεδομένου αυτών, θα μπορέσει να κάνει χρήση κάποιας πολυβηματικής μεθόδου.

Αρχικά λοιπόν, αναφερόμαστε στην μέθοδο της σειράς **Taylor**, που έχει την μορφή:

$$y_{i+1} = y_i + hy_i' + \dots + \frac{h^k}{k!} y_i^{(k)} \quad | \quad i = 0(1)n-1$$

με σφάλμα αποκοπής της τάξης $O(h^{k+1})$. Ειδικότερα, για $k = 1$ η μέθοδος της σειράς Taylor γίνεται:

$$y_{i+1} = y_i + hy_i' \quad | \quad i = 0(1)n-1$$

και ονομάζεται μέθοδος του Euler.

Στην συνέχεια θα αναφερθούμε στην οικογένεια μεθόδων **Runge – Kutta**, διαχωρίζοντάς τες σε **δεύτερης** ή **τέταρτης** τάξης.

Ο διαχωρισμός αυτός γίνεται με βάση του πώς η μέθοδος προσεγγίζει την τιμή $y'(x_i + \theta_i h)$ με θ_i μικρότερο του ενός και μεγαλύτερο του μηδενός, για κάθε i από μηδέν έως $n-1$. Εάν για παράδειγμα η παραπάνω τιμή προσεγγίζεται από ένα γραμμικό συνδυασμό δυο γνωστών τιμών της συνάρτησής μας, θα λέγεται **δεύτερης τάξης**, ενώ εάν ο γραμμικός συνδυασμός περιλαμβάνει τέσσερις γνωστές θα λέγεται **τέταρτης**.

Πιο συγκεκριμένα η γενική μέθοδος Runge – Kutta δεύτερης τάξης είναι της μορφής:

$$y_{i+1} = y_i + h((1-\lambda)f_i + \lambda f(x_i + \frac{h}{2\lambda}, y_i + \frac{h}{2\lambda} f_i)) \quad | \quad i = 0(1)n-1.$$

Τώρα δίνοντας στο λ την τιμή $\frac{1}{2}$ η παραπάνω μέθοδος μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} (f_i + f(x_i + h, y_i + hf_i)) \quad | \quad i = 0(1)n-1$$

και ονομάζεται βελτιωμένη μέθοδος του **Euler**.

Για $\lambda = 1$ η γενική μας μέθοδος Runge – Kutta δεύτερης τάξης, γίνεται:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f_i) \quad | \quad i = 0(1)n-1$$

και ονομάζεται βελτιωμένη μέθοδος του **πολυγώνου**.

Τέλος η Runge – Kutta τέταρτης τάξης που θα χρησιμοποιήσουμε, όπως θα δούμε και παρακάτω, και στα πειράματά μας και με βήμα έξι φορές μικρότερο της αντίστοιχης πολυβηματικής μεθόδου, για να μην μας επηρεάζει το σφάλμα, είναι της μορφής:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} (k_{1,i} + 2k_{2,i} + 2k_{3,i} + k_{4,i}) \quad | \quad i = 0(1)n-1$$

με τα $k_{1,i}$, $2k_{2,i}$, $2k_{3,i}$ και $k_{4,i}$ να ορίζονται ως εξής:

$$k_{1,i} = f_i$$

$$k_{2,i} = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} k_{1,i})$$

$$k_{3,i} = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} k_{2,i})$$

$$k_{4,i} = f(x_i + h, y_i + h k_{3,i})$$

1.5.2 ΠΟΛΥΒΗΜΑΤΙΚΕΣ

Όπως έχουμε είδη αναφέρει, πολυβηματικές λέγονται οι μέθοδοι εκείνες που για να υπολογίσουν την προσέγγιση της ποσότητας $y(x_{i+1})$, λαμβάνουν υπ' όψιν τους τις ήδη υπολογισμένες προσεγγίσεις σε περισσότερα του ενός προηγούμενα σημεία. Αυτό γίνεται με σκοπό τη βελτίωση της ακρίβειας των μεθόδων, αφού η ποσότητα $|y(x_i) - y_i|$ μεγαλώνει όσο το i αυξάνει.

Σημείωση: Όσες αρχικές τιμές χρειάζεται η εκάστοτε πολυβηματική μέθοδος, θα τις υπολογίζουμε κάνοντας χρήση μιας μονοβηματικής μεθόδου, προσέχοντας πάντα η δεύτερη να έχει τα ίδια ή και καλύτερα χαρακτηριστικά σφάλματος με την πολυβηματική.

Κάτι τέτοιο ενδεχομένως να μπορεί να επιτευχθεί, υπολογίζοντας την μονοβηματική μας, με βήμα μικρότερο της αντίστοιχης πολυβηματικής. Μια τεχνική που χρησιμοποιήσαμε και εμείς, υπολογίζοντας τα απαραίτητα σημεία προσέγγισης με βήμα $h_{\text{μονοβηματικής}} = \frac{h_{\text{πολυβηματικής}}}{6}$.

Πριν συνεχίσουμε με τον διαχωρισμό και την παρουσίαση των μεθόδων, ανάλογα με το πόσα προηγούμενα βήματα χρησιμοποιούν, θα κάνουμε έναν γενικότερο διαχωρισμό. Θα κατηγοριοποιήσουμε λοιπόν τις μεθόδους μας, σε **άμεσα** και **μη άμεσα** επιλύσιμες. Ο διαχωρισμός αυτός έγκειται στο κατά πόσο η ποσότητα y_{i+1} εξαρτάται από την προσέγγιση της συνάρτησης $f(x_{i+1}, y_{i+1})$. Έτσι λοιπόν θα ονομάζουμε **άμεσες** αυτές που το y_{i+1} δεν θα εξαρτάται και **μη άμεσες** αυτές που εξαρτάται από την τιμή της συνάρτησης $f(x_{i+1}, y_{i+1})$.

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε περιληπτικά σε μια Adams – Bashforth (άμεση μέθοδος) και σε μια Adams – Moulton (έμμεση μέθοδος), ώστε παραδειγματικά να δώσουμε μορφή στην παραπάνω θεωρία.

Έτσι λοιπόν μια άμεση Adams – Bashforth μέθοδος θα έχει την μορφή:

$$y_{i+1} = y_i + h\left(\frac{3}{2} f(x_i, y_i) - \frac{1}{2} f(x_{i-1}, y_{i-1})\right) \quad | \quad i=1(1)n-1$$

και όπως φαίνεται και από την σχέση $i=1(1)n-1$ το i θα ξεκινά από 1 και όχι από μηδέν ως συνήθως. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να γνωρίζουμε τις προσεγγίσεις στα σημεία y_0 και y_1 πριν ξεκινήσουμε να εφαρμόζουμε την μέθοδο. Δεδομένου λοιπόν ότι για την λειτουργία της μεθόδου απαιτούνται δύο σημεία, θα την ονομάζουμε **Adams – Bashforth δύο βημάτων**.

Η **Adams – Moulton** μέθοδος που θα παρουσιάσουμε θα είναι και αυτή **δύο βημάτων** και θα χρησιμοποιεί την τιμή της $f(x, y)$ στο σημείο $i+1$. Η μορφή της θα είναι:

$$y_{i+1} = y_i + h\left(\frac{5}{12} f(x_{i+1}, y_{i+1}) + \frac{2}{3} f(x_i, y_i) - \frac{1}{12} f(x_{i-1}, y_{i-1})\right) \quad |$$

$$i=1(1)n-1$$

Οι παραπάνω μέθοδοι είναι απλά παραδείγματα και σημειώνουμε πως υπάρχουν πολλές περισσότερες, που διαχωρίζονται εκτός από άμεσες και έμμεσες, και από τον αριθμό των προηγούμενων προσεγγίσεων που χρησιμοποιούν. Έτσι προκύπτουν οι δυο, τριών, τεσσάρων κ.λπ. βημάτων.

1.5.3 ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ

Για να επιλύσουμε αριθμητικά το παρακάτω πρόβλημα των αρχικών τιμών,

$$y'' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad x \in [x_0, x_n]$$

θα εφαρμόσουμε μια γραμμική πολυβηματική μέθοδο με βήματα m μήκους h , της μορφής:

$$\sum_{j=0}^m a_j y_{n+j} = h^2 \sum_{j=0}^m \beta_j f_{n+j}(x_{n+j}, y_{n+j}), \quad m \geq 2$$

με τα σημεία x_j για j από μηδέν έως m , να χωρίζουν το διάστημα $[x_0, x_n]$ σε ίσα διαστήματα. Η παραπάνω πολυβηματική μέθοδος ωστόσο μπορεί να συνδεθεί με τον παράγοντα:

$$L(x) = \sum_{j=0}^m a_j u(x + jh) - h^2 \sum_{j=0}^m \beta_j u''(x + jh)$$

Έτσι λοιπόν μια γραμμική πολυβηματική μέθοδος τις παραπάνω μορφής θα την λέμε αλγεβρικής τάξης p αν ο παράγοντας L , μηδενίζεται για κάθε γραμμικό συνδυασμό των γραμμικά ανεξαρτήτων συναρτήσεων $1, x, x^2, \dots, x^{p+1}$.

1.5.4 ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ

Ας υποθέσουμε ότι

$$g(\zeta) = \sum_{j=0}^m (a_j \zeta^j) \quad \zeta \in \mathbb{C}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad j=0(1)m$$

τότε θα ονομάζουμε το πολυώνυμο g συμμετρικό εάν,

$$a_j = a_{m-j}, \quad j=0(1)m, \quad \text{και } a_0 \neq 0 \text{ [2].}$$

Επίσης γνωρίζουμε ότι εάν το πολυώνυμο g είναι συμμετρικό και το ζ είναι μια ρίζα του, τότε και το $1/\zeta$ είναι επίσης ρίζα του g . Αντίστοιχα μια μέθοδος θα λέγεται συμμετρική, αν

$$a_j = a_{m-j}, \quad \beta_j = \beta_{m-j}, \quad j=0(1)m.$$

Εδώ θα πρέπει να σημειώσουμε [2] ότι αν μια μέθοδος (ρ, σ) είναι συμμετρική τότε επειδή $a_0 = a_m \neq 0$, το πολυώνυμο ρ είναι

συμμετρικό. Αυτό ωστόσο δεν ισχύει πάντα και αντίστροφα, αφού μπορεί να έχουμε $\beta_0, \dots, \beta_{m+t} = 0$, με $\beta_t = \beta_{m+t} \neq 0$. Τέλος αξίζει να σημειώσουμε ότι ο αριθμός των βημάτων μίας συμμετρικής μεθόδου (ρ, σ) δεν μπορεί να είναι περιττός[2].

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ

ΣΕ ΤΡΟΧΙΑΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

2.1 ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΟΥ ΜΕΛΕΤΟΥΜΕ

Παρακάτω παραθέτουμε τις άμεσες μεθόδους που μελετούμε στην εργασία αυτή. Οι μέθοδοι αυτές μας υπολογίζουν προσεγγιστικά την θέση ενός σώματος την χρονική στιγμή $n+1$, στο πρόβλημα των δυο σωμάτων, δεδομένων των προηγούμενων θέσεων και επιταχύνσεων του. Αποσαφηνίζοντας τα σύμβολα που εμφανίζονται παρακάτω έχουμε,

- y_n να σημαίνει την θέση την χρονική στιγμή n .
- f_n να σημαίνει την επιτάχυνση την χρονική στιγμή n .
- Η **τάξη** n σημαίνει ότι οποιοδήποτε n -βαθμού πολυώνυμο μπορεί να λυθεί επ' ακριβώς από την μέθοδο αυτή.

Η κατηγοριοποίησή τους έχει γίνει με βάση τον αριθμό των προηγούμενων βημάτων που απαιτεί η μέθοδος να έχουν ήδη υπολογιστεί, ώστε να πραγματοποιηθεί η προσέγγιση.

Η πρώτη μέθοδος που μελετάμε, απαιτεί γνώση **δύο** προηγούμενων σημείων, είναι δεύτερης τάξης και είναι ευρέως γνωστή. Θα αναφερόμαστε σ' αυτήν ως Common-2-2.

$$y_3 - 2 \cdot y_2 + y_1 = + h^2 \cdot f_1$$

Η επόμενη μέθοδος απαιτεί γνώση **τριών** προηγούμενων σημείων, είναι δεύτερης τάξης και πηγή της είναι ο Jenkins. Θα αναφερόμαστε σ' αυτήν ως Jenkins-2-3.

$$y_4 - y_3 - y_2 + y_1 = + h^2 \cdot (f_2 + f_1)$$

Η μέθοδος που ακολουθεί απαιτεί γνώση **τεσσάρων** προηγούμενων σημείων, είναι τετάρτης τάξης και πηγή της είναι ο Jenkins. Θα αναφερόμαστε σ' αυτήν ως Jenkins-4-4.

$$y_5 - y_4 - y_2 + y_1 = + \frac{h^2}{4} \cdot (5 \cdot (f_3 + f_1) + 2 \cdot f_2)$$

Εδώ έχουμε άλλη μια μέθοδο τετάρτης τάξης που απαιτεί τη γνώση **τεσσάρων** προηγούμενων σημείων, πηγή της είναι ο Jenkins. Θα αναφερόμαστε σ' αυτήν ως Jenkins-4-4b.

$$y_6 - y_5 - y_2 + y_1 = + \frac{h^2}{6} \cdot (7 \cdot (f_1 + f_4) + 5 \cdot (f_2 + f_3))$$

Η μέθοδος που παρουσιάζουμε εδώ είναι έκτης τάξης και κάνει χρήση **έξι** προηγούμενων σημείων, με πηγή της τον Jenkins. Θα αναφερόμαστε σ' αυτήν ως Jenkins-6-6.

$$y_7 - y_6 - y_2 + y_1 = + \frac{h^2}{48} \cdot (67 \cdot (f_5 + f_1) - 8 \cdot (f_4 + f_2) + 122 \cdot f_3)$$

Αυτή κάνει χρήση **επτά** προηγούμενων σημείων, είναι έκτης τάξης και έχει αναπτυχθεί από τον Jenkins. Θα αναφερόμαστε σ' αυτήν ως Jenkins-6-7.

$$\begin{aligned} \gamma_8 - \gamma_7 - \gamma_2 + \gamma_1 = & + \frac{h^2}{240} \cdot (317 \cdot (f_6 + f_1) \\ & + 69 \cdot (f_5 + f_2) + 334 \cdot (f_4 + f_3)) \end{aligned}$$

Ακολουθούν δυο μέθοδοι όγδοης τάξης, που κάνουν χρήση **οκτώ** προηγούμενων σημείων.

Η πρώτη έχει αναπτυχθεί από τον Jenkins και θα την ονομάζουμε Jenkins-8-8.

$$\begin{aligned} \gamma_9 - \gamma_8 - \gamma_2 + \gamma_1 = & + \frac{h^2}{8640} \cdot (13207 \cdot (f_7 + f_1) \\ & - 8934 \cdot (f_6 + f_2) + 42873 \cdot (f_5 + f_3) \\ & - 33812 \cdot f_4) \end{aligned}$$

Η δεύτερη έχει αναπτυχθεί από τους Quinlan / Tremaine και θα την ονομάζουμε QT-8-10.

$$\begin{aligned} \gamma_9 + \gamma_1 - 2 \cdot (\gamma_8 - \gamma_2) + 2 \cdot (\gamma_7 - \gamma_3) - \gamma_6 - \gamma_4 = \\ & + \frac{h^2}{12096} \cdot (17671 \cdot (f_7 + f_1) \\ & - 23622 \cdot (f_6 + f_2) + 61449 \cdot (f_5 + f_3) \\ & - 50516 \cdot f_4) \end{aligned}$$

Η παρακάτω μέθοδος, είναι επίσης όγδοης τάξης, και απαιτεί την γνώση **εννέα** προηγούμενων σημείων ώστε να βρει την προσεγγιστική λύση στο ζητούμενο σημείο. Αναπτύχθηκε από τον Jenkins και θα αναφερόμαστε σ' αυτήν με το όνομα Jenkins-8-9.

$$\begin{aligned}
 y_{10} - y_9 - y_2 + y_1 = & + \frac{h^2}{15120} \cdot (22081 \cdot (f_8+f_1) \\
 & -7337 \cdot (f_7+f_2) + 45765 \cdot (f_6+f_3) \\
 & -29 \cdot (f_5+f_4))
 \end{aligned}$$

Ακολουθούν οι μέθοδοι που απαιτούν την γνώση **δέκα** προηγούμενων σημείων.

Η πρώτη με το προσωνύμιο Jenkins-10-10, είναι δεκάτης τάξης και πηγή προέλευσής της είναι ο Jenkins.

$$\begin{aligned}
 y_{11} - y_{10} - y_2 + y_1 = & + \frac{h^2}{403200} \cdot (666151 \cdot (f(9)+f(1)) \\
 & -841748 \cdot (f_8+f_2) + 3606748 \cdot (f_7+f_3) \\
 & -5111276 \cdot (f_6+f_4) + 6989050 \cdot f_5)
 \end{aligned}$$

Η επόμενη, επίσης δεκάτης τάξης, έχει αναπτυχθεί από τους Quinlan / Tremaine και την ονομάζουμε QT-10-10.

$$y_{11} + y_1 - (y_{10} - y_2) + (y_9 - y_3) - (y_8 - y_4) + (y_7 - y_5) - 2 \cdot y_6 =$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{h^2}{241920} \cdot (399187 \cdot (f_9+f_1) \\
& -485156 \cdot (f_8+f_2) + 2391436 \cdot (f_7+f_3) \\
& -2816732 \cdot (f_6+f_4) + 4651330 \cdot f_3)
\end{aligned}$$

Ακολουθούν δυο μέθοδοι που χρησιμοποιούν **δώδεκα** προηγούμενα βήματα και είναι δωδέκατης τάξης.

Την πρώτη την ονομάζουμε Jenkins-12-12 και πηγή προέλευσής της είναι ο Jenkins.

$$\begin{aligned}
y_{13} - y_{12} - y_2 + y_1 = & + \frac{h^2}{14515200} \cdot (25671198 \cdot (f_{11}+f_1) \\
& -48082866 \cdot (f_{10}+f_2) + 214734403 \cdot (f_9+f_3) \\
& -426775928 \cdot (f_8+f_4) + 713681566 \cdot (f_7+f_5) \\
& -798789548 \cdot f_6)
\end{aligned}$$

Την επόμενη την ονομάζουμε QT-12-12 και πηγή προέλευσής της είναι οι Quinlan / Tremaine.

$$\begin{aligned}
y_{13} + y_1 - 2 \cdot (y_{12}+y_2) + 2 \cdot (y_{11}+ y_3) - y_{10} - y_4 = \\
& + \frac{h^2}{53222400} \cdot (90987349 \cdot (f_{11}+f_1) \\
& -229596838 \cdot (f_{10}+f_2) + 812627169 \cdot (f_9+f_3) \\
& -1628539944 \cdot (f_8+f_4) + 2714971338 \cdot (f_7+f_5) \\
& -3041896548 \cdot f_6)
\end{aligned}$$

Η μέθοδος που ακολουθεί είναι επίσης δωδέκατης τρίτης τάξης και χρειάζεται να γνωρίζουμε την λύση του προβλήματος σε **δεκατρία** προηγούμενα σημεία. Την ονομάζουμε Jenkins-12-13 και έχει εισαχθεί από τον Jenkins.

$$\begin{aligned}
 y_{14} - y_{13} - y_2 + y_1 = & + \frac{h^2}{79833600} \cdot (136462207 \cdot (f_{12} + f_1) \\
 & - 207556851 \cdot (f_{11} + f_2) + 867125681 \cdot (f_{10} + f_3) \\
 & - 1296919125 \cdot (f_9 + f_4) + 1550731494 \cdot (f_8 + f_5) \\
 & - 570841806 \cdot (f_7 + f_6))
 \end{aligned}$$

Κλείνουμε την παρουσίασή μας στις μεθόδους που θα μελετηθούν, παρουσιάζοντας δυο μεθόδους που χρειάζονται **δέκα τέσσερα** προηγούμενα βήματα για τους υπολογισμούς τους. Είναι και οι δύο δεκάτης τέταρτης τάξης.

