ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΛΟΠΟΝΝΗΣΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Μεταπτυχιακή Εργασία

Γεωμετρικά Επικαλύπτοντα γραφήματα

ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ ΣΕΛΙΜΗΣ
ΑΜ: 2011021

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ : ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ ΒΛΑΧΟΣ

ΤΡΙΠΟΛΗ 2013

Διπλωματική Εργασία

ΤΟΥ ΦΟΙΤΗΤΗ

Δημητρίου Σελίμη

Α. Μ. 2011021

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ : ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ ΒΛΑΧΟΣ

Πίνακας περιεχομένων

Κεφάλαιο 4

Επικαλύπτοντα γραφήματα βασιζόμενα στον αλγόριθμο Gap-Greedy

Περιληπτική σύνοψη των κεφαλαίων

1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό αναφέρουμε κάποιες εισαγωγικές έννοιες που θα μας φανούν χρήσιμες στην εργασία μας. Αρχικά κάνουμε μία πρώτη εισαγωγή στα γραφήματα και κάνουμε ένα διαχωρισμό σε κατευθυνόμενα και μη κατευθυνόμενα γραφήματα και συνεχίζοντας δίνουμε τον ορισμό της ευκλείδειας απόστασης. Ύστερα αναλύουμε τη δομή ενός δέντρου και του επικαλύπτοντος δέντρου και τέλος κάνουμε μια πρώτη εισαγωγή στα επικαλύπτοντα γραφήματα και στον παράγοντα επέκτασης.

.

Κεφάλαιο 2

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε το Θ-γράφημα, ένα γράφημα το οποίο κατασκευάζεται προσθέτοντας μια ακμή σε κάθε μία από τις κ διαφορετικές κατευθύνσεις για κάθε ένα από τα σημεία εισόδου n. Με αυτό τον τρόπο μπορούμε εύκολα να ακολουθήσουμε μια σύντομη διαδρομή από μια κορυφή σε μια άλλη για να φτάσουμε εύκολα στον προορισμό μας δηλαδή από ένα σημείο p σε ένα σημείο q.

Επίσης θα δείξουμε ότι το Θ-γράφημα είναι ένα αραιό επικαλύπτον γράφημα για κάθε αυθαίρετο μικρό πραγματικό αριθμό t>1. Ξεκινώντας την ανάλυσή μας θα δώσουμε τον ορισμό του Θ-γραφήματος ύστερα τον αλγόριθμο σε μορφή ψευδοκώδικα που παράγει το Θ-περίπατο(Θ-walk), θα αναλύσουμε πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Θ-γράφημα για να φτιάξουμε επικαλύπτοντα γραφήματα και τέλος θα δώσουμε τον τρόπο με τον οποίο κατασκευάζεται το Θ-γράφημα

Κεφάλαιο 3

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εισάγουμε την αποσύνθεση των καλώς διαχωριζόμενων ζευγών (WSPD) η οποία είναι μια δομή δεδομένων που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να λύσει αποτελεσματικά μια μεγάλη ποικιλία προβλημάτων απόστασης. Ύστερα θα *δώσουμε τον ορισμό της αποσύνθεσης των καλώς διαχωριζόμενων ζευγών και θα μελετήσουμε τις σχέσεις που ισχύουν αποδεικνύοντας αυτές και τέλος θα μελετήσουμε πότε μία αποσύνθεση από καλώς διαχωριζόμενα ζεύγη αποτελεί επικαλύπτον γράφημα.*

<u>Κεφάλαιο 4</u>

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα εισαγάγουμε και να αναλύσουμε μια ιδιότητα P, τη λεγόμενη ιδιότητα του κενού (gap property). Θα ορίσουμε την απλή και την ισχυρή ιδιότητα του κενού(strong gap property) , θα αναφερθούμε στον αλγόριθμο Gap-Greedy και τέλος θα αποδείξουμε ότι ο αλγόριθμος Gap-Greedy είναι αραιό επικαλύπτον γράφημα για το S.

Abstract

1 Introduction

In this chapter, some introductory concepts which will be useful to the assignment are referred. At the beginning, we make a short introduction to the graphs and a separation to directed and undirected graphs and continuing we give the definition of Euclidean distance. Afterward, we analyze the structure of a tree and the spanner tree. Finally, we make a short introduction to the spanner graphs and the stretch factor.

Chapter 2

In this chapter, we are going to present the Θ-graph, a graph which is created by adding an edge to each of the κ different directions for each of the n input points. In this way, we can easily follow a short path from one vertex in the graph to another in order to arrive easily at our destination, namely from one point p to a point q.

Moreover we will indicate that the Θ-graph is a sparse t-spanner for any arbitrarily small given real number $t > 1$. Beginning our analysis, we are going to give a definition of Θ-graph, next the algorithm in pseudo code form which produces the Θ-walk. We are going to analyze how we can use the Θ-graph in order to make spanner graphs and in the end we are going to show the way in which the Θ-graph is constructed.

Chapter 3

In this chapter, we are going to introduce the well-seperated pair decomposition (WSPD,, which is a data structure that can be used in order to solve effectively a great variety of proximity problems. Afterward, we are going to define the well-separated pair decomposition and we will study the relationships which are valid by proving them. In the end, we are going to study when a well- seperated pair decomposition is spanner graph.

Chapter 4

In this chapter, we are going to introduce and analyze a property P, the so-called gap property. We are going to define the simple and strong gap property and we are going to refer the Gap-Greedy algorithm. Finally, we are going to prove that the Gap-Greedy algorithm is a spanner graph for S.

Εισαγωγή

1.1 Γραφήματα

Ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα είναι ένα ζεύγος G = (V, E), όπου V είναι ένα σύνολο τα στοιχεία του οποίου ονομάζονται κορυφές και το E είναι ένα σύνολο που αποτελείται από ζεύγη κορυφών. Κάθε στοιχείο του E ονομάζεται ακμή και έχει τη μορφή {u, v} για ορισμένες διαφορετικές κορυφές u και v στο V. Μπορούμε επίσης να πούμε ότι το u και v συνδέονται μέσω μιας ακμής. Παρατηρήστε ότι {u, v} και {v, u} δηλώνουν την ίδια ακμή του E. Στην εργασία μας, θα εξετάσουμε μόνο πεπερασμένα γραφήματα, οποίων οι κορυφές είναι πεπερασμένες.

Αν u και v είναι δύο κορυφές ενός μη-κατευθυνόμενου γραφήματος G = (V, E), τότε το μονοπάτι μεταξύ u και v είναι μια ακολουθία $\{u_0, u_1, u_2,. . . , u_k\}$ των κορυφών του V για κάποιο $k \geq 0$ τέτοιο ώστε $u = u_0$, $u_k = v$, και $\{u_i, u_{i+1}\} \in E$, για όλα τα i με $0 \leq i < k$. Το μονοπάτι ονομάζεται απλό (simple) αν όλες οι κορυφές του είναι διαφορετικές ανά ζεύγος. Το μονοπάτι ονομάζεται κύκλος (cycle), εάν όλες οι κορυφές της είναι διαφορετικές ανά ζεύγος, εκτός του ότι u = v.

Δύο κορυφές u και v ενός μη-κατευθυνόμενου γραφήματος G = (V, E) λέμε ότι συνδέονται με ένα μονοπάτι εάν υπάρχει ένα μονοπάτι στο G μεταξύ u και v. Παρατηρήστε ότι κάθε κορυφή συνδέεται με τον εαυτός την. Εμείς λέμε ότι G είναι συνδεδεμένο (connected) αν κάθε ζεύγος κορυφών συνδέεται με ένα μονοπάτι.

Ο βαθμός (degree) μιας κορυφής u σε ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα G = (V, E) ορίζεται ως ο αριθμός των ακμών που περιέχουν το u ως κορυφή. Ορίζουμε τον βαθμό της u από deg(u). Ο βαθμός του G είναι ο μέγιστος βαθμός οποιασδήποτε από τις κορυφές του.

Ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα G = (V, E) ονομάζεται σταθμισμένο (weighted) δηλαδή έχει βάρος εάν κάθε μία από τις e ακμές του έχει ένα βάρος wt (e), το οποίο είναι ένας πραγματικός αριθμός. Αν e = {u, v}, τότε γράφουμε wt (u, v) αντί του wt ({u, v}). Το βάρος ενός μονοπατιού u_0, u_1, u_2,. . . , u_k ορίζεται ως εξής: $\sum_{i=0}^{k-1} wt(u_i, u_{i+1})$.

Λέμε ότι ένα μη κατευθυνόμενο σταθμισμένο γράφημα (undirected weighted graph) G = (V, E), ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα (triangle inequality) αν wt (u, v) ≤ wt (u, w) + (w, v) για κάθε τρεις ακμές {u, v}, {u, w} και {v, w} του E.

Το πλήρης γράφημα του συνόλου V είναι ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα G =(V, E) για τα οποία το E είναι το σύνολο όλων των $\binom{|V|}{2}$ ζευγών των κορυφών του V.

Ένα κατευθυνόμενο γράφημα είναι ένα ζεύγος G = (V, E), όπου και πάλι, το V είναι ένα πεπερασμένο σύνολο από κορυφές, αλλά τώρα, το E είναι ένα σύνολο από κατευθυνόμενες ακμές της μορφής (υ, ν) για κάποιες διαφορετικές κορυφές u και v του V. Εμείς λέμε ότι το u είναι η πηγή (sourse) και το v είναι ο προορισμός (sink) της ακμής. Οι έννοιες ενός μονοπατιού και ο κύκλος ορίζονται όμοια όπως και στα μη κατευθυνόμενα γραφήματα, η μόνη διαφορά είναι ότι οι ακμές θεωρούνται μονόδρομοι (one-way streets).