Η πρώτη ονομάζεται Jenkins-14-14 και προέρχεται από τον Jenkins.

$$\begin{aligned}
 y_{15} - y_{14} - y_2 + y_1 = & + h^2 \cdot (1.879196588 \cdot (f_{13} + f_1) \\
 & - 4.697471979 \cdot (f_{12} + f_2) \\
 & + 22.785378909 \cdot (f_{11} + f_3) \\
 & - 57.547366474 \cdot (f_{10} + f_4) \\
 & + 116.663744566 \cdot (f_9 + f_5) \\
 & - 171.425686892 \cdot (f_8 + f_6))
 \end{aligned}$$

$$+197.684410559 \cdot f_7)$$

Την παρακάτω την έχουν αναπτύξει οι Quinlan / Tremaine και θα αναφερόμαστε σ' αυτήν με το όνομα QT-14-14.

$$\begin{aligned} & \gamma_{15} + \gamma_1 - 2 \cdot (\gamma_{14} - \gamma_2) + 2 \cdot (\gamma_{13} - \gamma_3) - (\gamma_{12} - \gamma_4) = \\ & + \frac{h^2}{237758976000} \cdot (433489274083 \cdot (f_{13} + f_1) \\ & - 1364031998256 \cdot (f_{12} + f_2) \\ & + 5583113380398 \cdot (f_{11} + f_3) \\ & - 14154444148720 \cdot (f_{10} + f_4) \\ & + 28630585332045 \cdot (f_9 + f_5) \\ & - 42056933842656 \cdot (f_8 + f_6) \\ & + 48471792742212 \cdot f_7) \end{aligned}$$

Τα παραπάνω εξηγούνται σε βάθος στα παρακάτω papers:
Quinlan / Tremaine [1], Lambert, J.D., and Watson [2]
και «*Backward Error Analysis for Multistep Methods*» του Ernst Heiner [3].

Οι **χρονικά αντιστρέψιμες** μέθοδοι έχουν την ιδιότητα όπου εάν οι καταστάσεις 0...n προβλέπουν την κατάσταση n+1, αυτό συνεπάγεται ότι οι καταστάσεις n+1..1 μπορούν επίσης να προβλέψουν την κατάσταση 0.

Δεν γίνεται ωστόσο να προκαταλάβουμε το εάν θα έχουμε κέρδος ή χάσιμο ενέργειας επειδή για κάθε κατάσταση μας δίνει

κέρδος, υπάρχει μια αντίστοιχη που μας δίνει απώλεια. Δυστυχώς, όλα τα χρονικά αντιστρέψιμα συστήματα υπόκεινται στην εντροπία. Εάν δηλαδή οι καταστάσεις $0 \dots n$ έχουν σφάλματα, τα σφάλματα αυτά δεν μπορούμε να τα περιορίσουμε.

Η μόνη ελπίδα σε τέτοιες περιπτώσεις είναι να μην έχουμε σφάλματα εξ' αρχής. Τα μη αναστρέψιμα συστήματα, απ' την άλλη πλευρά, μπορούν να περιορίσουν τέτοια σφάλματα. Τα μη αναστρέψιμα συστήματα, όπως και τα αναστρέψιμα, δεν διατηρούν την ενέργεια.

Όλες οι μέθοδοι που εξετάζονται εδώ, βασίζονται τις προβλέψεις τους στα πολυώνυμα που καθορίζονται από ζευγάρια μετρήσεων. $N+1$ δεδομένα μπορούν να δώσουν ένα N βαθμού πολυώνυμο, εάν αγνοήσουμε τα παράγωγα πέραν του N . Πράγμα βέβαια που δεν δίνει πάντα την επιθυμητή ακρίβεια.

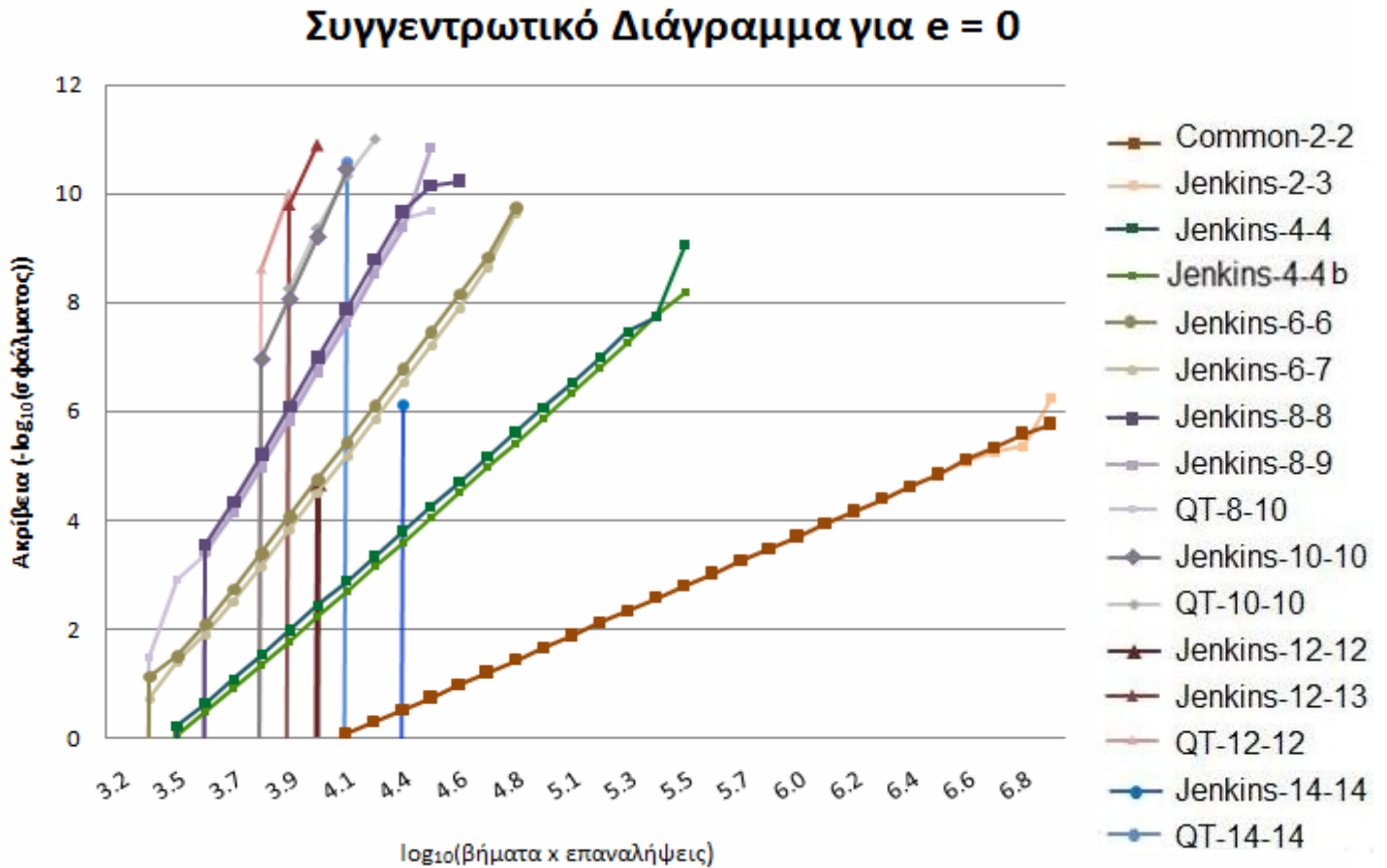
2.2 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΓΙΑ $t \in [0 \ 10^3]$

Παρακάτω παραθέτουμε τα διαγράμματα που δημιουργήσαμε, από τα αποτελέσματα που πήραμε για την επίλυση του προβλήματος των δύο σωμάτων, σε διάστημα ολοκλήρωσης $t \in [0 \ 1000]$.

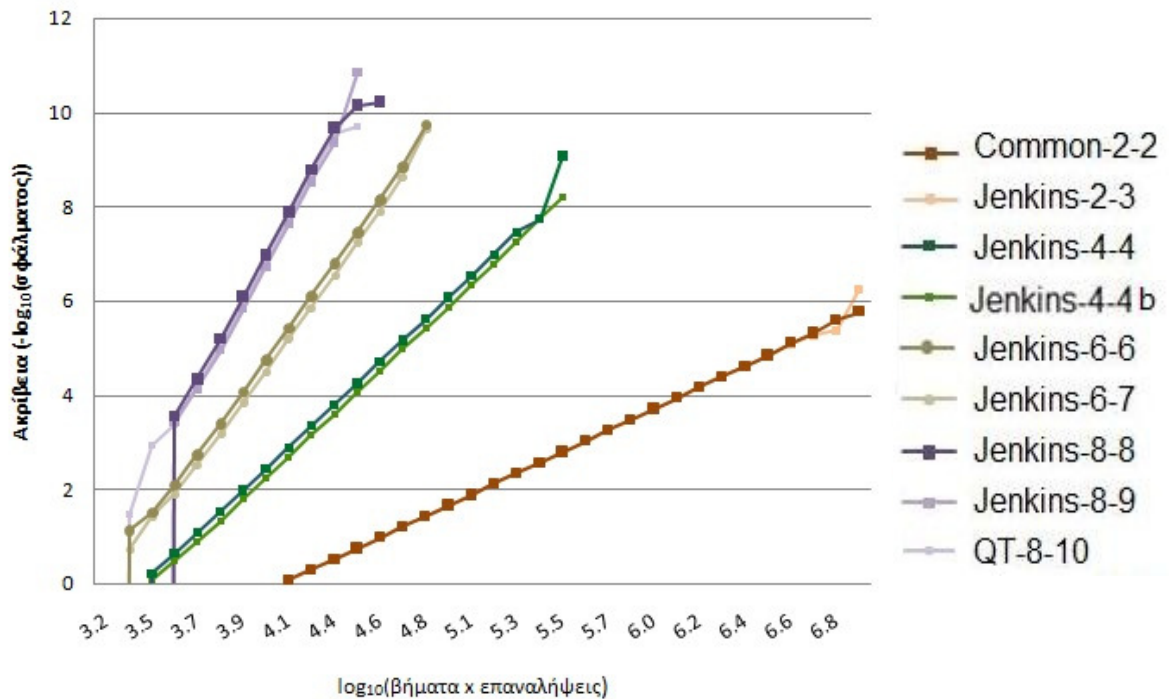
Για λόγους πρακτικούς έχουμε ομαδοποιήσει τις μεθόδους μας σε αυτές που απαιτούν την γνώση, το πολύ εννέα προηγούμενων σημείων, και σε αυτές που χρειάζεται να γνωρίζουν από δέκα και πάνω. Παράλληλα με την παρουσίαση των αποτελεσμάτων, θα γίνεται και ο σχολιασμός τους.

2.2.1 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΓΙΑ $e=0$

Ακολουθεί το διάγραμμα με όλες τις μεθόδους, για $e=0$.



Μέθοδοι από 2 έως 9 βήματα

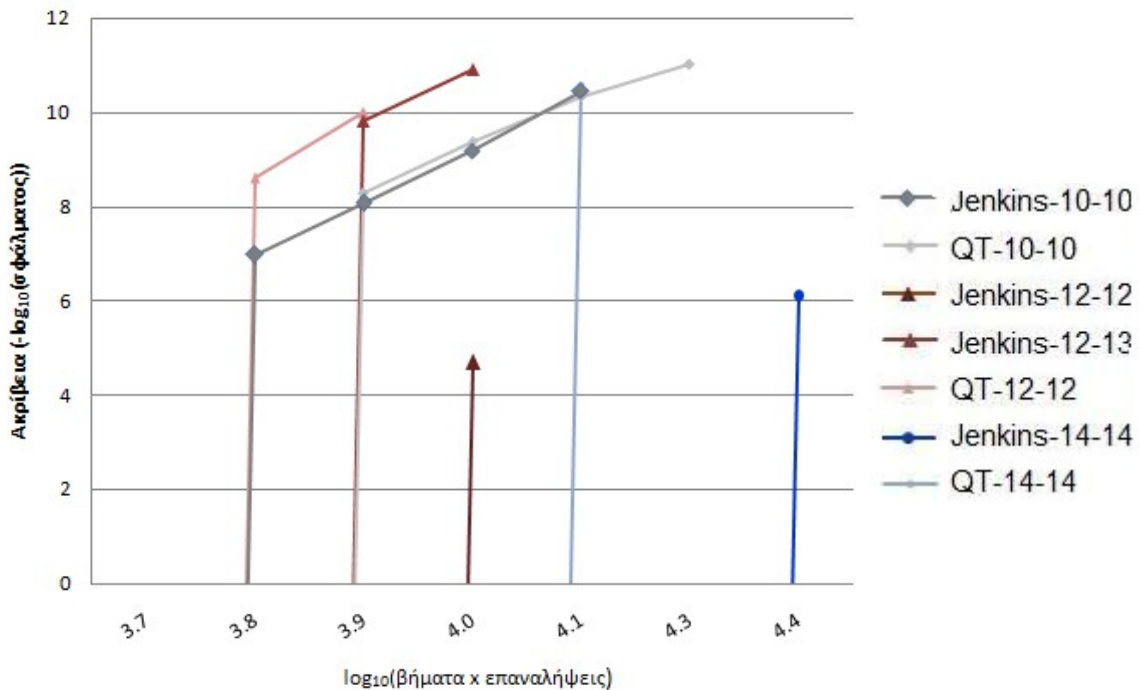


Εδώ παρατηρούμε αρχικά τις μεθόδους "Common-2-2" και "Jenkins-2-3" που ξεκινούν να προσεγγίζουν την ακριβή λύση στα $10^{4.1}$ βήματα και να πιάνουν ακρίβεια, κοντά στα έξι δεκαδικά ψηφία στα $10^{6.9}$ βήματα.

Στη συνέχεια βλέπουμε τις μεθόδους "Jenkins-4-4" και "Jenkins-4-4b" να ξεκινούν τους υπολογισμούς στα $10^{3.5}$ βήματα, με την πρώτη να πιάνει ακρίβεια εννέα δεκαδικών, και την δεύτερη λίγο πάνω απ' τα οκτώ, στα $10^{5.5}$ βήματα.

Οι υπόλοιπες μέθοδοι, εκτός της "Jenkins-8-8" που αρχίζει στα $10^{3.6}$, ξεκινούν να έχουν ακρίβεια στα $10^{3.4}$ βήματα. Βλέπουμε επίσης ότι η "Jenkins-8-8" και η "Jenkins-8-9" είναι οι μόνες που προσεγγίζουν την ακριβή λύση με ακρίβεια μεγαλύτερη των δέκα δεκαδικών ψηφίων. Η "Jenkins-8-9" μάλιστα, φτάνει μέχρι και τα έντεκα δεκαδικά.

Μέθοδοι από 10 έως 16 βήματα



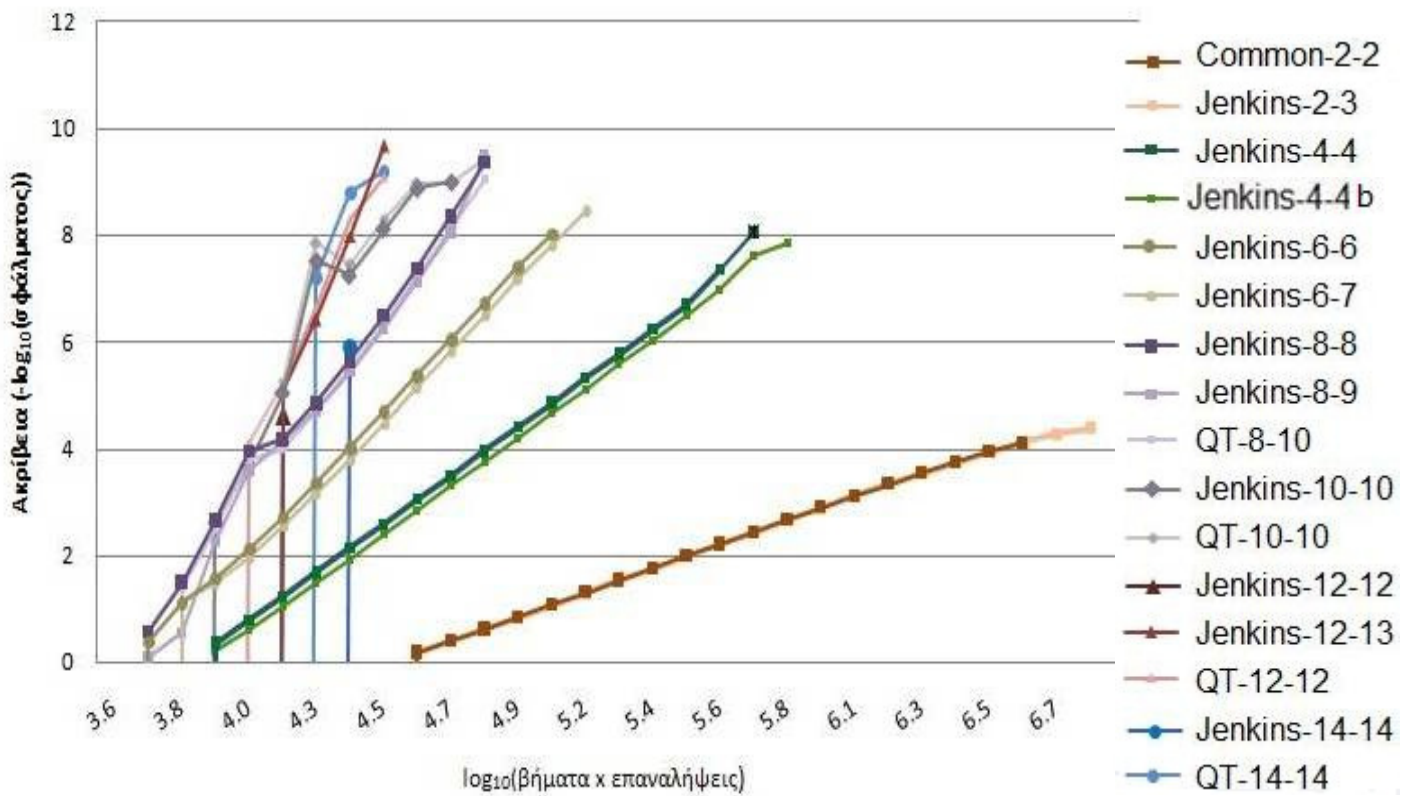
Σε αυτό το διάγραμμα, για τις μεθόδους από δέκα έως και δεκαέξι βήματα, παρατηρούμε ότι οι "Jenkins-12-12" και "Jenkins-14-14" είναι από τις λιγότερο αποδοτικές, αφού δεν ξεπερνούν σε ακρίβεια, η μεν πρώτη τα πέντε, η δε δεύτερη τα επτά δεκαδικά ψηφία. Οι υπόλοιπες μέθοδοι ωστόσο, αρχίζουν να έχουν ακρίβεια στα $10^{3.8}$ με $10^{4.1}$ βήματα και πιάνουν ακρίβειες τις τάξης των δέκα και άνω δεκαδικών.

Οι "Jenkins-12-13" και "QT-14-14" συγκεκριμένα, προσεγγίζουν την λύση με ακρίβεια έντεκα δεκαδικών ψηφίων και μαζί με την "Jenkins-8-9", απ' το παραπάνω διάγραμμα, είναι από τις καλύτερες για το συγκεκριμένο πρόβλημα, όπου ο παράγοντας ϵ είναι μηδέν.