1.2 Γεωμετρικά Δίκτυα

Η Ευκλείδεια απόσταση $\|pq\|$ μεταξύ δύο σημείων p = (p_1, p_2, ..., pd) και q = (q_1, q_2, ..., q_d) στο χώρο $\mathbb{R}^d$ ορίζεται ως εξής:

$$\|pq\| := \sqrt{\left((q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + ... + (q_d - p_d)^2\right)}$$

Σε αυτή την εργασία, θα εξετάσουμε κυρίως γεωμετρικά δίκτυα (geometric networks) ή όπως αλλιώς λέγονται Ευκλείδεια γραφήματα (Euclidean graphs). Έστω S ένα πεπερασμένο σύνολο σημείων στον $\mathbb{R}^d$ χώρο . Ένα γεωμετρικό δίκτυο για το S είναι ένα γράφημα G = (S, E), στο οποίο το βάρος της κάθε ακμής ορίζεται ως η Ευκλείδεια απόσταση μεταξύ των κορυφών της. Το βάρος ενός μονοπατιού σε ένα τέτοιο γράφημα θα αναφέρεται επίσης ως το μήκος του. Ως εκ τούτου, εάν t > 1 και ένας πραγματικός αριθμός, τότε το G είναι μια t- επικαλύπτον γράφημα (t-spanner) για το S αν για οποιαδήποτε δύο σημεία p και q του S συνδέονται στο G από ένα μονοπάτι του οποίου το μήκους είναι το πολύ $t\|pq\|$.

1.3 Δέντρα

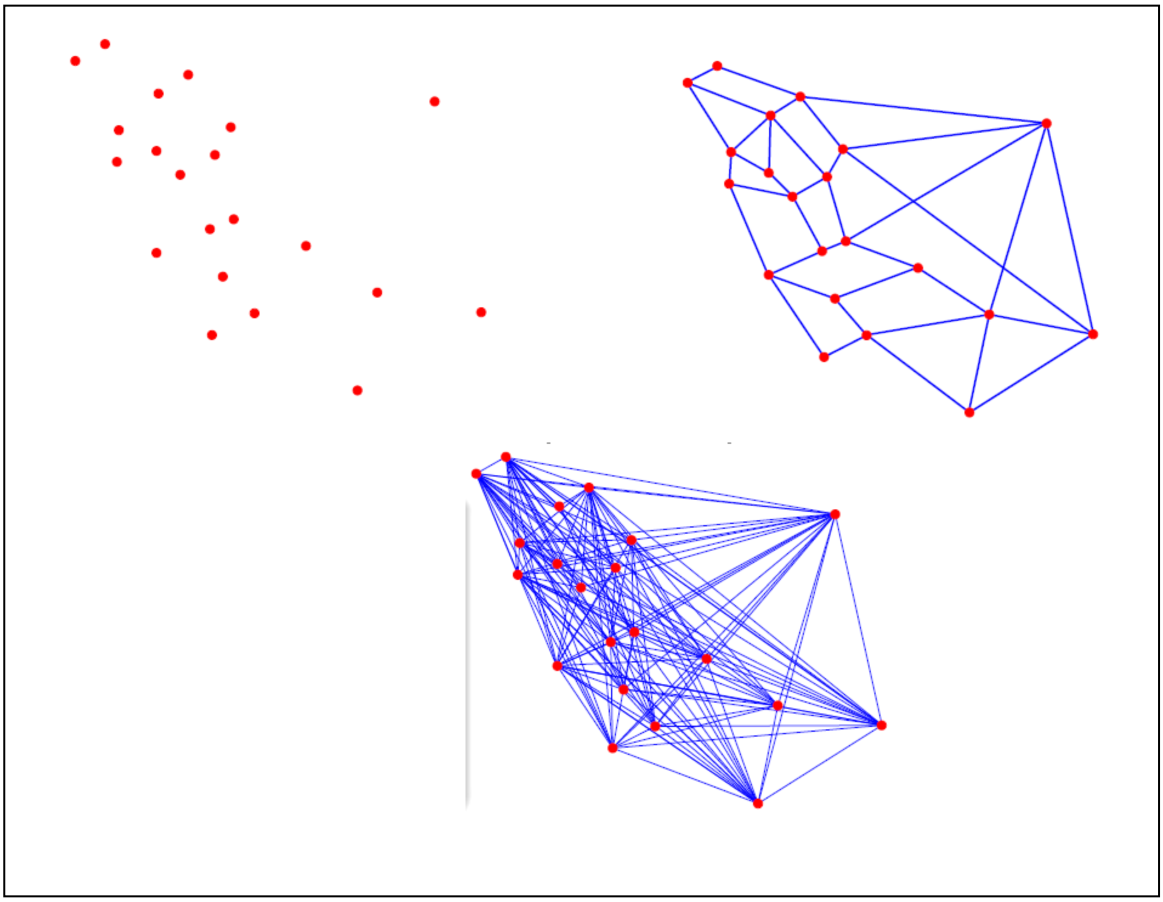
Ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα T = (V, E) ονομάζεται δέντρο (tree) T αν είναι συνδεδεμένο και δεν έχει κύκλους. Οι κορυφές του T επίσης ονομάζονται κόμβοι. Παρατηρήστε ότι το T έχει ακριβώς |V| - 1 ακμές. Έστω T = (V, E) είναι ένα δέντρο και αφήνουμε το r να είναι ένας αυθαίρετος κόμβος που τον ονομάζουμε ρίζα (root) του T. Για οποιοδήποτε κόμβο v του T με $v \neq r$, ο γονέας (parent) του v ορίζεται να είναι ο πρώτος κόμβος που είναι διαφορετικός από v στο (μοναδικό) μονοπάτι του T από το v στο r. Αν u είναι ένας κόμβος του T και v είναι ο γονέας του u, τότε λέμε ότι το u είναι ένα παιδί (child) του v. Αν το v δεν έχει άλλα παιδιά, τότε το v ονομάζεται φύλλο (leaf) του δέντρου T, σε κάθε άλλη περίπτωση ονομάζεται ένα εσωτερικός κόμβος (internal node). Κάθε κόμβος u στο μονοπάτι μεταξύ v και r ονομάζεται ένας πρόγονος (ancestor) του v. Αν $u \neq v$, τότε ο u είναι ένας σωστός πρόγονος (proper ancestor) του v. Ομοίως, κάθε κόμβος u για τον οποίο το μονοπάτι μεταξύ u και r περιέχει κόμβο v καλείται ένας απόγονος (descendent) του v. Αν u = v, τότε u είναι μια σωστή απόγονος του v. Το υποδένδρο (subtree) του v είναι το δέντρο που προέρχεται από όλους τους απογόνους του v.

Ένα δέντρο T με ρίζες ονομάζεται ένα δυαδικό δέντρο (binary tree), αν κάθε κόμβος έχει το πολύ δύο παιδιά. Σε περίπτωση που ένας κόμβος v έχει δύο παιδιά, λέμε ένα από αυτά το αριστερό παιδί (left child) και το άλλο δεξί παιδί (right child).

1.4 Επικαλύπτοντα γραφήματα

Έστω *S* ένα σύνολο n σημείων στον $\mathbb{R}^d$ χώρο και $t \geq 1$ ένας πραγματικός αριθμός. Ένα επικαλύπτον γράφημα για το *S* είναι ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα G με σύνολο κορυφών *S,* τέτοιο ώστε για κάθε δύο σημεία p και q του S, να υπάρχει ένα μονοπάτι στο G μεταξύ p και q, του οποίου το μήκος να είναι μικρότερο από ή ίσο με $t\|pq\|$. Συμβολίζουμε με $\|pq\|$την ευκλείδεια απόσταση. Κάθε μονοπάτι που ικανοποιεί την ιδιότητα αυτή καλείται t-επικαλύπτον μονοπάτι από το p στο q. Ο παραπάνω ορισμός θεωρεί ότι το επικαλύπτον γράφημα είναι ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα, μερικές φορές όμως είναι χρήσιμο να εξετάσουμε κατευθυνόμενα επικαλύπτοντα γραφήματα.

Εάν το G είναι ένα επικαλύπτον γράφημα για το σημείο σύνολο S, τότε προφανώς, το G' είναι επίσης t'-επικαλύπτον γράφημα για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό t' με t' > t. Αυτό οδηγεί στην παρακάτω αναφορά.



Σχήμα 1: Δοθέντος ενός συνόλου S και t>1 μπορούμε να κατασκευάσουμε-υπολογίσουμε επικαλύπτοντα γραφήματα

1.5 Παράγοντας επέκτασης

Θεωρούμε S ένα σύνολο n σημείων στον $\mathbb{R}^d$ χώρο και G ένα ευκλείδειο γράφημα με σύνολο κορυφών S. Ο παράγοντας επέκτασης (stretch factor) του G είναι ο μικρότερος πραγματικός αριθμός t τέτοιος ώστε το G να είναι ένα t-επικαλύπτον γράφημα του S.

Ιδιότητες:

1. **1.** Έστω S ένα σύνολο n σημείων στον $\mathbb{R}^d$ χώρο και t≥1 να είναι ένας πραγματικός αριθμός. Κάθε επικαλύπτον γράφημα του S έχει τουλάχιστον n - 1 ακμές και βάρος τουλάχιστον με wt(MST(S)), όπου MST είναι το ελάχιστο επικαλύπτον δέντρο. Οι ακμές πρέπει να είναι n - 1 επειδή πρέπει τα σημεία του γραφήματος να ενώνονται.
2. **2.** Το πλήρες γράφημα είναι ένα 1-επικαλύπτον γράφημα (t=1) , αλλά έχει τετραγωνικό αριθμό ακμών.
3. **3.** Αν υποθέσουμε ότι δεν υπάρχουν τρία σημεία του S συνευθειακά, τότε το πλήρες γράφημα είναι 1-επικαλύπτον γράφημα(1-spanner) για το S και έχει O(n) ακμές, με n το πλήθος των κορυφών.
4. **4.** Τέλος πρέπει το t>1 για να μην πάρουμε το ίδιο γράφημα.

1.6 Επικαλύπτοντα δέντρα

Έστω σύνολο S αποτελούμενο από n σημεία, τότε καλούμε δέντρο το άκυκλα συνδεδεμένο γράφημα που αποτελείται από αυτά τα σημεία. Έτσι λέμε ότι το γράφημα είναι επικαλύπτον δέντρο (spanning tree) του S. Ένα επικαλύπτον δέντρο είναι ‹‹ιδανικό››, όταν έχει τον ελάχιστο αριθμό ακμών.

Ένα σύνολο σημείων έχει πολλά επικαλύπτοντα δέντρα. Για την ακρίβεια κάθε σύνολο n σημείων έχει ακριβώς $n^{(n-2)}$ επικαλύπτοντα δέντρα.

Έστω T ένα επικαλύπτον δέντρο του συνόλου S. Το βάρος wt(T) του δέντρου T ορίζεται ως το άθροισμα των μηκών των ακμών, όπου το μήκος της ακμής {p, q} είναι η ευκλείδεια απόσταση $\|pq\|$ ανάμεσα στο p και στο q. Ένα ελάχιστο επικαλύπτον δέντρο (minimum spanning tree) MST(S) του S είναι ένα επικαλύπτον δέντρο ελάχιστου βάρους.

Ιδιότητες:

1. Το ελάχιστο επικαλύπτον δέντρο ενός συνόλου S είναι το κοντινότερο δίκτυο που συνδέει τα σημεία του S. Ειδικότερα, αυτή η ιδιότητα αναφέρει το προφανές γεγονός ότι το συντομότερο συνδεδεμένο δίκτυο θα πρέπει να είναι ένα δέντρο. Έτσι, ένα ελάχιστο επικαλύπτον δέντρο είναι καλό, με την έννοια ότι τόσο ο αριθμός των ακμών του όσο και το βάρος του είναι ελάχιστα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα το δέντρο να είναι μικρού βαθμού.

2. Σε κάθε ελάχιστο επικαλύπτον δένδρο που εκτείνεται από ένα σύνολο σημείων στο επίπεδο, κάθε σημείο έχει βαθμό το πολύ έξι. Στην πραγματικότητα, εάν το S είναι ένα πεπερασμένο σύνολο σημείων στον $\mathbb{R}^d$ χώρο, όπου το d $\geq$ 2, τότε ο βαθμός του κάθε σημείου του ελάχιστου επικαλύπτοντος δέντρου του S οριοθετείται από πάνω από μια σταθερά που εξαρτάται μόνο το d.

Κεφάλαιο

2

Επικαλύπτοντα γραφήματα βασιζόμενα στο Θ-γράφημα

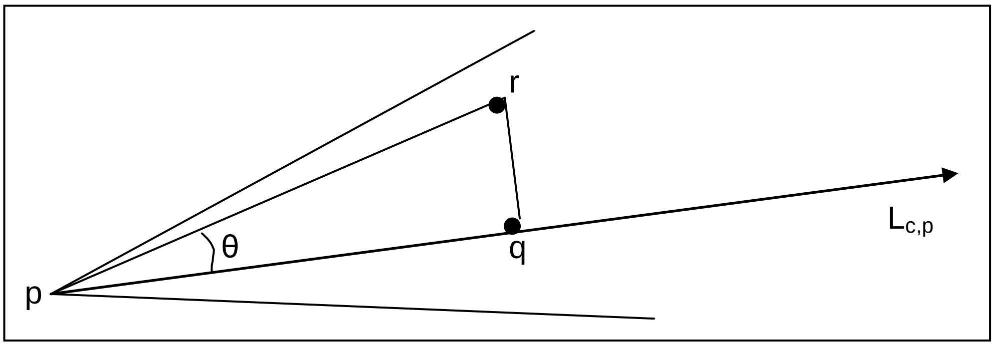
Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε το Θ-γράφημα, ένα γράφημα το οποίο κατασκευάζεται προσθέτοντας μια ακμή σε κάθε μία από τις κ διαφορετικές κατευθύνσεις για κάθε ένα από τα σημεία εισόδου n. Με αυτό τον τρόπο μπορούμε εύκολα να ακολουθήσουμε μια σύντομη διαδρομή από μια κορυφή σε μια άλλη για να φτάσουμε εύκολα στον προορισμό μας δηλαδή από ένα σημείο p σε ένα σημείο q.

Επίσης θα δείξουμε ότι το Θ-γράφημα είναι ένα αραιό επικαλύπτον γράφημα για κάθε αυθαίρετο μικρό πραγματικό αριθμό t>1. Ξεκινώντας την ανάλυσή μας θα δώσουμε τον ορισμό του Θ-γραφήματος ύστερα τον αλγόριθμο σε μορφή ψευδοκώδικα που παράγει το Θ-περίπατο(Θ-walk), θα αναλύσουμε πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Θ-γράφημα για να φτιάξουμε επικαλύπτοντα γραφήματα και τέλος θα δώσουμε τον τρόπο με τον οποίο κατασκευάζεται το Θ-γράφημα.

2.1 Θ-γράφημα

Έστω S ένα σύνολο σημείων στο επίπεδο. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα G με την ιδιότητα ότι για οποιαδήποτε δύο διαφορετικά σημεία p και q στο S, το G περιέχει μία ακμή (p, r) τέτοια ώστε:

1. το διάνυσμα $\overrightarrow{pr}$ είναι "στη γενική διεύθυνση" του q και
2. ακολουθώντας την ακμή από το p στο r δεν μας πηγαίνει "πολύ μακριά" πέρα από το q.



Σχήμα 1: Μία απλή αναπαράσταση του κώνου του Θ-γραφήματος

Στη συνέχεια μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα μονοπάτι στο G μεταξύ p και q ως εξής: Έναρξη με $p_0 = p$. Έστω $i \geq 0$, και υποθέτουμε ότι κατασκευάζουμε μια διαδρομή $\{p_0, p_1, ..., p_i\}$. Αν $p_i = q$, τότε έχουμε φτάσει στον προορισμό μας. Διαφορετικά, αν $p_i \neq q$, αλλά (p_i, q) είναι μία ακμή του G, τότε θα ακολουθήσουμε αυτή την ακμή, και θα φτάσουμε στον προορισμό μας. Ας υποθέσουμε ότι $p_i \neq q$, και (p_i, q) δεν είναι μία ακμή του G. Έστω p_{i+1} είναι ένα σημείο του S τέτοιο ώστε (p_i, p_{i+1}) είναι μία ακμή του G που ικανοποιεί τα ανωτέρω 1 και 2. Δηλαδή, (p_i, p_{i+1}) μας φέρνει στη γενική κατεύθυνση του q, αλλά όχι πολύ μακριά πέρα από το q. Στη συνέχεια, p_{i+1} είναι το επόμενο σημείο στην πορεία μας. Το Θ-γράφημα, το οποίο θα ορίσουμε παρακάτω, βασίζεται σε αυτή την ιδέα. Η έννοια μιας ακμής αποτελείται "στη γενική διεύθυνση "από ένα σημείο ή από ένα σύνολο σημείων και βασίζεται σε κώνους.

Ένας κώνος είναι μια περιοχή στο χώρο μεταξύ δύο ακτινών που προέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο ονομάζεται κορυφή του κώνου. Έστω ότι έχουμε $\kappa \geq 2$, και $\theta=2\pi/\kappa$. Αν περιστρέψουμε το θετικό x-άξονα κατά γωνία $i\theta$, $0 \leq i < \kappa$, τότε θα έχουμε κ ακτίνες. Κάθε ζεύγος διαδοχικών ακτίνων καθορίζει ένα κώνο του οποίου η κορυφή είναι η καταγωγή του . Δηλώνουμε το σύνολο αυτών των κώνων ως C_k. Είναι σαφές ότι οι κώνοι του C_k χωρίζουν το χώρο. Επίσης, οι δύο ακτίνες οριοθέτησης κάθε κώνου C_k κάνουν μια γωνία θ.

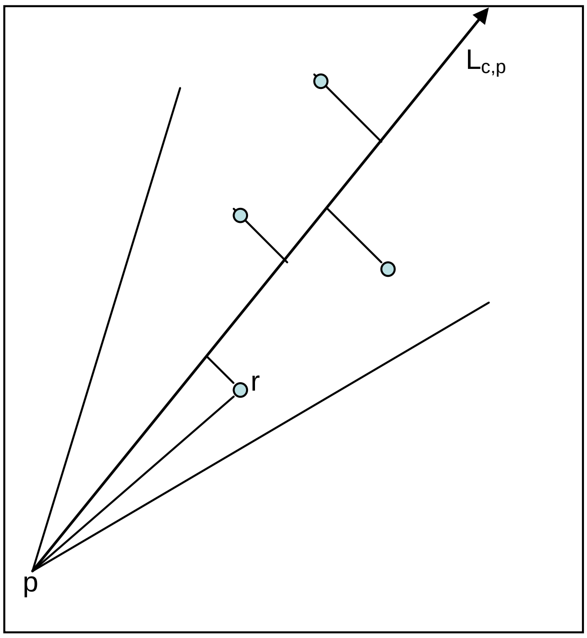
Για κάθε κώνο $C \in C_k$, θεωρούμε ότι l_C είναι μια σταθερή ακτίνα που προέρχεται από την κορυφή τότε περιέχεται στο κώνο C. Η ακτίνα l_C μπορεί να επιλεγεί αυθαίρετα όπως για παράδειγμα, μπορούμε να επιλέξουμε να είναι η διχοτόμος του κώνου C. Με άλλα λόγια, για το σύνολο των κατευθύνσεων στον κώνου C, η ακτίνα l_C είναι μια αντιπροσωπευτική κατεύθυνση.