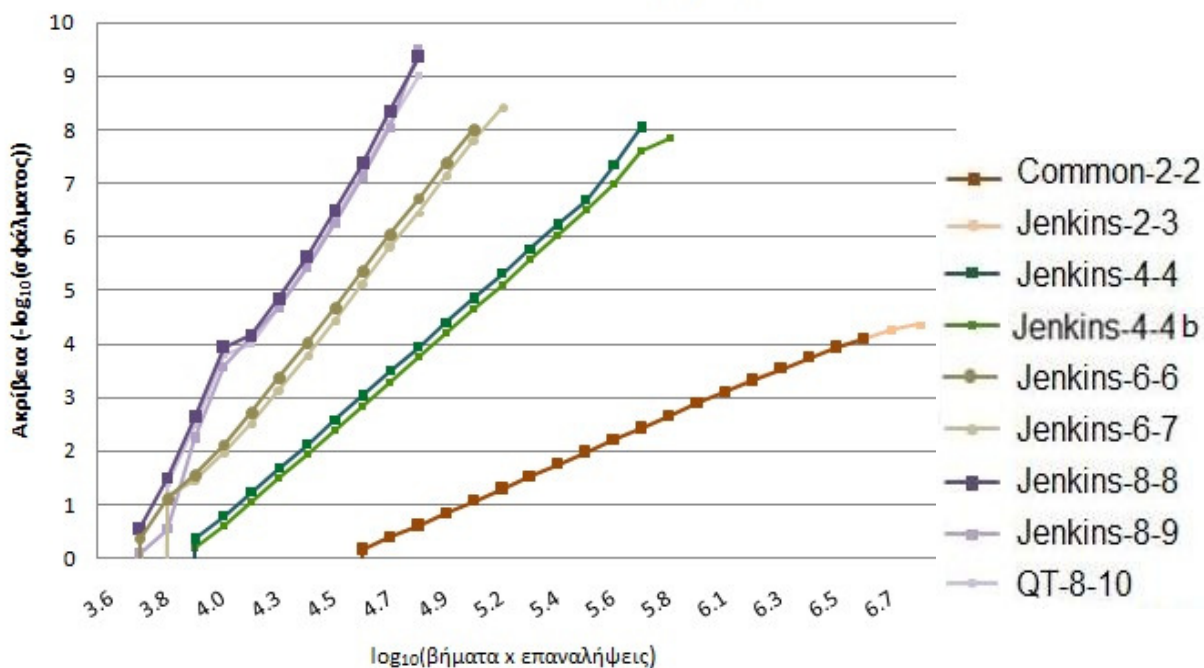
2.2.2 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΓΙΑ $\epsilon=0.2$

Ακολουθεί το διάγραμμα με όλες τις μεθόδους, για $\epsilon=0.2$.

Συγγεντρικό Διάγραμμα για $\epsilon = 0.2$



Μέθοδοι από 2 έως 9 βήματα

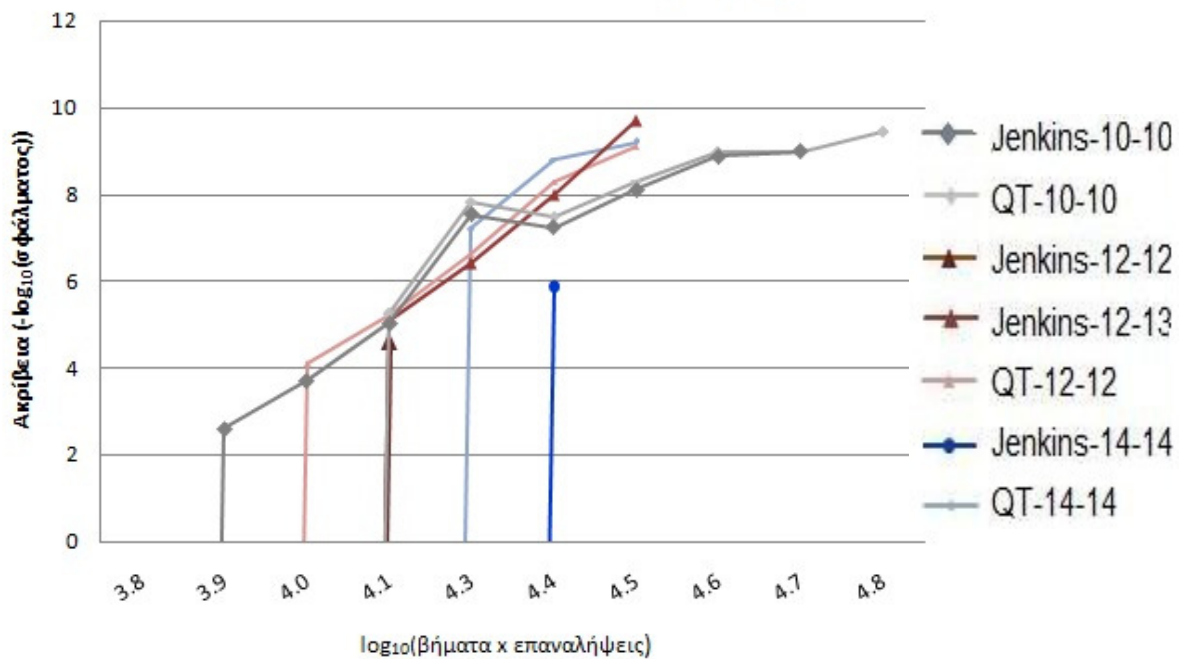


Στο παραπάνω διάγραμμα θα δούμε αρχικά τις μεθόδους “Common-2-2” και “Jenkins-2-3” που αρχίζουν την προσέγγισή τους στα $10^{4.6}$ βήματα και πίνουν ακρίβεια, μεταξύ τεσσάρων και πέντε δεκαδικών ψηφίων στα $10^{6.8}$ βήματα.

Στη συνέχεια βλέπουμε τις μεθόδους “Jenkins-4-4” και “Jenkins-4-4b” που ξεκινώντας τους υπολογισμούς τους στα $10^{4.0}$ βήματα, φτάνουν σε ακρίβεια τα οκτώ περίπου δεκαδικά, με την “Jenkins-4-4” να προηγείται ελαφρώς σε όλη τη δοκιμή.

Οι υπόλοιπες μέθοδοι, ξεκινούν να έχουν ακρίβεια από τα $10^{3.7}$ μέχρι τα $10^{3.9}$ βήματα. Τέλος βλέπουμε ότι η “Jenkins-8-8” και η “Jenkins-8-9” είναι οι μόνες που προσεγγίζουν την ακριβή λύση με ακρίβεια μεγαλύτερη των εννέα δεκαδικών ψηφίων.

Μέθοδοι από 10 έως 16 βήματα

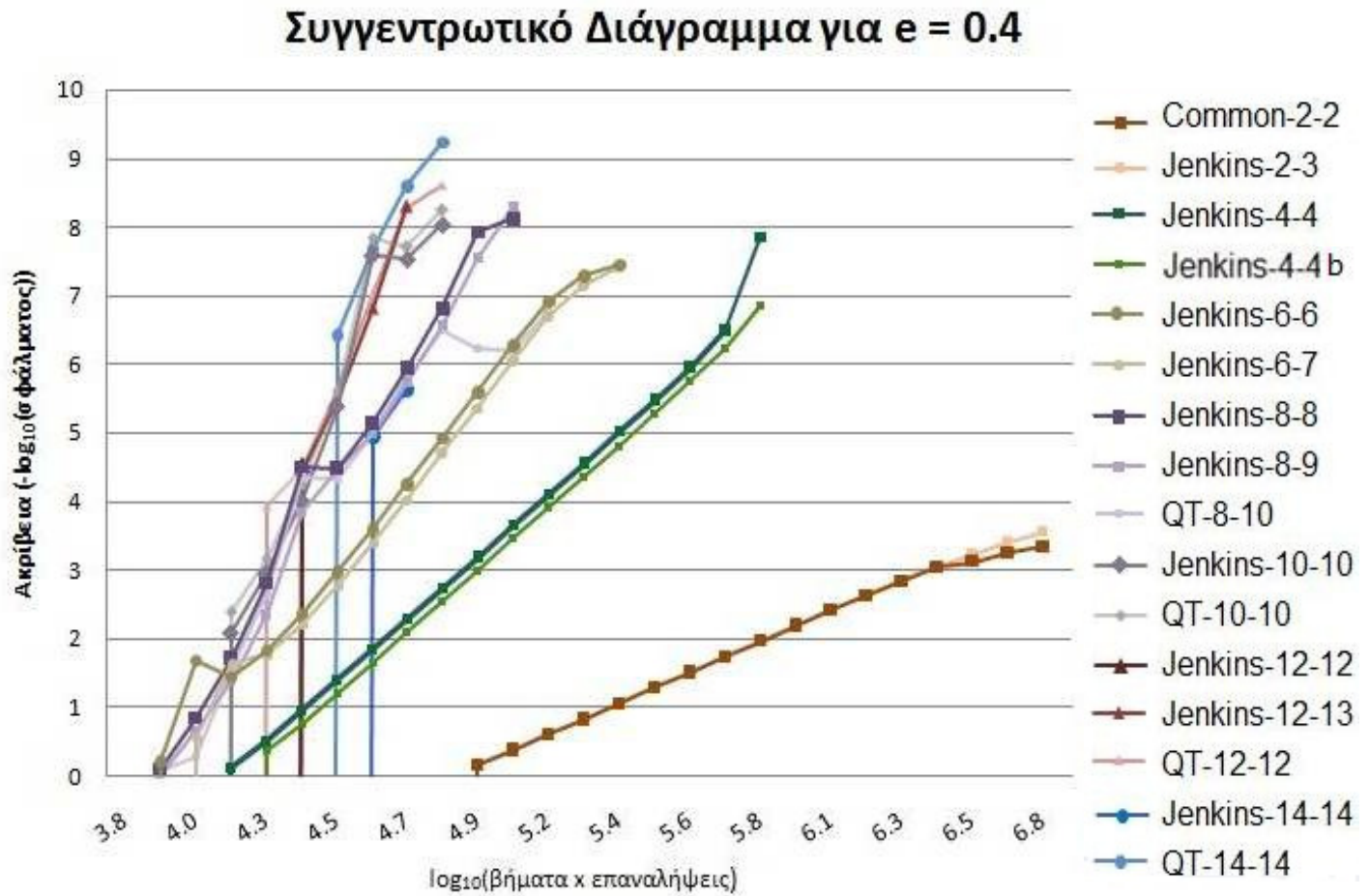


Εδώ παρατηρώντας τις μεθόδους από δέκα έως και δεκαέξι βήματα, βλέπουμε ότι οι "Jenkins-12-12" και "Jenkins-14-14" είναι από τις λιγότερο αποδοτικές, αφού δεν ξεπερνούν σε ακρίβεια, η πρώτη τα πέντε, και η δεύτερη τα έξι δεκαδικά ψηφία. Οι "Jenkins-10-10", "QT-10-10", "Jenkins-12-13", "QT-12-12", "QT-14-14", αρχίζουν να βρίσκουν ακρίβεια από τα $10^{3.9}$ μέχρι τα $10^{4.1}$ βήματα και να πιάνουν ακρίβειες τις τάξης των εννέα και άνω δεκαδικών.

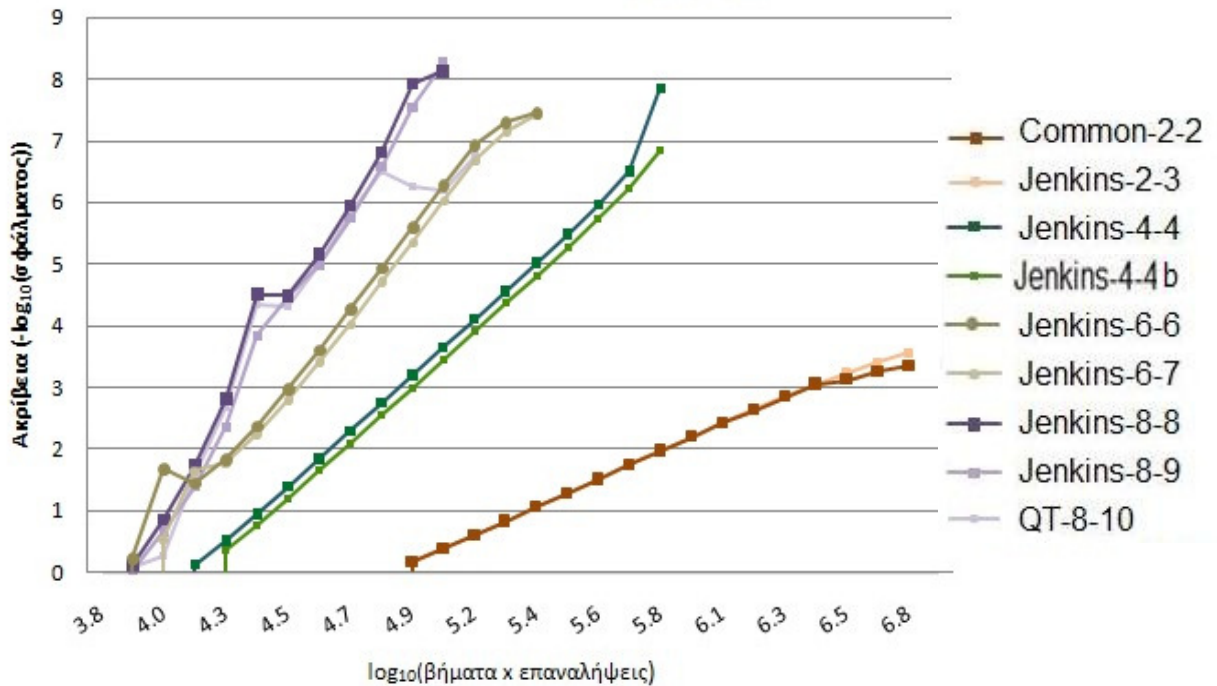
Οι "Jenkins-12-13" και "QT-14-14" συγκεκριμένα, προσεγγίζουν την λύση με ακρίβεια σχεδόν δέκα δεκαδικών ψηφίων και μαζί με την "Jenkins-8-9", συνεχίζουν και για αυτό το πρόβλημα, όπου ο παράγοντας ϵ είναι 0.2, να είναι από τις καλύτερες μεθόδους που μελετούμε.

2.2.3 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΓΙΑ $e=0.4$

Ακολουθεί το διάγραμμα με όλες τις μεθόδους, για $e=0.4$.



Μέθοδοι από 2 έως 9 βήματα

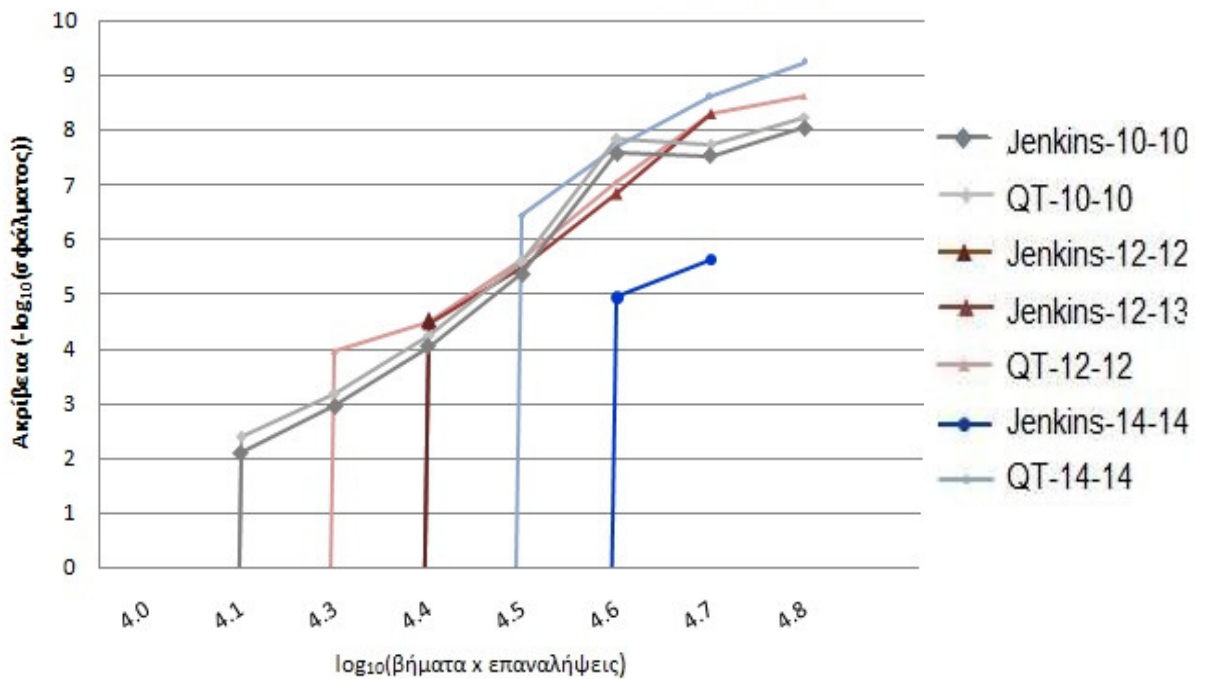


Παρατηρώντας το διάγραμμα αυτό βλέπουμε τις μεθόδους "Common-2-2" και "Jenkins-2-3" να αρχίζουν την προσέγγισή τους στα $10^{4.9}$ βήματα και πίνουν ακρίβεια, μεταξύ τριών και τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων στα $10^{6.8}$ βήματα.

Έπειτα βλέπουμε τις μεθόδους "Jenkins-4-4" και "Jenkins-4-4b" που ξεκινώντας περίπου από τα $10^{4.3}$ βήματα, φτάνουν σε ακρίβεια, η μεν πρώτη περίπου τα οκτώ, η δε δεύτερη τα επτά δεκαδικά.

Οι υπόλοιπες μέθοδοι, ξεκινούν να έχουν ακρίβεια στα $10^{3.9}$ βήματα. Επίσης βλέπουμε ότι η "Jenkins-8-8" και η "Jenkins-8-9" είναι οι μόνες που προσεγγίζουν την ακριβή λύση με ακρίβεια μεγαλύτερη των οκτώ δεκαδικών ψηφίων, με τις υπόλοιπες να φτάνουν περίπου τα επτάμιση.