Έστω C είναι ένας οποιοδήποτε κώνος του C_k και p είναι ένα οποιοδήποτε σημείο του χώρου. Ορίζουμε $C_p = C + p = \{x + p: x \in C\}$ δηλαδή, C_p είναι ο κώνος του οποίου η κορυφή του να βρίσκεται στο p. Ομοίως, ορίζουμε $l_{Cp} = l_C + p$. Ως εκ τούτου, l_{Cp} είναι η ακτίνα που προέρχεται από το p, και εμπεριέχεται στο C_p, και είναι παράλληλη στο l_C.

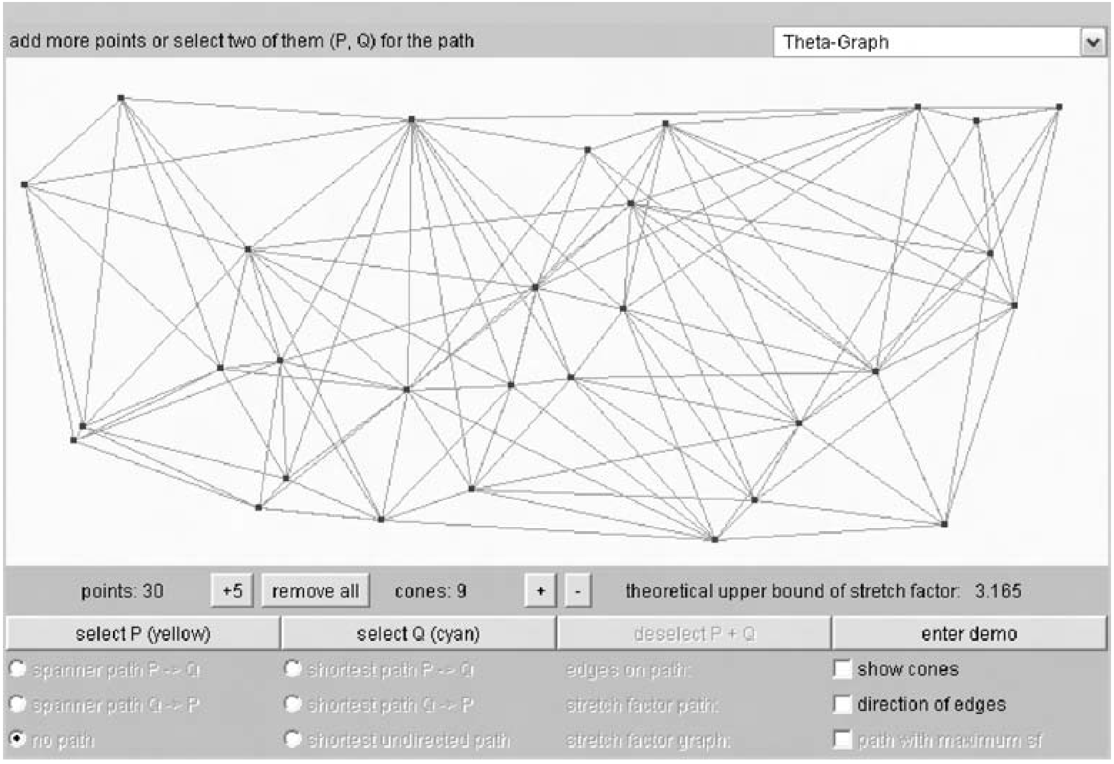
2.2 Ορισμός Θ-γραφήματος

Έστω $\kappa \geq 2$ είναι ένας ακέραιος αριθμός και $\theta = 2\pi / \kappa$ και S είναι το σύνολο των σημείων στο επίπεδο. Το μη κατευθυνόμενο γράφημα Θ(S, κ) ορίζεται ως εξής:

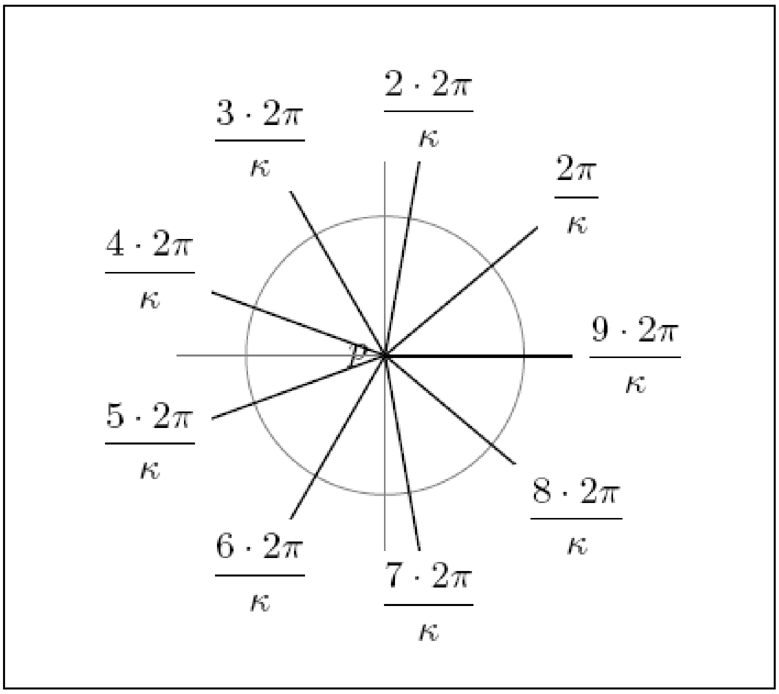
1. Οι κορυφές του Θ(S, κ) είναι τα σημεία του S.
2. Για κάθε σημείο p του S και για κάθε κώνο C του C_k, όπου ο κώνος C_p περιέχει ένα ή περισσότερα σημεία του S \ p, το γράφημα Θ(S, κ) περιέχει μία ακμή (p, r), όπου το r είναι ένα σημείο $C_p \cap S \setminus p$ του οποίου η ορθή προβολή l_{Cp} είναι πιο κοντά στο p.



Σχήμα 2: Το γράφημα Θ(S, κ) περιέχει μια ακμή ανάμεσα στο p και στο r, διότι, ανάμεσα σε όλα τα σημεία του κώνου C_p, η προβολή του σημείου r επάνω στην l_{Cp} είναι πιο κοντά στο p.



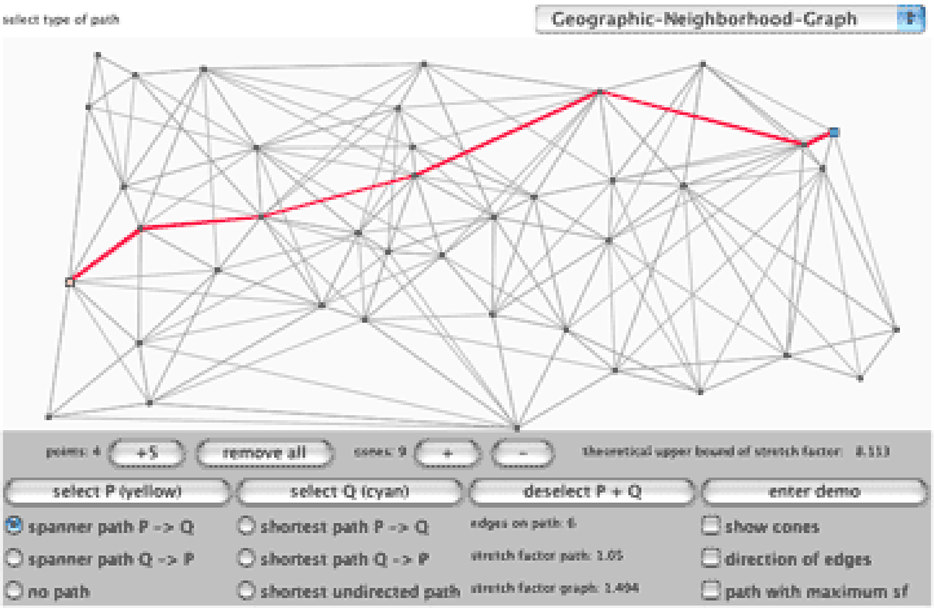
Σχήμα 3: Ένα Θ-γράφημα για 30 σημεία βασισμένο σε 9 κώνους. Για κάθε κώνο C, η ακτίνα l_C είναι η διχοτόμος του κώνου C.



Σχήμα 4: Ένας κύκλος χωρισμένος σε κ=9 κώνους

<u>*Υποσημείωση:*</u> Αν πάρουμε ένα σημείο r στο $C_p \cap S \setminus p$ που είναι πιο κοντά στο p στην ευκλείδεια μετρική, τότε παίρνουμε ένα γράφημα που ονομάζεται γεωγραφικό

γειτονικό γράφημα(Yao-γράφημα). Μπορεί εύκολα να δειχτεί ότι αυτό το γράφημα έχει παρόμοιες ιδιότητες με το Θ-γράφημα και είναι αραιό επικαλύπτον γράφημα για μερικούς πραγματικούς αριθμούς $t = 1/(\cos\theta - \sin\theta)$ που εξαρτώνται από τη γωνία θ.



Σχήμα 4: Ένα Yao-γράφημα όπου φαίνεται η διαδρομή από το p στο q

2.3 Το Θ-μονοπάτι Αλγορίθμου

Θα παρουσιάσουμε με μορφή ψευδοκώδικα τον αλγόριθμο που κατασκευάζει και επιστρέφει ένα μονοπάτι μεταξύ των σημείων p και q:

<u>Αλγόριθμος 1:</u> *Αλγόριθμος Θ-μονοπατιού (p,q)*

Ο παρακάτω Αλγόριθμος λαμβάνει ως δεδομένα δύο σημεία p και q στο S και επιστρέφει ένα μονοπάτι Θ(S, k) ανάμεσα στο p και στο q.

$p_0 = p$
$i = 0$
while $p_i \neq q$ **do**
$p = p_0, p_1, \ldots, p_i$ είναι ένα μονοπάτι στο Θ(S, k)
C είναι κώνος του C_k όπου το $q \in C_{pi}$
p_{i+1} είναι σημείο του $C_{pi} \cap S$ όπου(p_i, p_{i+1}) είναι μια ακμή του Θ(S, k)
$i = i+1$
end while
return το μονοπάτι $p_0, p_1, \ldots, p_i$

Αφού παρουσιάσαμε τον αλγόριθμο θα επεκτείνουμε τη μελέτη μας αναλύοντας τον παράγοντα επέκτασης του Θ-γραφήματος.

2.4 Ανάλυση του παράγοντα επέκτασης του Θ-γραφήματος

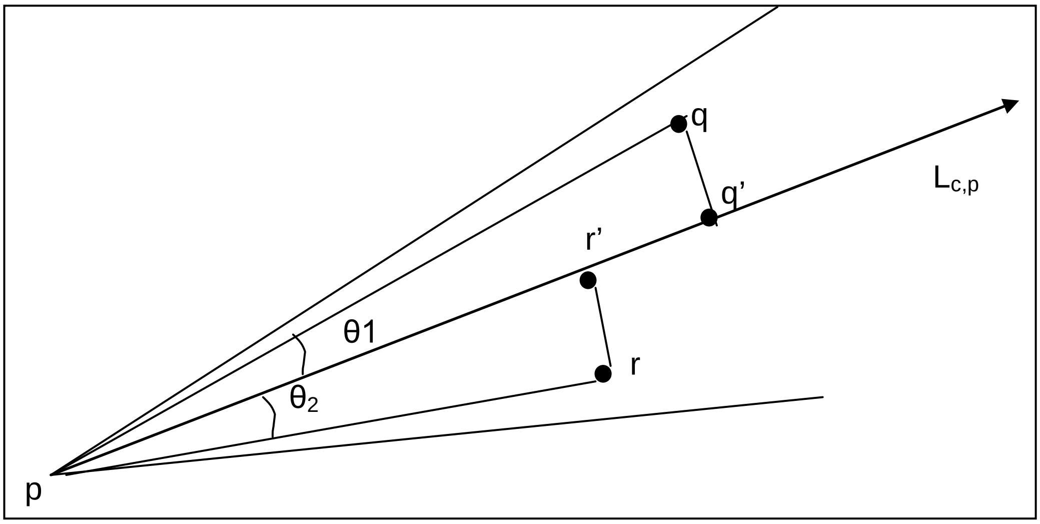
Ξεκινώντας τη μελέτη μας θα αποδείξουμε ένα γεωμετρικό λήμμα που ισχύει για κ≥8 αλλά και την ειδική περίπτωση για κ≥9 το οποίο ουσιαστικά αποδεικνύει πως ο αλγόριθμος του Θ-μονοπατιού τερματίζει. Έτσι κατασκευάζεται μια διαδρομή από το p στο q το οποίο μήκος αυτής της ευκλείδειας διαδρομής εξαρτάται από το κ και είναι σταθερό.

Λήμμα: Έστω κ≥8 ένας ακέραιος αριθμός και θ=2π/κ και p και q να είναι δύο διακριτά σημεία στο χώρο και C να είναι κώνος του $C_κ$ έτσι ώστε το q є C_p τότε έχουμε: Αφήνουμε το r να είναι ένα σημείο στο C_p έτσι ώστε η ορθή προβολή, του r στην ακτίνα $l_{C,p}$ να είναι τόσο κοντά στο p όπως η ορθή προβολή του q πάνω στην $l_{C,P}$, τότε:

1. $\|pr\| \le \|pq\| / \cos\theta$
2. $\|rp\| \le \|pq\| - (\cos\theta - \sin\theta)\|pq\|$

Απόδειξη:

Για το 1. έχουμε ότι:



Σχήμα 5: Το παραπάνω σχήμα απεικονίζει την πρώτη υπόθεση

Αν το r=q τότε η υπόθεση ισχύει. Θα αποδείξουμε για r≠q. Έστω q' να είναι η ορθή προβολή του q πάνω στην ακτίνα l_{Cp} και θ_1 να είναι η γωνία μεταξύ των $\|pq\|$και $\|pq'\|$ δηλαδή:

$\hat{\theta}_1 = (\|pq\|, \|pq'\|) : 0 \le \theta_1 \le \theta$

Άρα έχουμε ότι: $\|pq'\| = \|pq\| \cos\theta_1 \le \|pq\|$

Θεωρώντας όμοια ότι r' είναι μία άλλη προβολή του r πάνω στην ακτίνα l_{Cp} και θ_2 να είναι η γωνία μεταξύ των $\|pr\|$ και $\|pr'\|$δηλαδή:

$\hat{\theta}_2 = (\|pr\|, \|pr'\|) : 0 \le \theta_2 \le \theta$

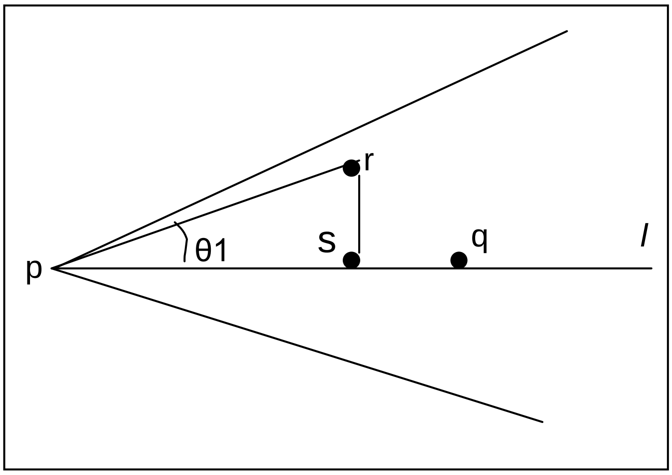
Άρα έχουμε ότι: $\|pr'\| = \|pr\| \cos\theta_2 \ge \|pr\| \cos\theta$

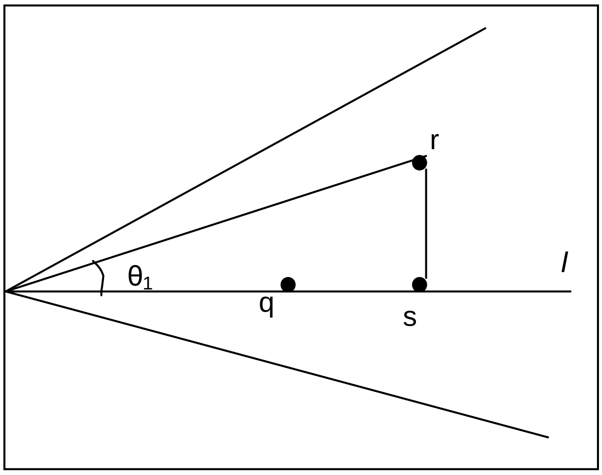
Η υπόθεσή μας συνεπάγεται ότι: $\|pr'\| \le \|pq'\|$, δηλαδή

$\|pr\| \cos\theta \le \|pr'\| \le \|pq'\| \le \|pq\|$

<u>Άρα αποδείξαμε το 1. ότι</u>: $\|pr\| \le \|pq\| / \cos\theta$

Για το 2. έχουμε ότι :Για να αποδείξουμε τη δεύτερη υπόθεση αφήνουμε το p και το q πάνω στην ευθεία ℓ και το s να είναι η ορθή προβολή του r πάνω στην ευθεία ℓ. Τέλος έχουμε τη γωνία θ_1 που είναι η γωνία ανάμεσα στα τμήματα $\|pq\|$και $\|pr\|$, $\hat{\theta}_1 = (\|pq\|, \|pr\|)$:0≤ $\hat{\theta}_1$≤ θ. Έχουμε 2 περιπτώσεις όταν το $\|ps\| \le \|pq\|$ ή το $\|ps\| > \|pq\|$.





Σχήμα 6: περίπτωση 1 και 2 της δεύτερης υπόθεσης του λήμματος

<u>Περίπτωση 1:</u> $\|ps\| \leq \|pq\|$

Με βάση το σχήμα έχουμε ότι: $\|rs\| = \|pr\| \sin\theta_1 \leq \|pr\| \sin\theta$ και το $\|ps\| = \|pr\| \cos\theta_1 \geq \|pr\| \cos\theta$

Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$$\|rq\| \leq \|rs\| + \|sq\|$$

$$= \|rs\| \leq \|pq\| - \|ps\|$$

$$\leq \|pr\| \sin\theta + \|pq\| - \|pr\| \cos\theta$$

$$= \|pq\| - (\cos\theta - \sin\theta)\|pr\|$$

<u>Περίπτωση 2:</u> $\|ps\| > \|pq\|$.