Μέθοδοι από 10 έως 16 βήματα

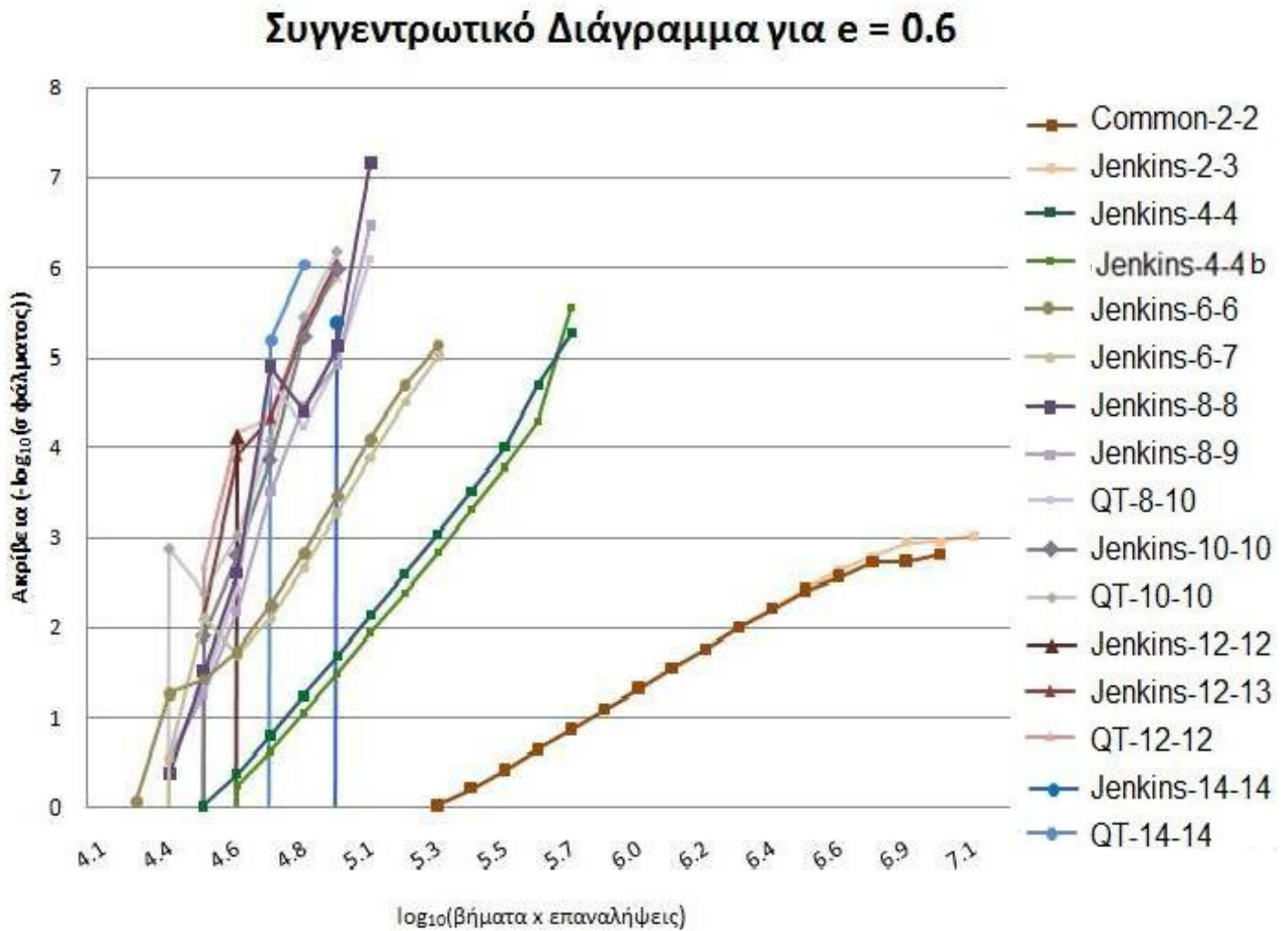


Για τις μεθόδους από δέκα έως και δεκαέξι βήματα, παρατηρούμε ότι οι "Jenkins-12-12" και "Jenkins-14-14" είναι από τις λιγότερο αποδοτικές, αφού δεν ξεπερνούν σε ακρίβεια, η πρώτη τα πέντε, και η δεύτερη τα έξι δεκαδικά ψηφία. Οι "Jenkins-10-10", "QT-10-10", "Jenkins-12-13", "QT-12-12", "QT-14-14", αρχίζουν να βρίσκουν λύση με κάποια σχετική ακρίβεια από τα $10^{4.1}$ μέχρι τα $10^{4.5}$ βήματα και πιάνουν ακρίβειες τις τάξης των οκτώ και άνω δεκαδικών στα $10^{4.8}$ βήματα.

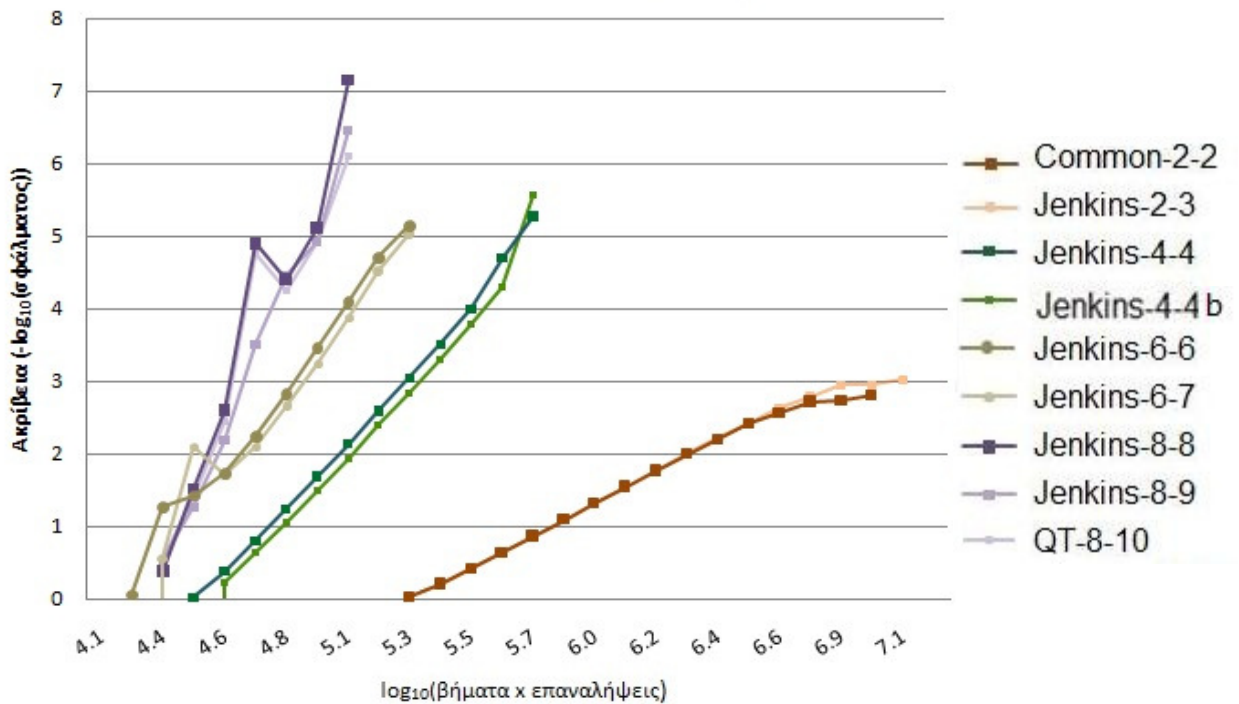
Συγκεκριμένα η "QT-14-14", προσεγγίζει την λύση με ακρίβεια άνω των εννέα δεκαδικών ψηφίων και για αυτό το πρόβλημα, όπου ο παράγοντας e είναι 0.4, είναι με διαφορά μισού δεκαδικού η καλύτερη απ' τις μεθόδους που μελετούμε.

2.2.4 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΓΙΑ $e=0.6$

Ακολουθεί το διάγραμμα με όλες τις μεθόδους, για $e=0.6$.



Μέθοδοι από 2 έως 9 βήματα



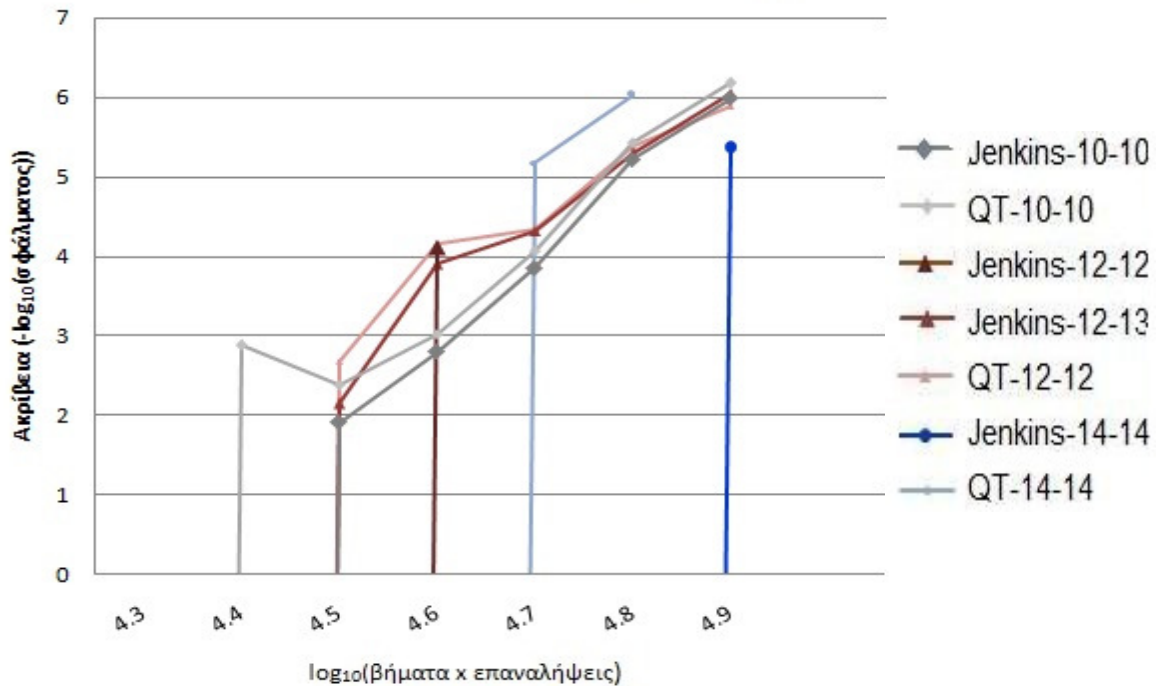
Εδώ αρχικά παρατηρούμε τις μεθόδους “Common-2-2” και “Jenkins-2-3” που αρχίζουν την προσέγγιση τους στα $10^{5.3}$ βήματα και πίνουν ακρίβεια, οριακά τριών τριών δεκαδικών ψηφίων στα $10^{7.1}$ βήματα.

Στη συνέχεια βλέπουμε τις μεθόδους “Jenkins-4-4” και “Jenkins-4-4b” που ξεκινώντας περίπου από τα $10^{4.6}$ βήματα, φτάνουν σε ακρίβεια πάνω απ’ τα πέντε δεκαδικά ψηφία.

Οι υπόλοιπες μέθοδοι, ξεκινούν να έχουν ακρίβεια στα $10^{4.4}$ βήματα. Προχωρώντας βλέπουμε ότι η “Jenkins-8-8” είναι η μόνη που προσεγγίζει την ακριβή λύση με ακρίβεια μεγαλύτερη των επτά δεκαδικών ψηφίων, με τις “Jenkins-8-9” και “QT-8-10” να ξεπερνούν οριακά τα έξι.

Οι “Jenkins-6-6” και “Jenkins-6-7” με την σειρά τους, προσεγγίζουν την λύση με ακρίβεια περίπου πέντε δεκαδικών.

Μέθοδοι από 10 έως 16 βήματα



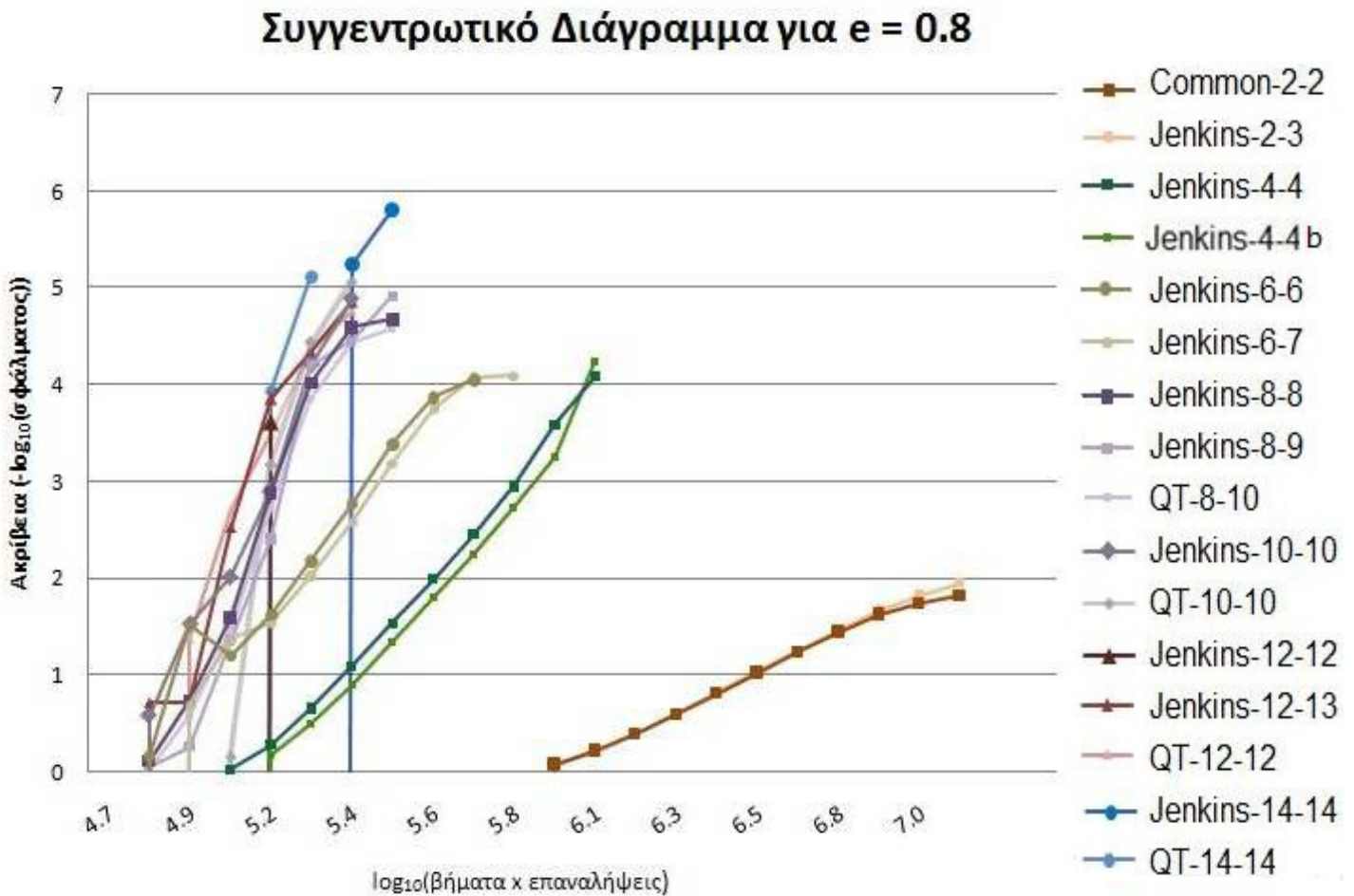
Από το επιμέρους διάγραμμα που αφορά στις μεθόδους από δέκα έως και δεκαέξι βήματα, παρατηρούμε ότι οι "Jenkins-12-12" είναι από η λιγότερο αποδοτική, αφού μόλις που ξεπερνά σε ακρίβεια τα τέσσερα δεκαδικά ψηφία. Οι "Jenkins-10-10", "QT-10-10", "Jenkins-12-13", "QT-12-12", "QT-14-14", αρχίζουν να βρίσκουν ακρίβεια από τα $10^{4.4}$ μέχρι τα $10^{4.7}$ βήματα και πιάνουν μέγιστη ακρίβεια κοντά στα έξι δεκαδικά.

Βελτιωμένη εμφανίζεται και η "Jenkins-14-14" που πλησιάζει τα πεντέμισι δεκαδικά ψηφία.

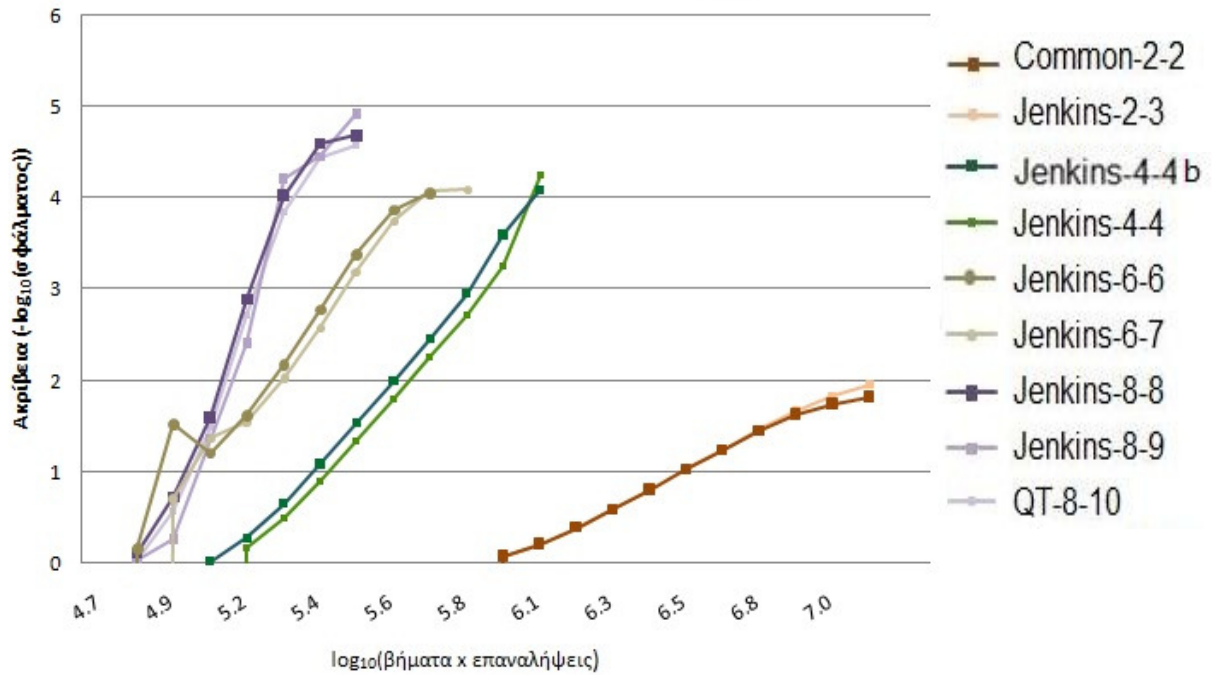
Η "Jenkins-8-8", είναι η καλύτερη απ' τις μεθόδους που μελετούμε αφού προσεγγίζει την λύση με ακρίβεια άνω των έξι δεκαδικών ψηφίων για το πρόβλημα με παράγοντα $e = 0.6$.

2.2.5 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΓΙΑ $e=0.8$

Ακολουθεί το διάγραμμα με όλες τις μεθόδους, για $e=0.8$.