Με βάση πάλι το σχήμα έχουμε ότι: $\|rs\| = \|pr\| \sin\theta_1$

και το $\|ps\| = \|pr\| \cos\theta_1$

Θεωρώντας ότι η συνάρτηση f(x)=cosx+sinx είναι αύξουσα για $0 \leq x \leq \pi/4$ και χρησιμοποιώντας ξανά την τριγωνική ανισότητα παίρνουμε ότι:

$$\|rq\| \leq \|rs\| + \|sq\|$$

$$= \|rs\| + \|ps\| - \|pq\|$$

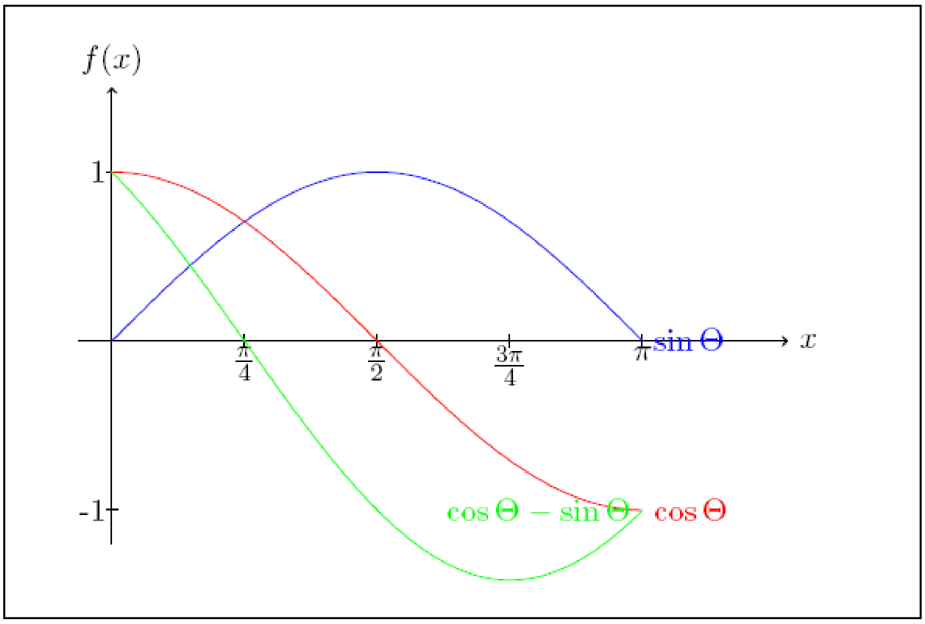
$$= \|pr\|(\sin\theta_1 + \cos\theta_1) - \|pq\|$$

$$\leq \|pr\|(\sin\theta + \cos\theta) - \|pq\|$$

Από την προηγούμενη υπόθεση έχουμε ότι: $\|pr\| \cos\theta \leq \|pq\|$

άρα: $\|pr\|(\sin\theta + \cos\theta) - \|pq\| \leq \|pq\| - (\cos\theta - \sin\theta)\|pr\|$

Άρα τελικά έχουμε πως: $\|rp\| \leq \|pq\| - (\cos\theta - \sin\theta)\|pq\|$



Σχήμα 7: Οι γραφικές παραστάσεις του sinθ, cosθ και του cosθ-sinθ που μας βοήθησαν στη μελέτη μας.

Έστω τώρα ότι το $\kappa \geq 9$ και το $0 \leq \theta \leq \pi/4$. Έστω ότι το p και το q είναι δύο διαφορετικά σημεία του S και υποθέτουμε ότι το μονοπάτι $p= p_0,p_1,p_2,...$, κατασκευάζεται με τον αλγόριθμο Θ-μονοπατιού (p, q). Έστω ότι το $i \geq 0$ και υποθέτουμε ότι το $p_i \neq p_{i+1}$, τότε το σημείο p_{i+1} υπάρχει, δηλαδή ο αλγόριθμος επεκτείνει το μονοπάτι με ένα ακόμα σημείο. Υποθέτουμε τώρα τρία σημεία p_i, q, p_{i+1} και έστω ότι C να είναι ο κώνος και το $q \in C_{P_i}$. Με τον ορισμό του Θ-γραφήματος Θ(S,κ) η ορθή προβολή του p_{i+1} πάνω στην ακτίνα $\ell_{C,pi}$ είναι τουλάχιστον τόσο κοντά στο p_i σαν την ορθή προβολή του q πάνω στην $\ell_{C,pi}$. Ως εκ τούτου μπορούμε σύμφωνα με την προηγούμενη απόδειξη να πούμε πως: $\|p_{i+1}q\| \leq \|p_i q\| - (\cos\theta - \sin\theta)\|p_i p_{i+1}\| < \|p_i q\|$ όπου η αυστηρή ανισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι: $0<\theta<\pi/4$. Θέτουμε ότι: $\|p_i p_{i+1}\| = \ell_i$ και έχουμε ότι:

Έτσι έχουμε δείξει ότι τα σημεία $p_0,p_1,p_2,...$, στο μονοπάτι, αρχίζοντας από το p είναι κατά ζεύγη διαφορετικά: κάθε διαδοχικό σημείο στο μονοπάτι μας οδηγεί αυστηρά πιο κοντά στον προορισμό μας το q. Δεδομένου ότι το σύνολο S είναι πεπερασμένο αυτό δείχνει ότι ο αλγόριθμος Θ-περιπάτου (p,q) τερματίζει. Δηλαδή πράγματι ο αλγόριθμος αυτός κατασκευάζει μια διαδρομή ανάμεσα στο p και στο q.

Θα δείξουμε τώρα πως υφίσταται ένα άνω φράγμα στο μήκος αυτής της διαδρομής. Έστω ότι m είναι ένας δείκτης τέτοιος ώστε το p_m=q. Κάνοντας αναδιάταξη στην προηγούμενη ανισότητα έχουμε ότι:

$$\ell_i \leq (\tfrac{1}{\cos\theta - \sin\theta})(\|p_i q\| - \|p_{i+1} q\|) \;,\quad 0 \leq i < m$$

Επομένως το μήκος του μονοπατιού ανάμεσα στο p και στο q ισούται με:

$$\sum_{i=1}^{m-1} \ell_i \leq (\tfrac{1}{\cos\theta - \sin\theta}) \sum_{i=1}^{m-1} (\|p_i q\| - \|p_{i+1} q\|)$$

$$= (\tfrac{1}{\cos\theta - \sin\theta})(\|p_0 q\| - \|p_m q\|)$$

$$= \tfrac{1}{\cos\theta - \sin\theta}(\|pq\|)$$

Άρα δείξαμε ότι το γράφημα Θ(S,κ) είναι επικαλύπτον γράφημα του S για *t=1/(cosθ-sinθ)*

Όταν είμαστε στο p_i έχουμε μια απόσταση $\|p_i q\|$ από τον προορισμό μας. Όταν ακολουθούμε την ακμή (p_i, p_{i+1}) διανύουμε μια απόσταση ℓ_i και με βάση την παραπάνω απόδειξη αυτό μας φέρνει πιο κοντά στον προορισμό μας με τουλάχιστον cosθ-sinθ φορές αυτή την απόσταση, γεγονός που υποδηλώνει ότι ο παράγοντας επέκτασης του Θ(S,κ) είναι το πολύ 1/(cosθ-sinθ).

Το ακόλουθο θεώρημα συνοψίζει όλα όσα έχουμε αποδείξει μέχρι τώρα:

Θεώρημα: Έστω κ≥9 να είναι ένας ακέραιος αριθμός και θ=2π/κ και S$ να είναι ένα σύνολο σημείων στο χώρο. Το γράφημα Θ(S,κ) είναι επικαλύπτον γράφημα για το S, για t=1/(cos θ-sin θ)$ και περιέχει το πολύ κn ακμές.

2.5 Κατασκευή Θ-γραφήματος

Ας ασχοληθούμε τώρα με τη μέθοδο κατασκευής του Θ-γραφήματος. Έστω S ένα σύνολο n σημείων στο χώρο, και κ ≥ 2 να είναι ένας ακέραιος. Υπενθυμίζουμε ότι C_k είναι ένα σύνολο από κώνους που διαχωρίζονται στο χώρο και έχουν την αρχή τους σε αυτό που ονομάζουμε κορυφή του κώνου. Έστω C είναι ένας σταθερός κώνος του C_k. Θα δώσουμε έναν αλγόριθμο που υπολογίζει όλες τις ακμές του Θ-(S, κ) που αντιστοιχούν στο C, που είναι οι ακμές της μορφής {p, r},όπου p є S και r є C_p ∩ S \ {p}. Επαναλαμβάνοντας αυτό για όλους τους κ κώνους του C_k, παίρνουμε ολόκληρο το γράφημα Θ-(S,κ).

Πρέπει να εισαγάγουμε κάποιο συμβολισμό. Ανατρέχουμε στο Σχήμα 7. Έστω h_1 και h_2 είναι οι δύο γραμμές που αρχίζουμε και περιέχουν τις ακτίνες οριοθέτησης του C. Έτσι, h_1+p και h_2+p και είναι γραμμές που το σημείο p περιέχεται στις ακτίνες οριοθέτησης του C_p. Υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι η ακτίνα ℓ_c συμπίπτει με τον θετικό άξονα των x, και ότι h_1 (αντίστοιχα h_2) περιέχει το άνω (αντίστοιχα κάτω) όριο των ακτίνων του σχήματος 7. που απεικονίζει αυτό που περιγράφουμε. Η ακόλουθη παρατήρηση αναφέρεται στο σημείο r, και καθορίζει την ακμή {p, r} στο γράφημα Θ-(S, κ).

<u>*Παρατήρηση:*</u> Έστω p είναι ένα σημείο του S, και υποθέτουμε ότι ο κώνος C_p περιέχει ένα ή περισσότερα σημεία του S \ {p}. Έστω {p, r} είναι η ακμή του Θ- (S, κ) και το r є C_p ∩ S \ {p}. Το σημείο r έχει την ιδιότητα ότι έχει τη μικρότερη x-συντεταγμένη (τετμημένη) σε όλα τα σημεία του S που είναι (i) από κάτω h_1 + p, και (ii) και από πάνω h_2 + p.