Μέθοδοι από 2 έως 9 βήματα

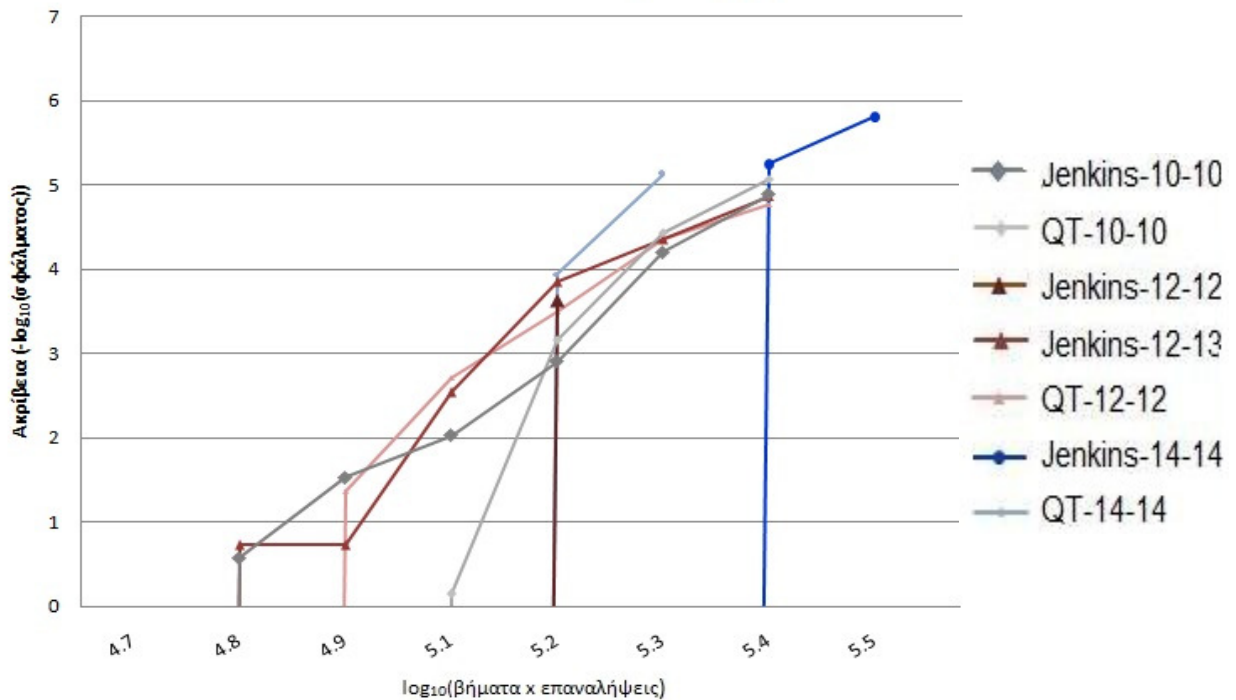


Στο παραπάνω διάγραμμα αρχικά παρατηρούμε τις μεθόδους “Common-2-2” και “Jenkins-2-3” που ξεκινούν να προσεγγίζουν την ακριβή λύση στα $10^{5.9}$ βήματα και να πιάνουν ακρίβεια, που πλησιάζει τα δύο δεκαδικά ψηφία στα $10^{7.2}$ βήματα. Προσεγγίζουν λοιπόν την λύση με ακρίβεια ενός δεκαδικού λιγότερου, απ’ ότι στην παραπάνω περίπτωση ($e = 0.4$).

Στη συνέχεια βλέπουμε τις μεθόδους “Jenkins-4-4” και “Jenkins-4-4b” να ξεκινούν τους υπολογισμούς στα $10^{5.0}$ βήματα η πρώτη και $10^{5.3}$ η δεύτερη. Οι δυο τους πιάνουν ακρίβεια λίγο μεγαλύτερη των τεσσάρων δεκαδικών. Την ίδια ακρίβεια με τις δυο αυτές μεθόδους, πιάνουν και οι “Jenkins-6-6” και “Jenkins-6-7”, μόνο που ξεκινούν τους υπολογισμούς τους από τα $10^{4.7}$ βήματα.

Οι υπόλοιπες μέθοδοι, εκτός της “Jenkins-8-9” που αρχίζει στα $10^{4.9}$, ξεκινούν να βρίσκουν ακρίβεια στα $10^{4.8}$ βήματα. Όπως βλέπουμε λοιπόν η “Jenkins-8-8”, “Jenkins-8-9” και “QT-8-10” προσεγγίζουν την ακριβή λύση με ακρίβεια μεγαλύτερη των τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων. Η “Jenkins-8-9” μάλιστα, αγγίζει τα πέντε δεκαδικά.

Μέθοδοι από 10 έως 16 βήματα

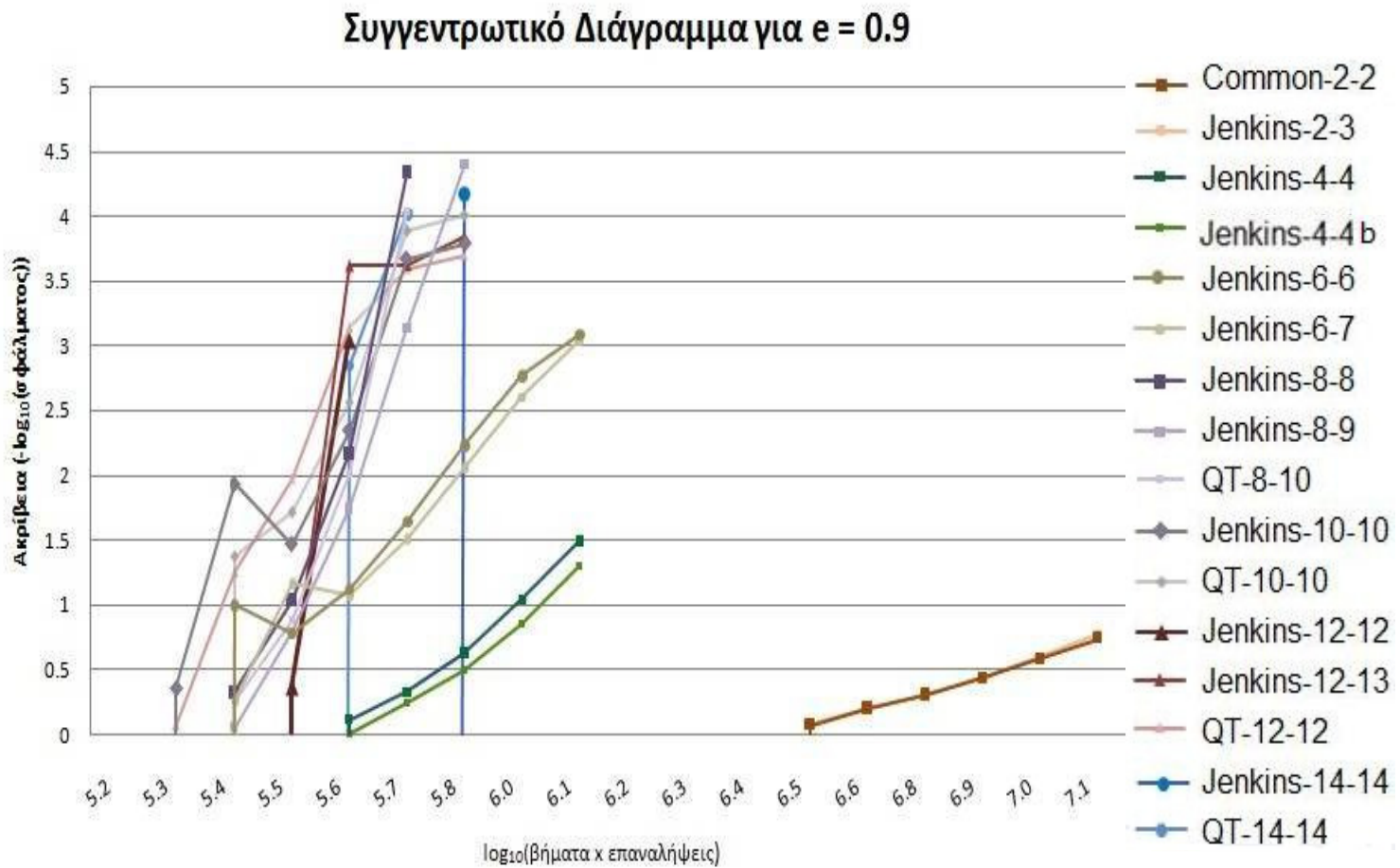


Εδώ, στο διάγραμμα για τις μεθόδους από δέκα έως και δεκαέξι βήματα, παρατηρούμε ότι η "Jenkins-12-12" είναι η λιγότερο αποδοτική. Η ακρίβειά της δεν ξεπερνά τα τέσσερα δεκαδικά ψηφία, και αρχίζει να βρίσκει ακρίβεια στα $10^{5.2}$ βήματα. Οι υπόλοιπες μέθοδοι ωστόσο, με εξαίρεση την "Jenkins-14-14", αρχίζουν να έχουν ακρίβεια μεταξύ $10^{4.8}$ και $10^{4.9}$ βημάτων και πιάνουν ακρίβειες κοντά στα πέντε δεκαδικά.

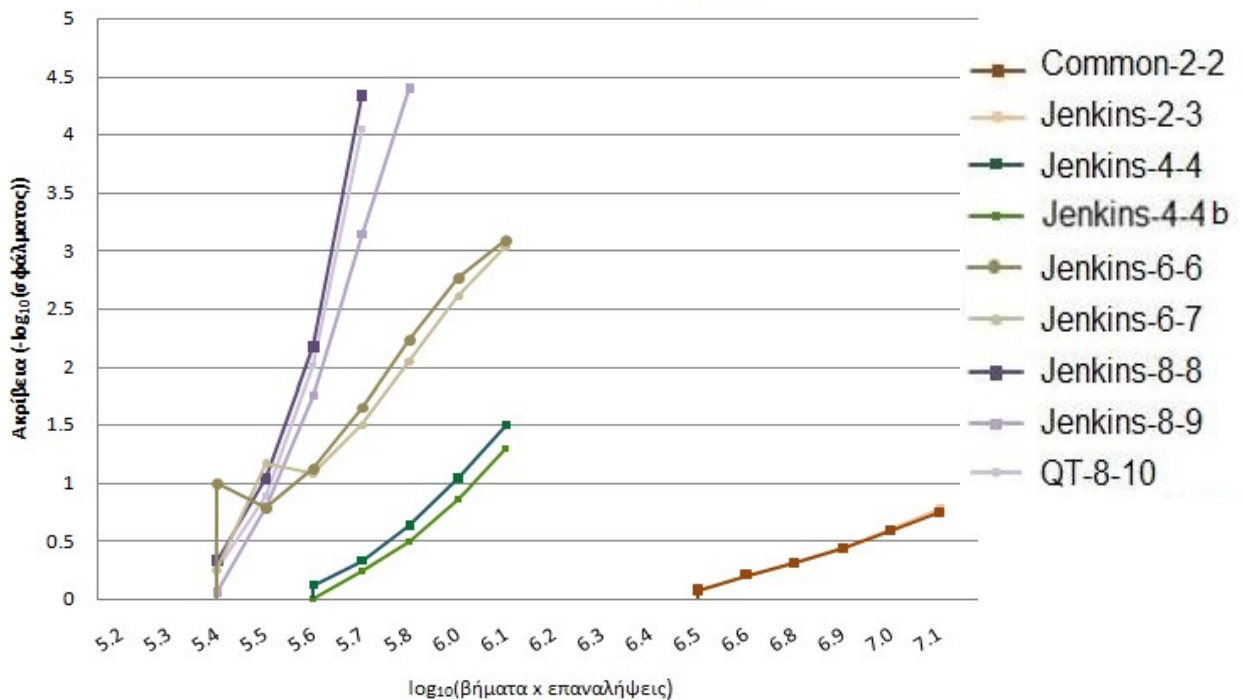
Η "Jenkins-14-14", προσεγγίζει την λύση με ακρίβεια κοντά στα έξι δεκαδικά ψηφία και είναι με σιγουριά η καλύτερη μέθοδος για το συγκεκριμένο πρόβλημα, όπου ο παράγοντας e είναι 0.8.

2.2.6 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΓΙΑ $\epsilon=0.9$

Ακολουθεί το διάγραμμα με όλες τις μεθόδους, για $\epsilon=0.9$.



Μέθοδοι από 2 έως 9 βήματα



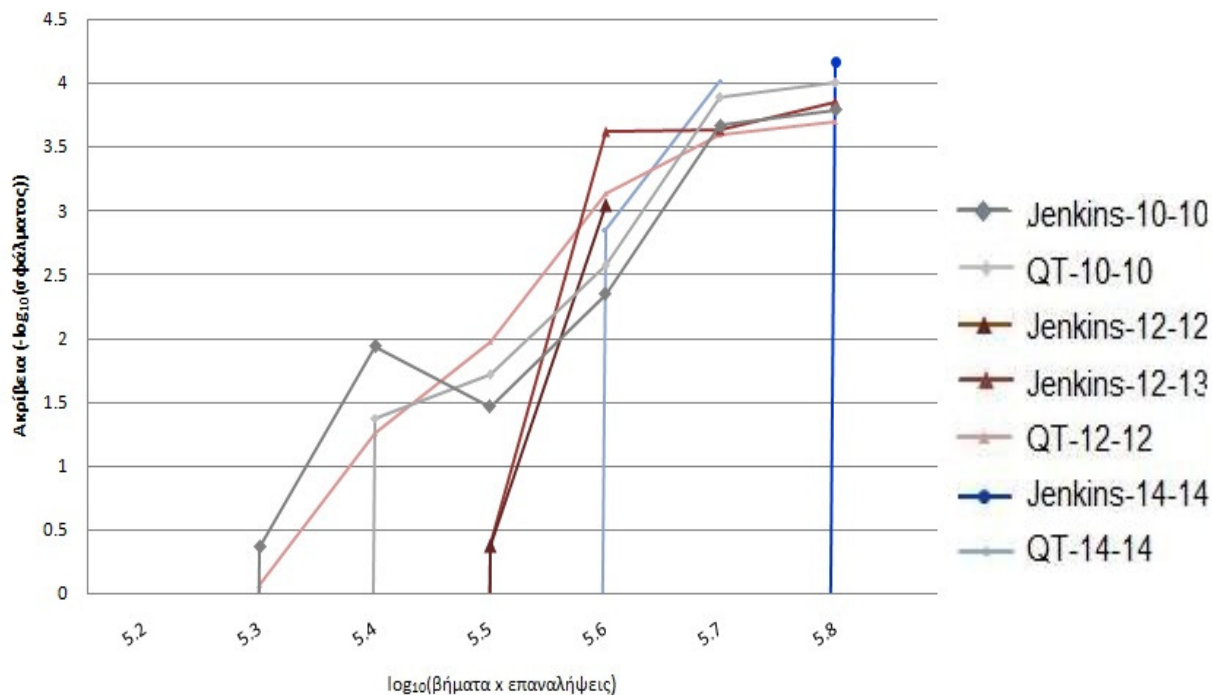
Παρατηρώντας το διάγραμμα αυτό βλέπουμε τις μεθόδους "Common-2-2" και "Jenkins-2-3" να αρχίζουν την προσέγγισή τους στα $10^{6.5}$ βήματα και πίνουν ακρίβεια, μικρότερη του ενός δεκαδικού στα $10^{7.1}$ βήματα.

Η διαφορά τους είναι τόσο μικρή που χρειάζεται να μεγαλώσουμε αρκετά το διάγραμμα ώστε να δούμε την διαφορά τους. Ουσιαστικά δηλαδή οι γραμμές τους, στο παραπάνω διάγραμμα, συμπίπτουν.

Έπειτα βλέπουμε τις μεθόδους "Jenkins-4-4" και "Jenkins-4-4b" που ξεκινώντας περίπου από τα $10^{5.6}$ βήματα, φτάνουν σε ακρίβεια το ενάμισο περίπου δεκαδικό.

Οι υπόλοιπες μέθοδοι, ξεκινούν να έχουν ακρίβεια στα $10^{5.4}$ βήματα. Από αυτές, οι "Jenkins-8-8", "Jenkins-8-9" και "QT-8-10" είναι οι μόνες που προσεγγίζουν την ακριβή λύση με ακρίβεια που πλησιάζει τα τεσσεράμισι δεκαδικά ψηφία, με τις υπόλοιπες, "Jenkins-6-6" και "Jenkins-6-7", να φτάνουν περίπου τα τρία.

Μέθοδοι από 10 έως 16 βήματα

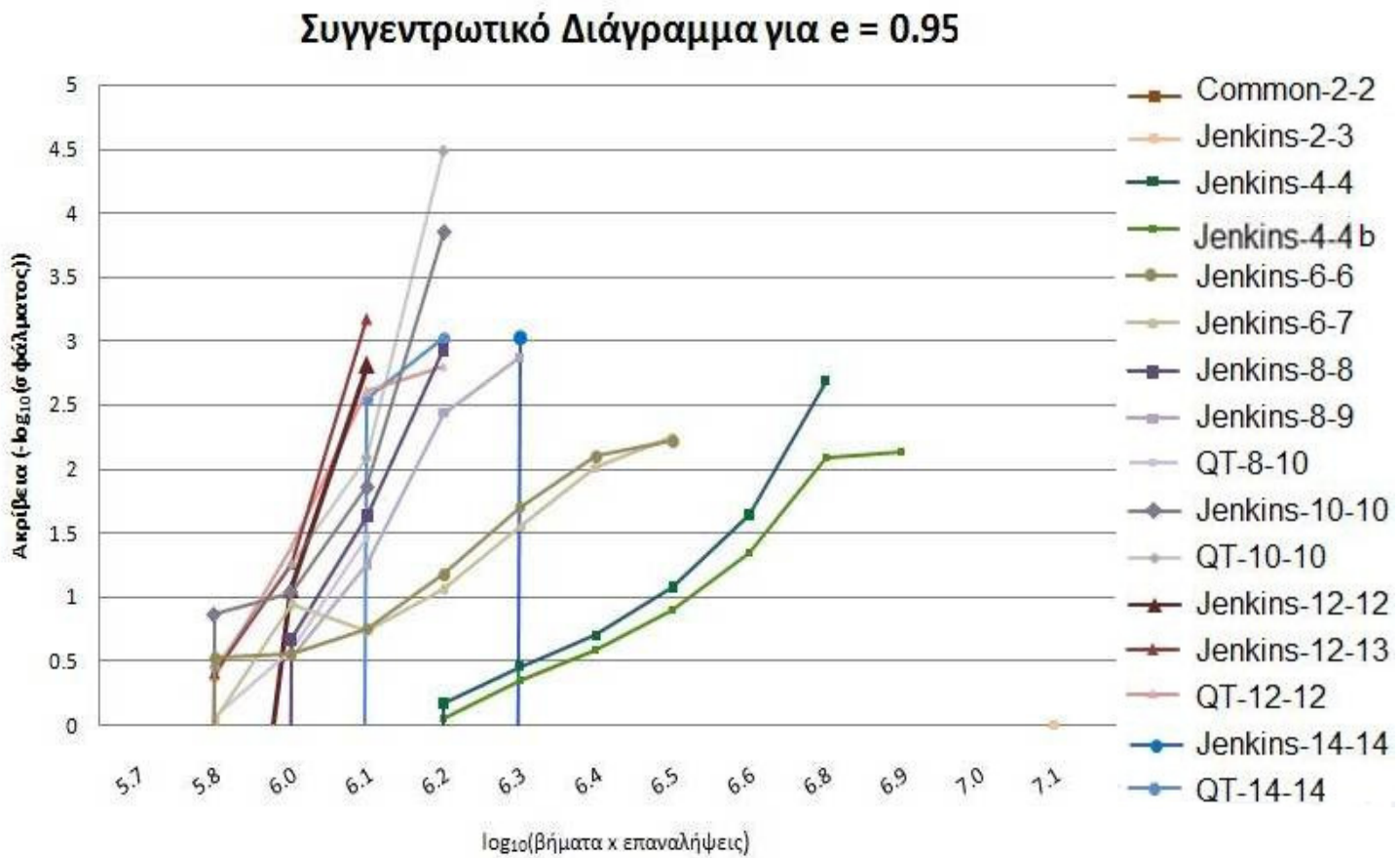


Σε αυτό το διάγραμμα, που αφορά τις μεθόδους από δέκα έως και δεκαέξι βήματα, παρατηρούμε ότι η "Jenkins-12-12" είναι η λιγότερο αποδοτική. Η ακρίβειά της μόλις ξεπερνά τα τρία δεκαδικά ψηφία, και αρχίζει να βρίσκει ακρίβεια στα $10^{5.5}$ βήματα. Οι υπόλοιπες μέθοδοι ωστόσο, με εξαίρεση την "Jenkins-14-14", αρχίζουν να έχουν ακρίβεια μεταξύ $10^{5.3}$ και $10^{5.6}$ βημάτων και πιάνουν ακρίβειες μεταξύ τριάντισι και τεσσάρων δεκαδικών.

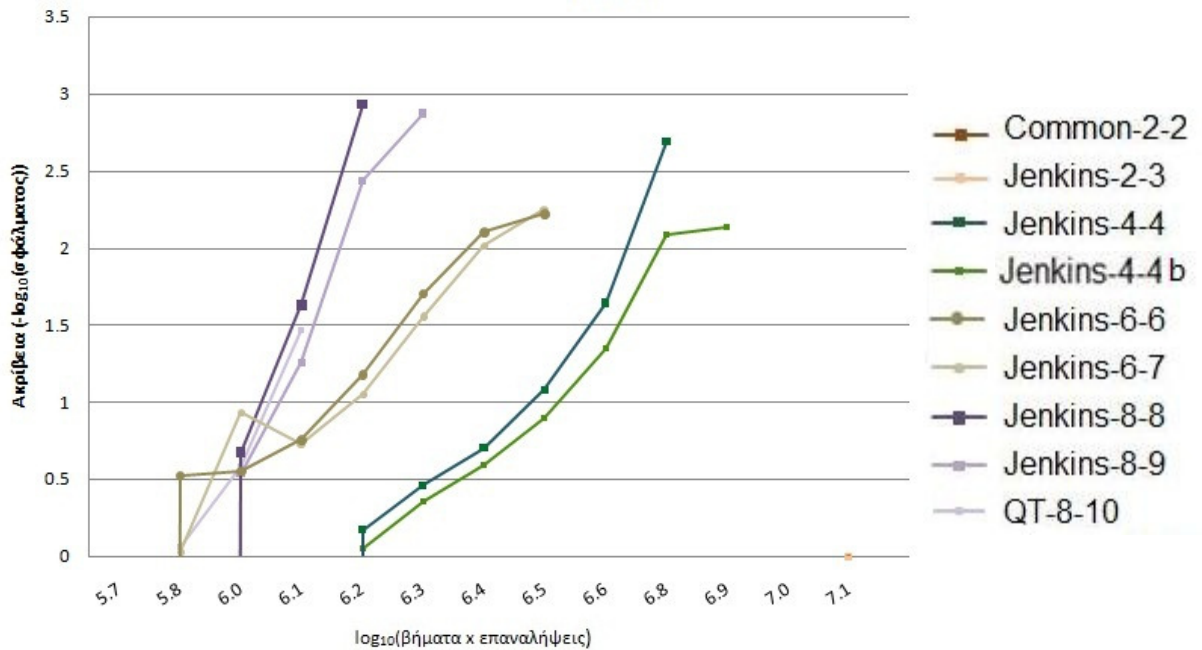
Η "Jenkins-14-14", προσεγγίζει την λύση με ακρίβεια πάνω από τέσσερα δεκαδικά ψηφία και είναι η καλύτερη μέθοδος για το συγκεκριμένο πρόβλημα, όπου ο παράγοντας e είναι 0.9.

2.2.7 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΓΙΑ $e=0.95$

Ακολουθεί το διάγραμμα με όλες τις μεθόδους, για $e=0.95$.



Μέθοδοι από 2 έως 9 βήματα

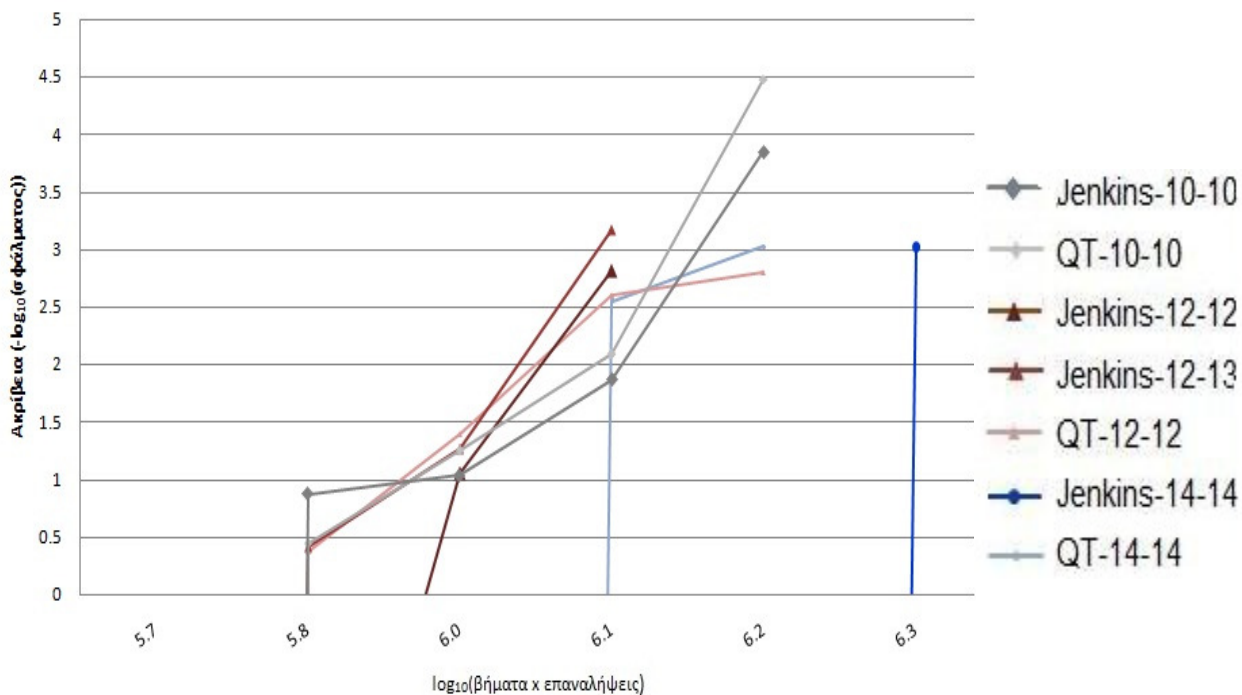


Στο παραπάνω διάγραμμα αρχικά αξίζει να παρατηρήσουμε τον οριζόντιο άξονα στο σημείο $10^{7.2}$ όπου θα δούμε το μπλε τετράγωνο που αντιστοιχίζεται στη μέθοδο "Jenkins-2-3". Αυτό σημαίνει ότι στα $10^{7.2}$ βήματα η μέθοδος "Jenkins-2-3" ίσα που ξεκινά να προσεγγίζει την ακριβή λύση. Η ακρίβειά της είναι μηδαμινή.

Στη συνέχεια βλέπουμε τις μεθόδους "Jenkins-4-4" και "Jenkins-4-4b" να ξεκινούν τους υπολογισμούς τους στα $10^{6.2}$ βήματα. Η πρώτη πιάνει ακρίβεια λίγο μεγαλύτερη από τα δύο μισα, ενώ η δεύτερη από τα δυο, δεκαδικά ψηφία. Παρόμοια ακρίβεια με την "Jenkins-4-4" πιάνουν και οι "Jenkins-6-6" και "Jenkins-6-7", μόνο που ξεκινούν τους υπολογισμούς τους στα $10^{5.8}$ βήματα.

Οι υπόλοιπες μέθοδοι, εκτός της "Jenkins-8-9" που αρχίζει στα $10^{6.0}$, ξεκινούν να έχουν ακρίβεια στα $10^{5.8}$ βήματα. Όπως βλέπουμε λοιπόν, η "Jenkins-8-8", "Jenkins-8-9" προσεγγίζουν την ακριβή λύση με ακρίβεια σχεδόν τριών δεκαδικών ψηφίων. Η "QT-8-10" σταματά στο ενάμισο, μόλις, δεκαδικό.

Μέθοδοι από 10 έως 16 βήματα



Για τις μεθόδους από δέκα έως και δεκαέξι βήματα, παρατηρούμε ότι οι περισσότερες πίνουν ακρίβεια κοντά στα τρία δεκαδικά ψηφία.

Αυτές που ξεχωρίζουν ωστόσο, είναι οι "Jenkins-10-10" και "QT-10-10". Οι δυο τους ξεκινούν τους υπολογισμούς από τα $10^{5.8}$ βήματα. Η "Jenkins-10-10" προσεγγίζει την λύση με ακρίβεια τεσσάρων σχεδόν δεκαδικών, ενώ η "QT-10-10", με τεσσεράμισι. Το γεγονός κάνει την τελευταία την καλύτερη μέθοδο για το πρόβλημα αυτό, όπου ο παράγοντας e είναι 0.95.

2.3 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΓΙΑ $t \in [0 \ 10^5]$

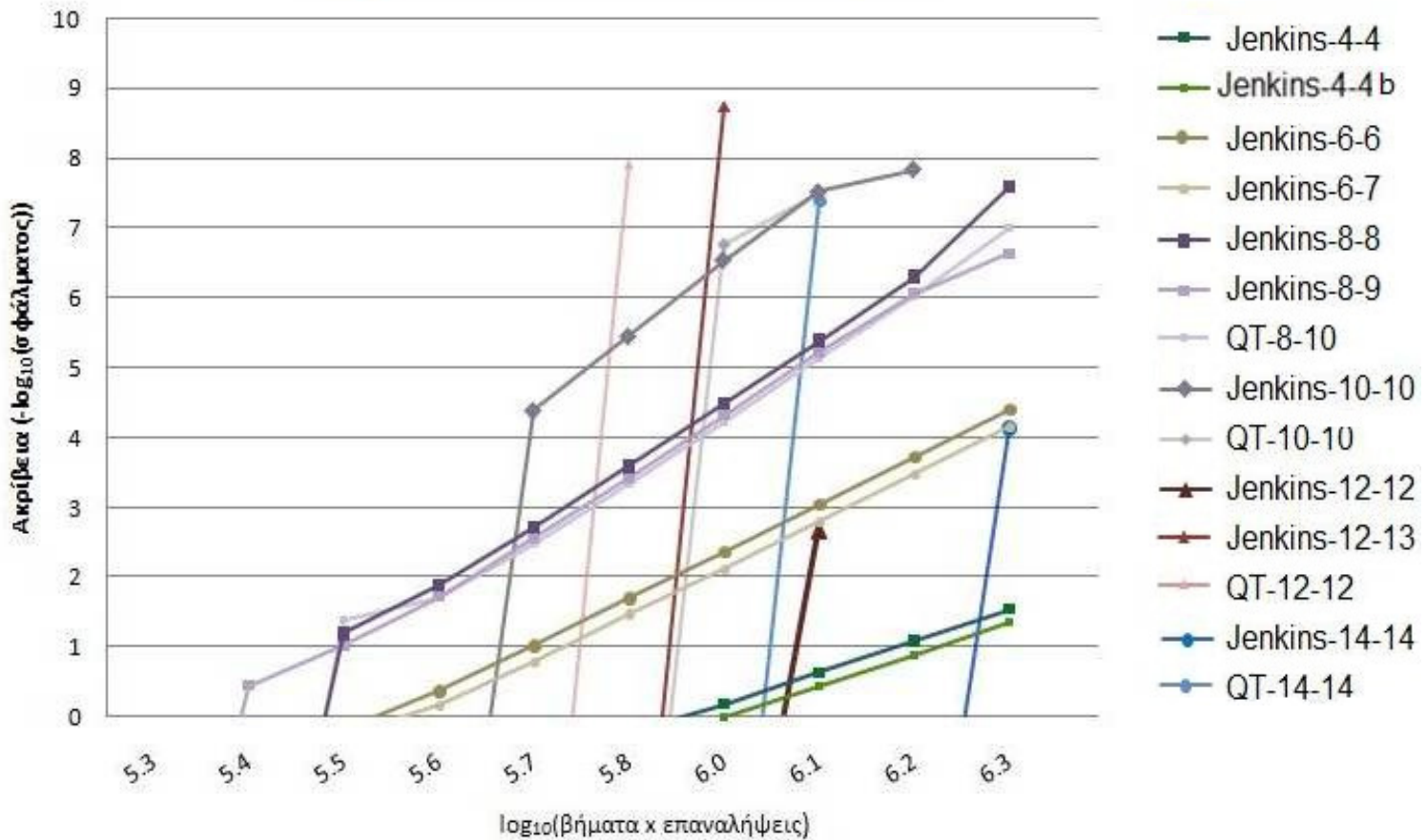
Παρακάτω παραθέτουμε τα διαγράμματα που δημιουργήσαμε, από τα αποτελέσματα που πήραμε για την επίλυση του προβλήματος των δύο σωμάτων, σε διάστημα ολοκλήρωσης $t \in [0 \ 100000]$. Για διάστημα δηλαδή, εκατό φορές μεγαλύτερο από αυτό που μελετήθηκε στο παραπάνω κεφάλαιο.

Παράλληλα με την παρουσίαση σχολιάζουμε και τα αποτελέσματα.

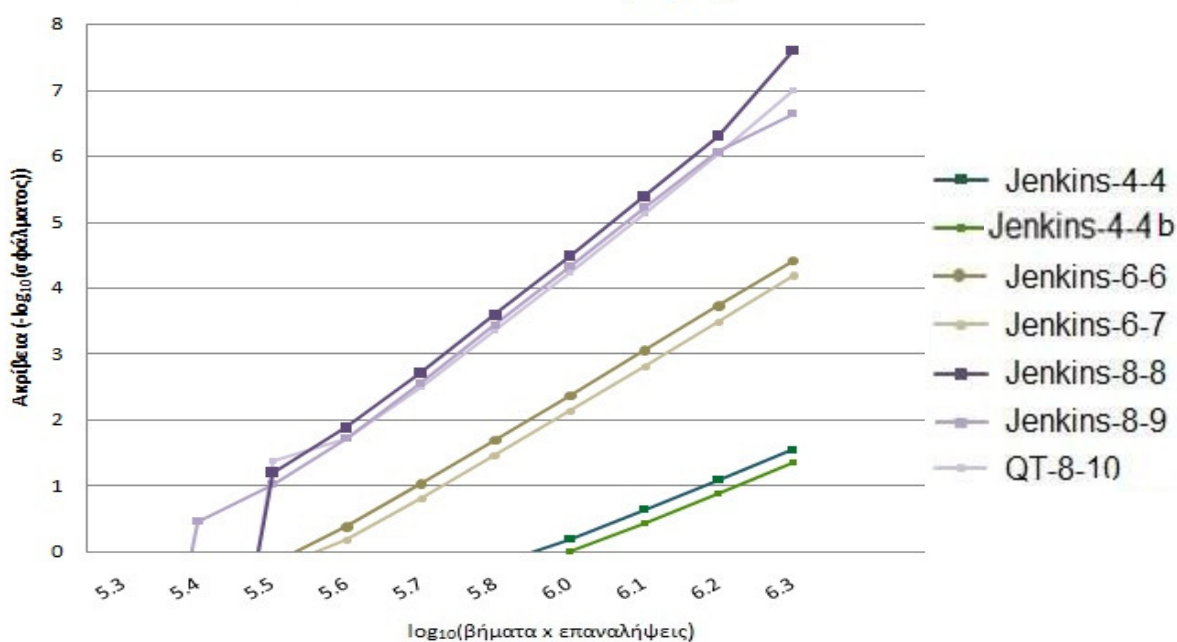
2.3.1 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΓΙΑ $e=0$

Ακολουθεί το διάγραμμα με όλες τις μεθόδους, για $e=0$.

Συγγεντρικό Διάγραμμα για $e = 0$



Μέθοδοι από 2 έως 9 βήματα



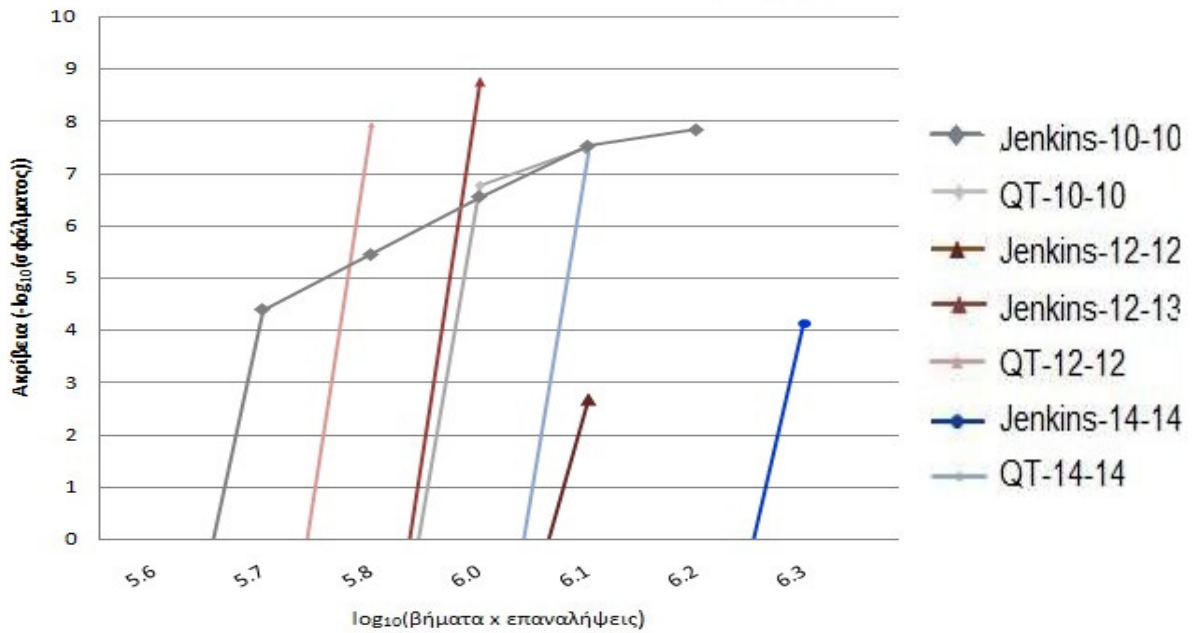
Εδώ αρχικά παρατηρούμε την απουσία των μεθόδων “Common-2-2” και “Jenkins-2-3” που δεν συγκλίνουν μέχρι τα $10^{6.3}$ βήματα καθόλου.

Στη συνέχεια βλέπουμε τις μεθόδους “Jenkins-4-4” και “Jenkins-4-4b” που ξεκινώντας περίπου από τα $10^{6.0}$ βήματα, φτάνουν σε ακρίβεια περίπου το ενάμισι δεκαδικό.

Οι “Jenkins-6-6” και “Jenkins-6-7” με την σειρά τους, προσεγγίζουν την λύση με ακρίβεια λίγο μεγαλύτερη των τεσσάρων δεκαδικών, ενώ ξεκινάν να συγκλίνουν στα $10^{5.6}$ βήματα.

Επίσης βλέπουμε ότι η “Jenkins-8-8” είναι η μόνη που προσεγγίζει την ακριβή λύση με ακρίβεια μεγαλύτερη των επτά δεκαδικών ψηφίων, φτάνοντας σχεδόν τα οκτώ. Η “Jenkins-8-9” φτάνει τα επτά και η “QT-8-10” τα εξίμισι δεκαδικά. Οι τρεις τελευταίες μέθοδοι αρχίζουν τους υπολογισμούς τους στα $10^{5.5}$, περίπου, βήματα.