Το ερώτημα είναι πώς να υπολογίσουμε αποτελεσματικά αυτό το σημείο r για κάθε σημείο p του S. Εμείς θα λύσουμε αυτό το πρόβλημα με ένα απλό αλγόριθμο σάρωσης επιπέδου. Αρχίζουμε την εξέταση μας με το απλούστερο δυναμικό πρόβλημα -ερώτημα.

2.5.1 Βρίσκοντας το πιο αριστερό σημείο στο ημιεπίπεδο

Ο αλγόριθμός μας υπολογίζει όλες τις ακμές του γραφήματος Θ- (S, κ) που αντιστοιχούν στο σταθερό κώνο C χρησιμοποιώντας τη λύση του ακόλουθου προβλήματος :

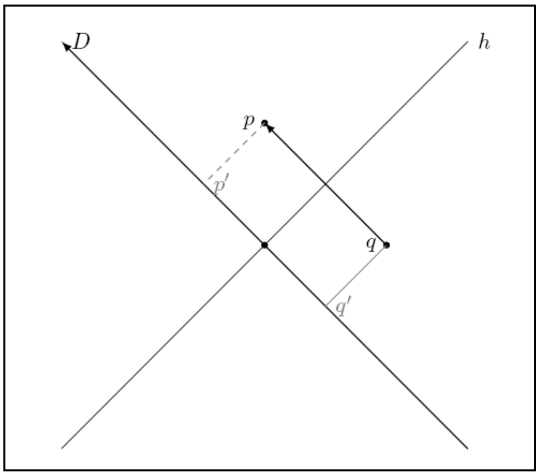
<u>Πρόβλημα:</u> Βρείτε το πιο αριστερό σημείο στο ημιεπίπεδο **(**Find-Leftmost-in-Translated-Halfplane**).** Έστω h είναι ένα μία σταθερή και όχι κάθετη γραμμή

σύμφωνα με τον ισχυρισμός μας για αρχή . Διατηρήστε ένα σύνολο S από n σημεία σε μια δομή δεδομένων που υποστηρίζει τις ακόλουθες πράξεις-λειτουργίες:

1. MinAbove(p) (Ελάχιστο από πάνω) : Δοθέντος ενός αρχικού σημείο p ϵ S, υπολογίστε ένα σημείο με την ελάχιστη x-συντεταγμένη (τετμημένη) για όλα τα σημεία του S που είναι πάνω από h + p.
2. Insert(p) (Εισαγωγή p): Εισαγάγετε ένα αυθαίρετο σημείο p ϵ □^{2} του S.
3. Delete(p) (Διαγραφή p): Διαγράψτε το σημείο p από το S.

Έστω D να είναι μία κατευθυνόμενη γραμμή που είναι κάθετη προς την γραμμή h. Αυτό η γραμμή κατευθύνεται στο το σημείο στο ημιεπίπεδο που αποτελείται από όλα τα σημεία του □^{2} που είναι πάνω από το h.

Θα χρησιμοποιήσουμε την κατευθυνόμενη γραμμή D για να καθορίσουμε την ακόλουθη σχέση για τα σημεία του S: Έστω p και q να είναι δύο σημεία του S και έστω p' και q' είναι οι ορθογώνιες προβολές τους πάνω στη γραμμή D, αντίστοιχα. Τότε , το p είναι μικρότερο από το σχετικά , εάν το διάνυσμα από το p' στο q' έχει την ίδια κατεύθυνση με γραμμή D. Καλούμε ότι αυτή η σχέση προκαλείται από τη γραμμή D (order induced by D).



Σχήμα 8: Απεικονίζονται η κατευθυνόμενη γραμμή D που είναι κάθετη στη γραμμή h και φαίνονται τα σημεία p και q καθώς και οι προβολές τους στη D, p΄ και q΄

Για να λυθεί το πρόβλημα που αναφέραμε πιο πάνω Βρείτε το πιο αριστερό σημείο στο ημιεπίπεδο αποθηκεύουμε τα σημεία του S στα φύλλα ενός καλού δυαδικό δέντρο αναζήτησης T , ταξινομώντας τα σύμφωνα με τη σειρά που προκαλείται από τη γραμμή D. Κάθε εσωτερικός κόμβος u του δέντρου T περιέχει πληροφορίες για να μας καθοδηγήσει να αναζητήσουμε (π.χ. το σημείο αποθηκεύεται στο δεξιότερο φύλλο στο αριστερό υποδέντρο της ρίζας στο u). Επίσης, κάθε κόμβος u του δέντρου T περιέχει πρόσθετες πληροφορίες ενός σημείου z_u και αποθηκεύονται στο υποδέντρο του u του οποίου x-συντεταγμένη είναι η μικρότερη. Το δυαδικό δέντρο αναζήτησης T κατασκευάζεται σε χρόνο O(nlogn).

Δοθέντος του δέντρου T, μπορούμε να απαντήσουμε στο ερώτημα MinAbove (p), όπου p ϵ S, ως εξής: Ξεκινάμε αρχικά με ένα κενό σύνολο M. Στη συνέχεια, ακολουθούμε το μονοπάτι του δέντρου T από τη ρίζα στο φύλλο και αποθηκεύουμε το p. Κάθε φορά το μονοπάτι προχωρεί από έναν κόμβο v στο αριστερό παιδί (left child) του, προσθέτουμε το δεξιό παιδί (right child) του v στο κενό σύνολο M. Μετά το μονοπάτι έχει καταργηθεί εντελώς, και το σύνολο M περιέχει O (logn) κόμβους, με την ακόλουθη ιδιότητα. Τα υποσύνολα του S αποθηκεύονται στα υποδέντρα που είναι ριζωμένα στους κόμβους του συνόλου M, που είναι διαχωρισμένο από το σύνολο όλων των σημείων του S, που είναι μεγαλύτερο (σύμφωνα με τη σχέση που προκαλείται από τη D γραμμή) από το p.

Αυτά είναι ακριβώς τα σημεία που βρίσκονται πάνω από τη γραμμή h + p. Υπενθυμίζουμε ότι κάθε κόμβος u αποθηκεύει ένα σημείο z_u από το υποδέντρο του που έχει την ελάχιστη x-συντεταγμένη. Ως εκ τούτου, αν πάρουμε αυτό το σημείο μεταξύ των z_u , u ϵ M, με την ελάχιστη x-συντεταγμένη, τότε θα έχουμε ακριβώς το σημείο που θέλουμε να υπολογίσουμε. Δεν είναι δύσκολο να δει κανείς ότι ο χρόνος αυτού του αλγορίθμου είναι O (log n).

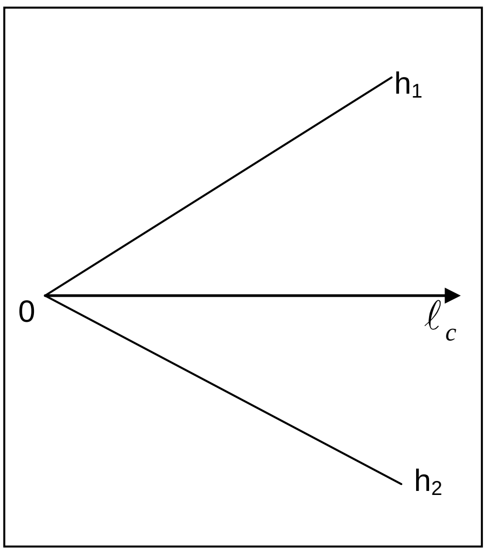
Έχουμε λάβει το ακόλουθο αποτέλεσμα το οποίο παρουσιάζεται στο ακόλουθο λήμμα:

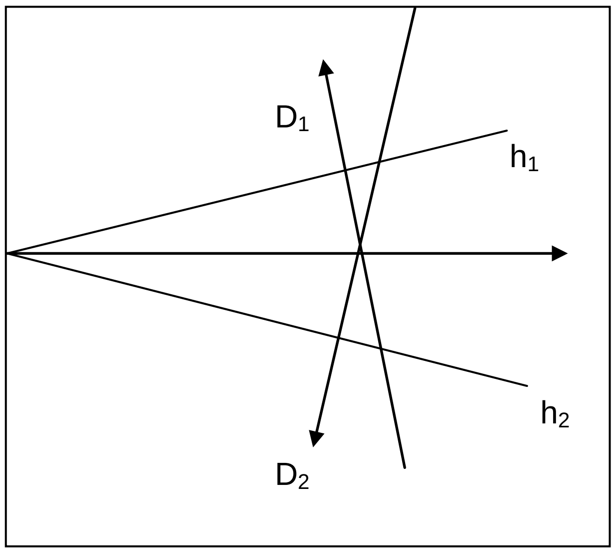
<u>*Λήμμα:*</u> Το παραπάνω δέντρο T λύνει το πρόβλημα Find-Leftmost-in-Translated-Halfplane**.** Υποστηρίζει ότι κάθε μία από τις λειτουργίες MinAbove, Insert , Delete πραγματοποιείται σε O (log n) χρόνο. Αυτή η δομή δεδομένων έχει μέγεθος O (n) και μπορεί να κατασκευαστεί σε χρόνο O (n log n).

2.5.2 Υπολογισμός όλων των ακμών του γραφήματος Θ-(S, κ) που αντιστοιχούν σε έναν κώνο

Τώρα είμαστε σε θέση να παρουσιάσουμε τον αλγόριθμο σάρωσης επιπέδου που υπολογίζει τις ακμές του γραφήματος Θ-(S, κ) που αντιστοιχούν στο σταθερό κώνο C. Υπενθυμίζουμε ότι h_1 και h_2 είναι οι γραμμές που οριοθετούν των κώνο C από πάνω και από κάτω αντίστοιχα, και επίσης υποθέτουμε ότι η ακτίνα ℓ_c συμπίπτει με το θετικό χ-άξονα.