Μέθοδοι από 10 έως 16 βήματα



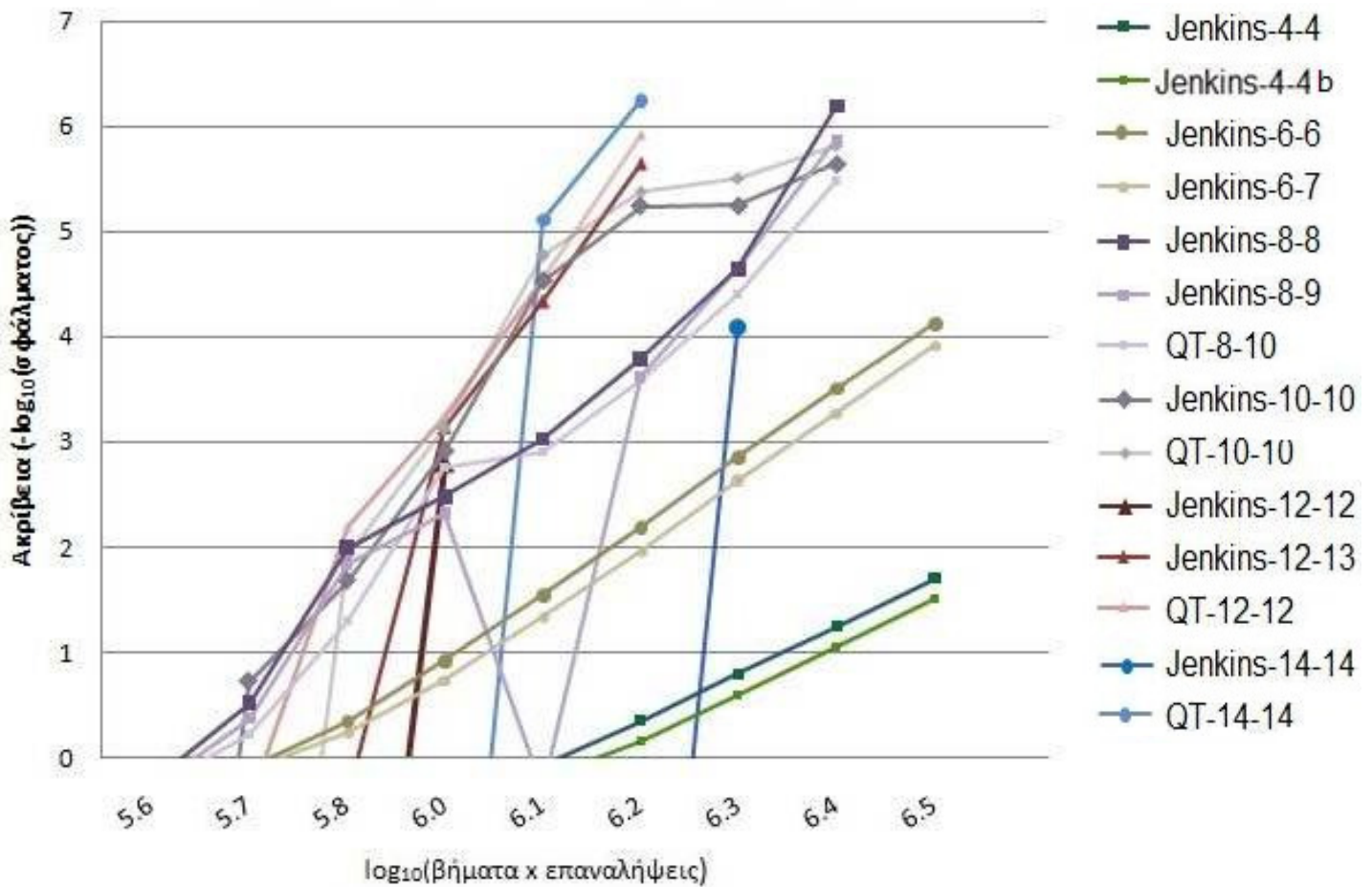
Σε αυτό το διάγραμμα, για τις μεθόδους από δέκα έως και δεκαέξι βήματα, παρατηρούμε ότι οι “Jenkins-12-12” και “Jenkins-14-14” είναι από τις λιγότερο αποδοτικές, αφού δεν ξεπερνούν σε ακρίβεια, η μεν πρώτη τα τρία, η δε δεύτερη τα πέντε δεκαδικά ψηφία. Οι υπόλοιπες μέθοδοι ωστόσο, αρχίζουν να έχουν ακρίβεια στα $10^{5.6}$ με $10^{6.1}$ βήματα και πιάνουν ακρίβειες τις τάξης των επτά και άνω δεκαδικών.

Η “Jenkins-12-13” συγκεκριμένα, προσεγγίζει την λύση με ακρίβεια σχεδόν εννέα δεκαδικών ψηφίων και είναι η καλύτερη για το συγκεκριμένο πρόβλημα, όπου ο παράγοντας e είναι μηδέν και το διάστημα ολοκλήρωσης από 0 έως 100000.

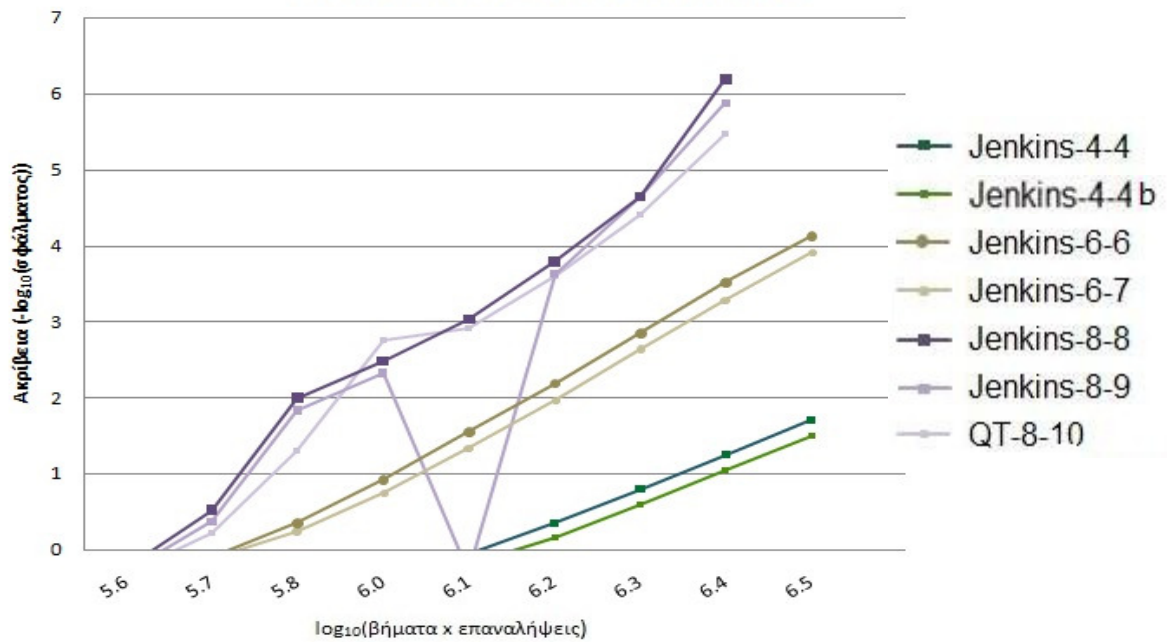
2.3.2 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΓΙΑ $e=0.3$

Ακολουθεί το διάγραμμα με όλες τις μεθόδους, για $e=0.3$.

Συγγεντρικό Διάγραμμα για $e = 0.3$



Μέθοδοι από 2 έως 9 βήματα

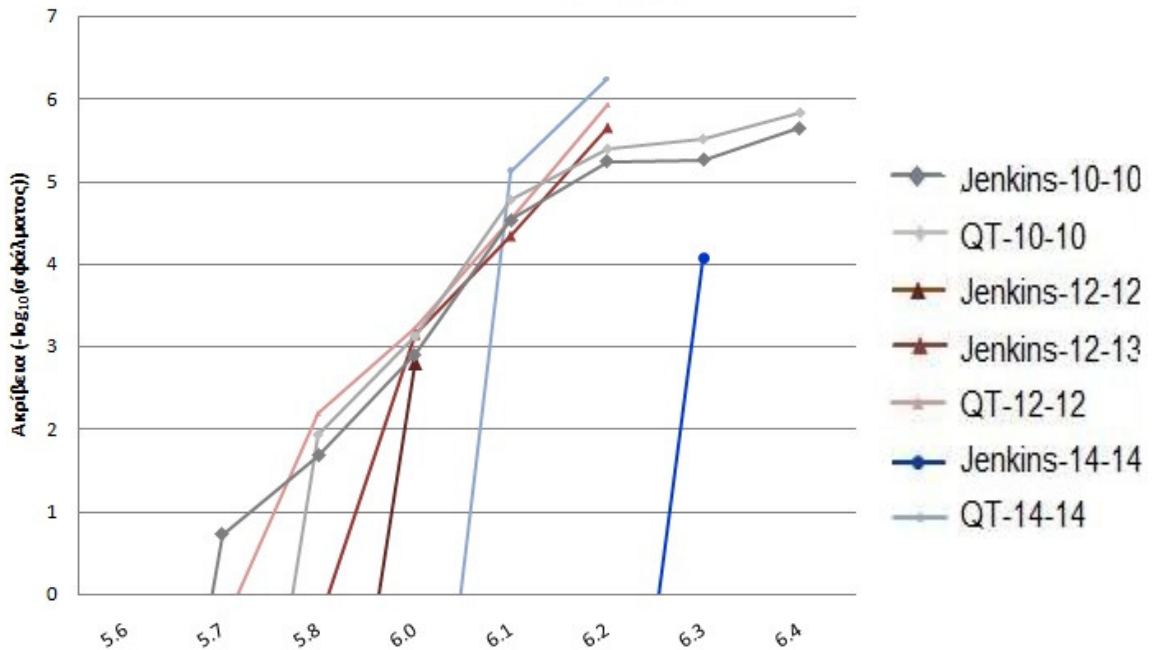


Στο παραπάνω διάγραμμα αρχικά παρατηρούμε, όπως και προηγουμένως, την απουσία των μεθόδων “Common-2-2” και “Jenkins-2-3” που δεν συγκλίνουν μέχρι τα $10^{6.6}$ βήματα καθόλου.

Στη συνέχεια βλέπουμε τις μεθόδους “Jenkins-4-4” και “Jenkins-4-4b” να ξεκινούν τους υπολογισμούς στα $10^{6.1}$ βήματα. Οι δυο τους πίνουν ακρίβεια λίγο μικρότερη των δυο δεκαδικών. Μεγαλύτερη κατά δυο δεκαδικά ακρίβεια από τις δυο αυτές μεθόδους, πίνουν οι “Jenkins-6-6” και “Jenkins-6-7”, οι οποίες ξεκινούν τους υπολογισμούς τους από τα $10^{5.7}$ βήματα.

Οι υπόλοιπες μέθοδοι ξεκινούν να βρίσκουν ακρίβεια στα $10^{5.6}$ βήματα. Όπως βλέπουμε λοιπόν η “Jenkins-8-8”, “Jenkins-8-9” και “QT-8-10” προσεγγίζουν την ακριβή λύση με ακρίβεια κοντά στα έξι δεκαδικά. Η “Jenkins-8-8” μάλιστα, τα ξεπερνά κιόλας.

Μέθοδοι από 10 έως 16 βήματα



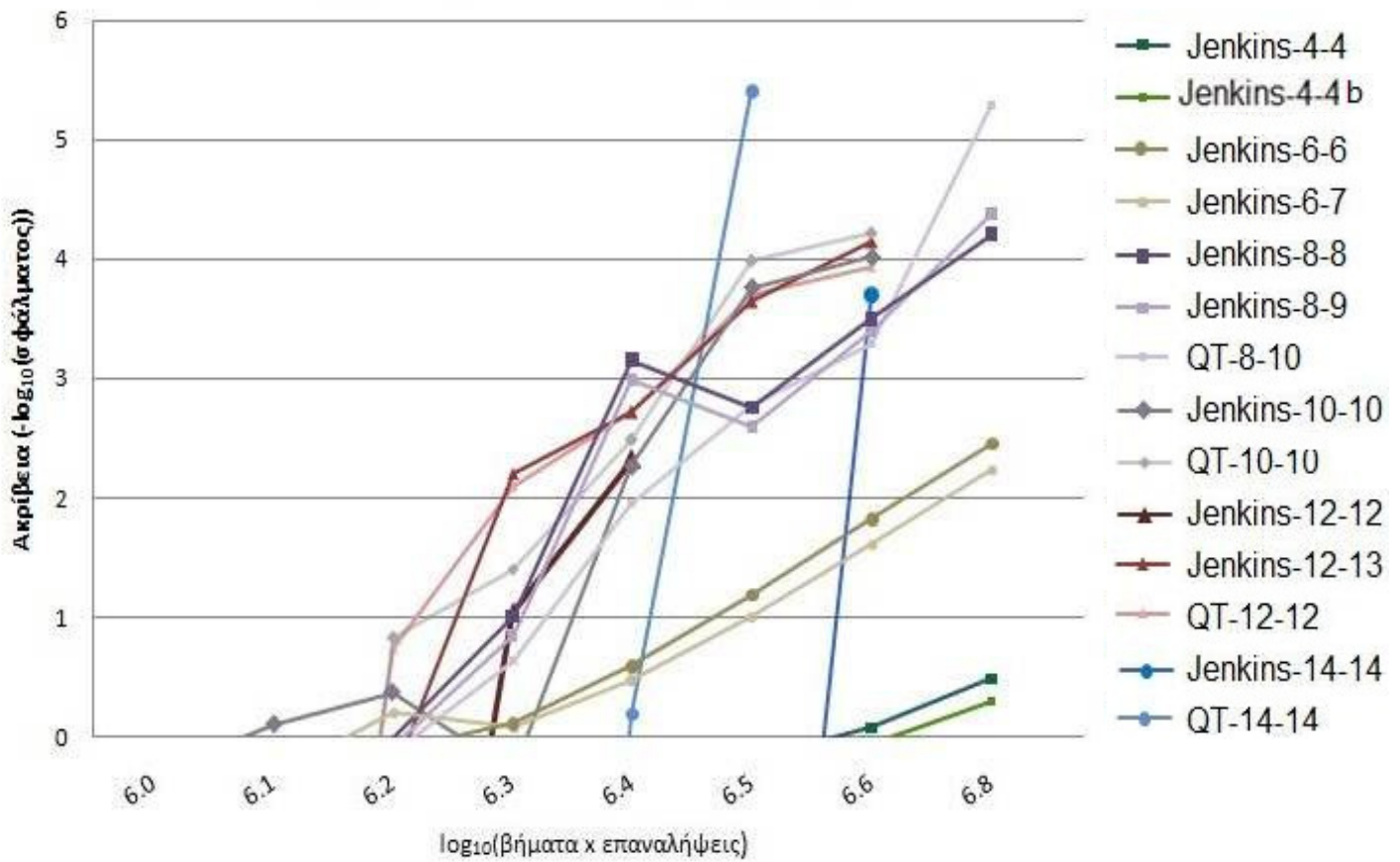
Εδώ, στο διάγραμμα για τις μεθόδους από δέκα έως και δεκαέξι βήματα, παρατηρούμε ότι οι "Jenkins-12-12" και "Jenkins-14-14" δεν είναι και τόσο αποδοτικές, αφού δεν ξεπερνούν σε ακρίβεια, η μεν πρώτη τα τρία, η δε δεύτερη τα πέντε δεκαδικά ψηφία. Οι υπόλοιπες μέθοδοι ωστόσο, αρχίζουν να έχουν ακρίβεια στα $10^{5.7}$ με $10^{6.1}$ βήματα και πιάνουν ακρίβειες τις τάξης των έξι και άνω δεκαδικών.

Η "QT-14-14" συγκεκριμένα, προσεγγίζει την λύση με ακρίβεια άνω των έξι δεκαδικών ψηφίων και είναι η καλύτερη για το πρόβλημα με παράγοντα e ίσο με 0.3.

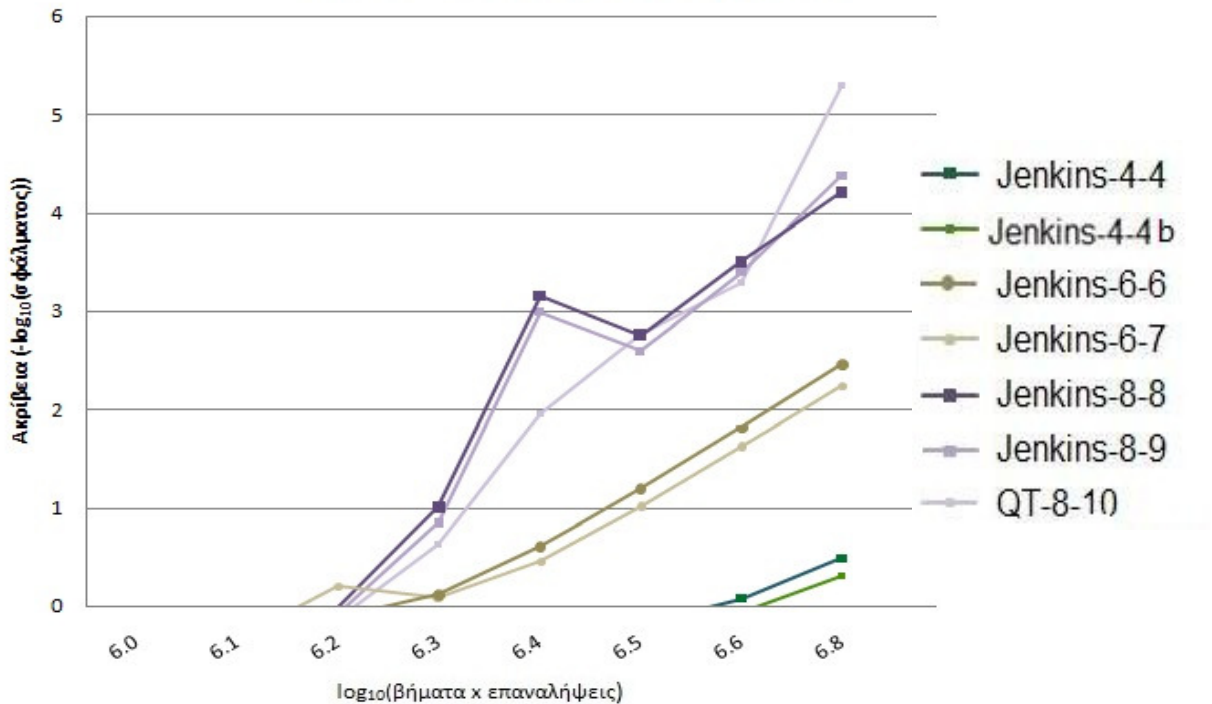
2.3.3 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΓΙΑ $e=0.6$

Ακολουθεί το διάγραμμα με όλες τις μεθόδους, για $e=0.6$.

Συγγεντρικό Διάγραμμα για $e = 0.6$



Μέθοδοι από 2 έως 9 βήματα



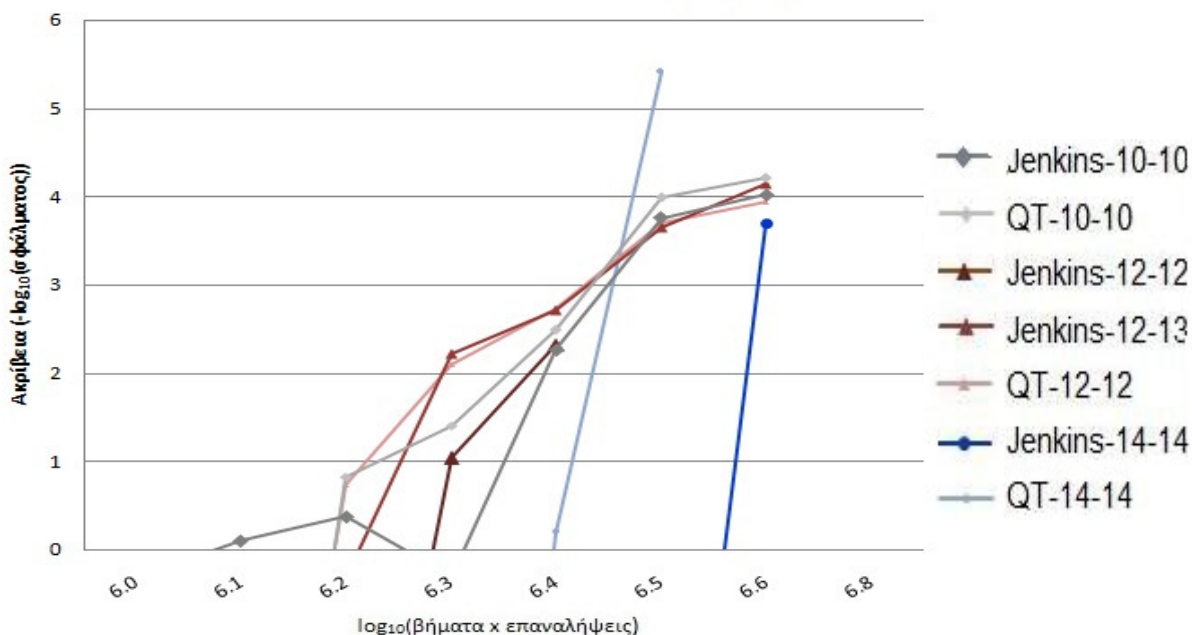
Εδώ, όπως και στα δυο παραπάνω διαγράμματα, παρατηρούμε την απουσία των μεθόδων “Common-2-2” και “Jenkins-2-3” που μέχρι τα $10^{6.9}$ βήματα δεν συγκλίνουν.

Στη συνέχεια βλέπουμε τις μεθόδους “Jenkins-4-4” και “Jenkins-4-4b” που ξεκινώντας περίπου από τα $10^{6.6}$ βήματα, φτάνουν σε ακρίβεια μόλις το μισό δεκαδικό ψηφίο, στο σημείο $10^{6.9}$.

Οι υπόλοιπες μέθοδοι, ξεκινούν να έχουν ακρίβεια στα $10^{6.2}$ περίπου βήματα. Η “QT-8-10” είναι η μόνη που προσεγγίζει την ακριβή λύση με ακρίβεια μεγαλύτερη των πέντε δεκαδικών ψηφίων, με τις “Jenkins-8-9” και “Jenkins-8-8” να ξεπερνούν οριακά τα τέσσερα.

Οι “Jenkins-6-6” και “Jenkins-6-7” με την σειρά τους, προσεγγίζουν την λύση με ακρίβεια περίπου δυόμιση δεκαδικών.

Μέθοδοι από 10 έως 16 βήματα



Από το επιμέρους διάγραμμα που αφορά τις μεθόδους από δέκα έως και δεκαέξι βήματα, παρατηρούμε αμέσως ότι οι περισσότερες μέθοδοι προσεγγίζουν την λύση με ακρίβεια τις τάξης των τεσσάρων δεκαδικών.

Εξαίρεση αποτελεί η "QT-14-14", που ξεκινώντας τους υπολογισμούς απ' τα $10^{6.4}$ βήματα, πιάνει ακρίβεια μεγαλύτερη των πέντε δεκαδικών ψηφίων.

Το γεγονός αυτό την κάνει, μαζί με την "QT-8-10", τις καλύτερες απ' τις μεθόδους που μελετούμε για το πρόβλημα με παράγοντα $e = 0.6$ σε διάστημα ολοκλήρωσης από 0 έως 100000.

2.4 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

2.4.1 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΓΙΑ $t \in [0, 10^3]$ ΚΑΙ ΜΕΓΙΣΤΗ ΑΚΡΙΒΕΙΑ

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζουμε την θέση που καταλαμβάνουν οι μέθοδοι, κατατάσσοντάς τες ξεκινώντας από αυτήν με τους πιο ακριβείς υπολογισμούς, προς αυτήν με τους λιγότερο ακριβείς, για το διάστημα ολοκλήρωσης $t \in [0, 1000]$. Εδώ επιζητούμε την μέγιστη δυνατή ακρίβεια, και συνεπώς αγνοούμε το πότε, με πόσο μεγάλο βήμα δηλαδή, αρχίζει να συγκλίνει η κάθε μέθοδος.

	0	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9	0.95
Common-2-2	15	16	16	16	16	16	16
Jenkins-2-3	13	15	15	15	15	15	15
Jenkins-4-4	11	10	8	11	12	13	10
Jenkins-4-4b	12	12	11	9	10	14	13
Jenkins-6-6	8	11	9	12	13	10	12
Jenkins-6-7	10	9	10	13	11	12	11
Jenkins-8-8	6	4	6	1	8	2	6
QT-8-10	9	7	12	4	9	4	14
Jenkins-8-9	3	2	5	2	4	1	7
Jenkins-10-10	5	8	7	7	5	8	2
QT-10-10	1	3	4	3	3	6	1
Jenkins-12-12	16	14	14	14	14	11	8
Jenkins-12-13	2	1	3	5	6	7	3
QT-12-12	7	6	2	8	7	9	9
Jenkins-14-14	14	13	13	10	1	3	4
QT-14-14	4	5	1	6	2	5	5

Αρχικά, για το πρόβλημα των δυο σωμάτων, με παράγοντα εκκεντρότητας ίσο με μηδέν, πρώτη έρχεται η μέθοδος "QT-10-10". Η ακρίβεια που πιάνει είναι 11.0183944913889. Στο επόμενο μας πείραμα, με παράγοντα εκκεντρότητας ίσο με 0.2, πρωτεύει η

μέθοδος "Jenkins-12-13" με ακρίβεια 9.68048718897616 δεκαδικά. Η "QT-10-10" τώρα από πρώτη έχει περάσει τρίτη και η ακρίβειά της είναι 9.44482303589083, μικρότερη δηλαδή κατά 1.6 περίπου δεκαδικά ψηφία, απ' ότι πριν.

Στο πρόβλημα με παράγοντα e ίσο με 0.4, έχουμε την μέθοδο "QT-14-14" να έρχεται πρώτη, με ακρίβεια της τάξης των 9.23616253160731 δεκαδικών, ενώ η καλύτερη του προηγούμενου πειράματος (Jenkins-12-13), έχει περάσει τρίτη με ακρίβεια 8.30666072250995, ελαττωμένη κατά 1.3 δεκαδικά περίπου.

Μόλις ο παράγοντας e γίνεται 0.6, πρώτη στα πειράματά μας έρχεται η μέθοδος "Jenkins-8-8" με ακρίβεια ίση με 7.1509769510129. Η καλύτερη μέθοδος για $e = 0.4$ (QT-14-14) έχει περάσει τώρα έκτη με ακρίβεια 6.0353281444313, μειωμένη δηλαδή κατά 3.2 ολόκληρα δεκαδικά ψηφία.

Για $e = 0.8$ βλέπουμε πως πρώτη έρχεται η μέθοδος "Jenkins-14-14" με ακρίβεια που φτάνει τα 5.80771628636528 δεκαδικά ψηφία. Η "Jenkins-8-8" πλέον έχει περάσει όγδοη και η ακρίβειά της έχει περιοριστεί στα 4.67927619520365 δεκαδικά ψηφία.

Τώρα στο πείραμά μας, με παράγοντα εκκεντρότητας ίσο με 0.9, πρώτη έρχεται η μέθοδος "Jenkins-8-9" με ακρίβεια στα 4.3970573720909 δεκαδικά. Η "Jenkins-14-14", καλύτερη για το προηγούμενο πείραμα, περνά τρίτη και η ακρίβειά της πέφτει κατά 1.7 δεκαδικά, σταματώντας στα 4.1632456861302.

Τέλος, στην δοκιμή που κάνουμε, για παράγοντα εκκεντρότητας ίσο με 0.95, παίρνουμε τους πιο ακριβείς υπολογισμούς από την μέθοδο "QT-10-10". Η ακρίβειά της φτάνει τα 4.48141933255874 δεκαδικά ψηφία, ενώ η "Jenkins-8-9" πλέον περνάει έβδομη, και η ακρίβειά της πέφτει στα 2.87164095148504 δεκαδικά, 1.5 λιγότερο από πριν.

Συνοψίζοντας, παραθέτουμε και τον σχετικό πίνακα με τις ακρίβειες, για τις διάφορες τιμές του παράγοντα εκκεντρότητας.

0	11.0183944913889
0.2	9.68048718897616
0.4	9.23616253160731
0.6	7.15097695101290
0.8	5.80771628636528
0.9	4.39705737209090
0.95	4.48141933255874

2.4.2 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΓΙΑ $t \in [0, 10^5]$ ΚΑΙ ΜΕΓΙΣΤΗ ΑΚΡΙΒΕΙΑ

Σε αυτόν τον πίνακα παρουσιάζουμε την θέση που των μεθόδων μας, αξιολογώντας τις από την πιο ακριβείας προς την λιγότερο ακριβείας για το διάστημα ολοκλήρωσης $t \in [0, 100000]$. Επίσης επιζητούμε την μέγιστη δυνατή ακρίβεια, και συνεπώς αγνοούμε το πότε, με πόσο μεγάλο βήμα δηλαδή, αρχίζει να συγκλίνει η κάθε μέθοδος.

	0	0.3	0.6
Common-2-2	-	-	-
Jenkins-2-3	-	-	-
Jenkins-4-4	13	13	13
Jenkins-4-4b	14	14	14
Jenkins-6-6	9	9	10
Jenkins-6-7	10	11	12
Jenkins-8-8	5	2	5
QT-8-10	7	8	2
Jenkins-8-9	8	4	4
Jenkins-10-10	3	7	7
QT-10-10	4	5	3
Jenkins-12-12	12	12	11
Jenkins-12-13	1	6	6
QT-12-12	2	3	8
Jenkins-14-14	11	10	9
QT-14-14	6	1	1

Για το πρόβλημα των δυο σωμάτων και με παράγοντα εκκεντρότητας ίσο με μηδέν, η μέθοδος που έρχεται πρώτη είναι η "Jenkins-12-13". Προσεγγίζει την λύση με ακρίβεια της τάξης των 8.7607145286617 δεκαδικών.

Στο πρόβλημα με παράγοντα e ίσο με 0.3, έχουμε την μέθοδο "QT-14-14" να έρχεται πρώτη, πιάνοντας ακρίβεια 6.24384426118757 δεκαδικών ψηφίων, ενώ η καλύτερη του

προηγούμενου πειράματος (Jenkins-12-13), περνά έκτη και η ακρίβειά της ακρίβεια είναι 5.68080452599868, ελαττωμένη κατά 2.1 δεκαδικά περίπου.

Κλείνοντας την παρουσίασή μας για αυτό το διάστημα ολοκλήρωσης, για παράγοντα εκκεντρότητας ίσο με 0.6, παίρνουμε τους ακριβέστερους υπολογισμούς από την μέθοδο "QT-14-14" που διατηρείται στην πρώτη θέση για δεύτερη φορά. Η ακρίβειά της φτάνει τα 5.41523867312076 δεκαδικά ψηφία.

Παραθέτουμε και τον σχετικό πίνακα με τις καλύτερες ακρίβειες, για τις διάφορες τιμές του παράγοντα εκκεντρότητας.

0	7.86128446008085
0.3	6.24384426118757
0.6	5.41523867312076

2.4.3 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΓΙΑ $t \in [0 \ 10^3]$ ΚΑΙ ΑΚΡΙΒΕΙΑ ΠΕΝΤΕ Δ.Ψ.

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζουμε την θέση που καταλαμβάνουν οι μέθοδοι όταν ζητάμε ακρίβειες μέχρι πέντε δεκαδικά ψηφία και για διάστημα ολοκλήρωσης $t \in [0 \ 1000]$. Όταν περισσότερες από μια μέθοδοι φτάνουν σε ακρίβεια τα πέντε δεκαδικά ψηφία, καλύτερη θα θεωρείται εκείνη που αρχίζει να συγκλίνει πιο γρήγορα (για μεγαλύτερο βήμα).

	0	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9	0.95
Common-2-2	7	-	-	-	-	-	-
Jenkins-2-3	7	-	-	-	-	-	-
Jenkins-4-4	5	5	6	6	-	-	-
Jenkins-4-4b	6	5	7	6	-	-	-
Jenkins-6-6	4	4	5	5	-	-	-
Jenkins-6-7	3	4	5	5	-	-	-
Jenkins-8-8	2	3	3	3	-	-	-
QT-8-10	1	3	3	4	-	-	-
Jenkins-8-9	3	3	4	4	-	-	-
Jenkins-10-10	2	1	1	2	-	-	-
QT-10-10	3	2	1	2	2	-	-
Jenkins-12-12	-	-	-	-	-	-	-
Jenkins-12-13	3	2	2	2	-	-	-
QT-12-12	2	2	2	2	-	-	-
Jenkins-14-14	5	3	4	3	2	-	-
QT-14-14	4	2	2	1	1	-	-

Αρχικά, για το πρόβλημα των δυο σωμάτων, με παράγοντα εκκεντρότητας ίσο με μηδέν, πρώτη έρχεται η μέθοδος "QT-8-10". Πιάνει ακρίβεια πέντε δεκαδικών ψηφίων στα $10^{3.8}$ βήματα, όπως και οι μέθοδοι που κατατάσσονται δεύτερες στον πίνακά μας, όμως συγκλίνει πιο γρήγορα απ' όλες τις άλλες. Στο επόμενο μας πείραμα, με παράγοντα εκκεντρότητας ίσο με 0.2, πρωτεύει η μέθοδος

“Jenkins-10-10”, η οποία αν και πιάνει ακρίβεια πέντε δεκαδικών ψηφίων στα $10^{4.1}$ βήματα (όπως και αυτές που κατατάσσονται δεύτερες), ξεκινάει να συγκλίνει πρώτη, από τα $10^{3.9}$ βήματα. Η “QT-8-10” τώρα από πρώτη έχει περάσει τρίτη και πιάνει την ζητούμενη ακρίβεια στα $10^{4.4}$ βήματα.

Στο πρόβλημα με παράγοντα e ίσο με 0.4, έχουμε τις μεθόδους “ Jenkins-10-10” και “QT-10-10” να έρχονται πρώτες, αφού και οι δύο προσεγγίζουν την λύση με ακρίβεια πέντε δεκαδικών ψηφίων, ξεκινώντας την σύγκλισή τους στα $10^{4.1}$ βήματα.

Μόλις ο παράγοντας e γίνεται 0.6, μόνη πρώτη στα πειράματά μας έρχεται η μέθοδος “QT-14-14” βρίσκοντας ακρίβεια πέντε δεκαδικών, στα $10^{4.7}$ βήματα.

Για $e = 0.8$ βλέπουμε πως πρώτη έρχεται η μέθοδος “QT-14-14” πιάνοντας την ζητούμενη ακρίβεια στα $10^{5.3}$ βήματα.

Τώρα στο πείραμά μας , με παράγοντα εκκεντρότητας ίσο με 0.9, ακρίβεια πέντε δεκαδικών δεν πιάνει καμία μέθοδος. Πιο κοντά φτάνει η μέθοδος “Jenkins-8-9” φτάνοντας σε ακρίβεια τα 4.3970573720909 δεκαδικά.

Τέλος, στην δοκιμή που κάνουμε, για παράγοντα εκκεντρότητας ίσο με 0.95, παίρνουμε τους πιο ακριβείς υπολογισμούς από την μέθοδο “QT-10-10” χωρίς και εδώ να φτάνουμε την ακρίβεια που επιζητούμε. Η ακρίβειά της φτάνει τα 4.48141933255874 δεκαδικά ψηφία.

Συνοψίζοντας, παραθέτουμε και τον σχετικό πίνακα με τις ακρίβειες, για τις διάφορες τιμές του παράγοντα εκκεντρότητας.

0	QT-8-10
0.2	Jenkins-10-10
0.4	Jenkins-10-10 & QT-10-10
0.6	QT-14-14
0.8	QT-14-14
0.9	-
0.95	-

2.4.4 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΓΙΑ $t \in [0, 10^5]$ ΚΑΙ ΑΚΡΙΒΕΙΑ ΠΕΝΤΕ Δ.Ψ.

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζουμε την θέση που καταλαμβάνουν οι μέθοδοι όταν ζητάμε ακρίβειες μέχρι πέντε δεκαδικά ψηφία και για διάστημα ολοκλήρωσης $t \in [0, 100000]$. Όταν περισσότερες από μια μέθοδοι φτάνουν σε ακρίβεια τα πέντε δεκαδικά ψηφία, καλύτερη θα θεωρείται εκείνη που αρχίζει να συγκλίνει πιο γρήγορα (για μεγαλύτερο βήμα).

	0	0.3	0.6
Common-2-2	-	-	-
Jenkins-2-3	-	-	-
Jenkins-4-4	-	-	-
Jenkins-4-4b	-	-	-
Jenkins-6-6	-	-	-
Jenkins-6-7	-	-	-
Jenkins-8-8	4	-	-
QT-8-10	4	3	3
Jenkins-8-9	4	-	3
Jenkins-10-10	1	2	2
QT-10-10	3	2	2
Jenkins-12-12	-	2	-
Jenkins-12-13	3	2	2
QT-12-12	2	2	2
Jenkins-14-14	-	-	-
QT-14-14	4	1	1

Για το πρόβλημα των δυο σωμάτων και με παράγοντα εκκεντρότητας ίσο με μηδέν, η μέθοδος που βρίσκει πρώτη ακρίβεια πέντε δεκαδικών είναι η "Jenkins-10-10". Το πετυχαίνει στα $10^{5.8}$ βήματα.

Στο πρόβλημα με παράγοντα e ίσο με 0.3, έχουμε την μέθοδο "QT-14-14" να έρχεται πρώτη, πιάνοντας την ζητούμενη ακρίβεια στα $10^{6.0}$ βήματα, ενώ η καλύτερη του προηγούμενου πειράματος (Jenkins-10-10), περνά δεύτερη.

Κλείνοντας την παρουσίασή μας για αυτό το διάστημα ολοκλήρωσης, για παράγοντα εκκεντρότητας ίσο με 0.6, παίρνουμε τους πιο γρήγορους υπολογισμούς για την ζητούμενη ακρίβεια από την μέθοδο "QT-14-14" που διατηρείται στην πρώτη θέση για δεύτερη φορά. Την ακρίβεια αυτή την βρίσκει στα $10^{6.1}$ βήματα.

Παραθέτουμε και τον σχετικό πίνακα με τις καλύτερες ακρίβειες, για τις διάφορες τιμές του παράγοντα εκκεντρότητας.

0	Jenkins-10-10
0.3	QT-14-14
0.6	QT-14-14

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Gerald D. Quinlan and Scott Tremaine Symmetric Multistep Methods for the Numerical Integration of Planetary Orbits, The Astronomical Journal, Volume 100 Number 5, November 1990, 1694-1700.
- [2] Lambert, J.D., and Watson, I.A. (1976), J. Inst. Maths Applics 18, 189. Lambert J. D., Watson I. A., (1976), "Symmetric multistep methods for periodic initial value problems", J. Inst. Math. Appl., 18: 189 - 202.
- [3] *Backward Error Analysis for Multistep Methods*, Ernst Heiner.
- [4] G.D. Quinlan, Resonances and instabilities in symmetric multistep methods, v11999.
- [5] Numerical Methods for Ordinary Differential Equation, J.C. Butcher, New Zealand, 2003, 302-306.
- [6] Γ. Αβδέλα – Θ. Σίμου, Αριθμητική Ανάλυση, Τόμος Α', Αθήνα 2004, σελ. 343-360.
- [7] Στέφανος Τραχανάς, Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις, Μέθοδοι λύσεις και εφαρμογές, Ηράκλειο, 2005, σελ. 7-19.
- [8] Numerical Methods for Ordinary Differential Equation, J.C. Butcher, New Zealand, 2003, 7-9.
- [9] http://en.wikipedia.org/wiki/Two-body_problem