Έστω D_1 και D_2 είναι οι γραμμές οι οποίες είναι ορθογώνιες στην h_1 και h_2, αντίστοιχα. Διευθύνουμε την γραμμή D_1, έτσι ώστε τα σημεία της να είναι στραμμένα προς το ημιεπίπεδο που αποτελείται από όλα τα σημεία του $\mathbb{R}^2$ που είναι κάτω από την h_1 , και στρίβουμε και τη D2 έτσι ώστε τα σημεία της να δείχνουν προς το ημιεπίπεδο που αποτελείται από όλα τα σημεία του $\mathbb{R}^2$ που είναι πάνω από την h_2.Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται αυτό που περιγράψαμε.





Σχήμα 9: Ο κώνος C και οι κατευθυνόμενες γραμμές D_1 και D_2 .

2.6 Ο Αλγόριθμος κατασκευής του Θ-γραφήματος

Θα παρουσιάσουμε σε μορφή ψευδοκώδικα τον αλγόριθμο που κατασκευάζει το Θ γράφημα.

<u>Αλγόριθμος 2:</u> *Αλγόριθμος κατασκευής Θ γραφήματος Θ(S,C)*

Σχόλιο: Αυτός ο αλγόριθμος παίρνει ως είσοδο ένα σύνολο S από n σημεία στο επίπεδο και ένα κώνο C του C_k. Επιστρέφει το σύνολο όλων των ακμών του Θ-(S, κ) που αντιστοιχούν στο C. Ο αλγόριθμος αποτελείται από τα ακόλουθα τρία βήματα:

Βήμα 1: Ταξινόμηση των σημείων S σύμφωνα με τη σειρά που προκαλείται από την κατευθυνόμενη γραμμή D_1. Έστω $p_1, p_2, . . . , p_n$ είναι η ταξινομημένη ακολουθία των σημείων.

Βήμα 2: Διαμορφώστε μία κενή δομή δεδομένων T για την επίλυση προβλήματος Find-Leftmost-in-Translated-Halfplane χρησιμοποιώντας h: = h_2.

Βήμα 3: Επισκεφθείτε τα σημεία του S το ένα μετά το άλλο, ξεκινώντας από το p_n. Ας υποθέσουμε ότι ο αλγόριθμος έχει επισκεφθεί ήδη τα σημεία p_n, $p_{n-1},..., p_{i+1}$. Επίσης, ας υποθέσουμε ότι αυτή η δομή δεδομένων T αποθηκεύει αυτά τα n - i σημεία (και όχι άλλα σημεία). Το επόμενο σημείο που πρέπει να επισκεφτεί είναι το p_i . Ο αλγόριθμος κάνει τα εξής:

- Εισάγει το σημείο p_i στην T, δηλαδή, εκτελεί την λειτουργία Insert (p_i).
- Βρίσκει το σημείο r_i στην T που είναι πάνω από τη γραμμή $h_2 + p_i$ και του οποίου η x-συντεταγμένη είναι η μικρότερη δηλαδή, απαντά στο ερώτημα MinAbove (p_i).

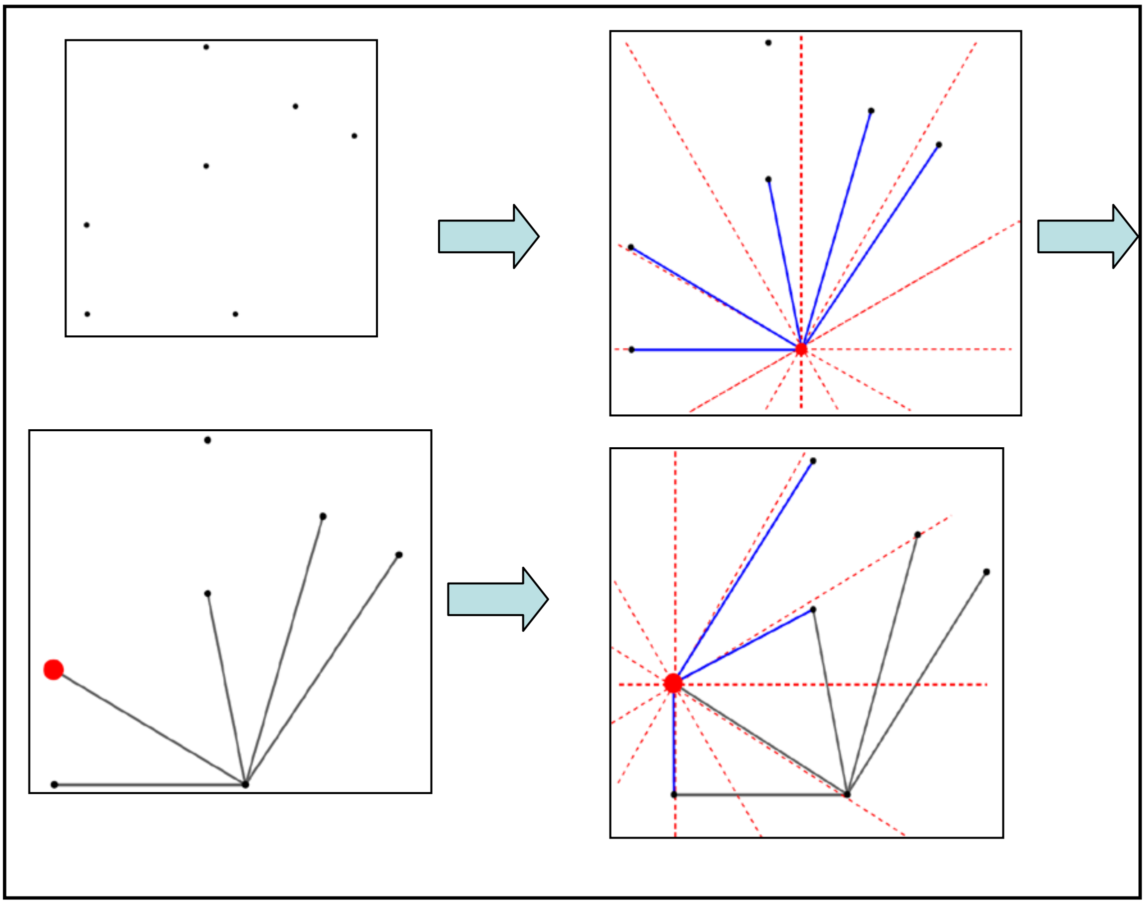
Παρατηρήστε ότι το σημείο r_i είναι ένα από τα σημεία $p_n, p_{n-1},..., p_{i+1}$. Αυτά είναι ακριβώς τα σημεία του S που είναι κάτω από το όριο $h_1 + p_i$. Συνεπώς, $\{p_i, r_i\}$ είναι η ακμή του Θ-(S, κ), που αντιστοιχεί στον κώνο C.

Έτσι όλα τα σημεία του S έχουν επισκεφθεί το Βήμα 3 όλες οι ακμές του Θ-(S, κ) που αντιστοιχούν στον κώνο C έχουν υπολογιστεί.

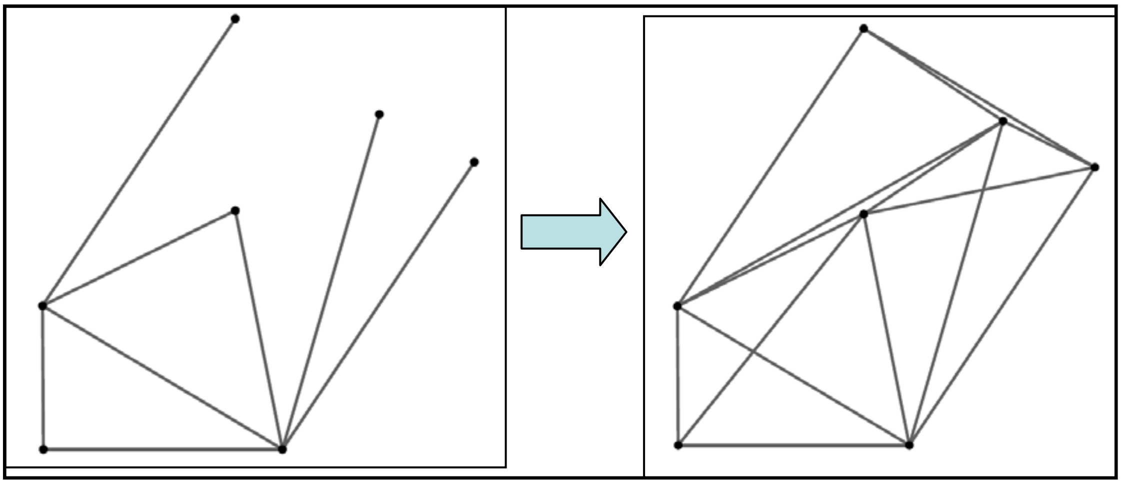
Θα αναλύσουμε τώρα το χρόνο εκτέλεσης του αλγορίθμου κατασκευής του γραφήματος Θ(S,C). Η αρχική ταξινόμηση των σημείων στο Βήμα 1 λαμβάνει χρόνο (nlog n). Είναι προφανές πως το Βήμα 2 χρειάζεται O(1) χρόνο. Σύμφωνα με το προηγούμενο λήμμα, ο συνολικός χρόνος για το Βήμα 3 είναι O (nlogn). Ως εκ τούτου, αλγόριθμος θέλει χρόνο συνολικά O (n log n).

Θεώρημα: Έστω $\kappa \geq 2$ να είναι ένας ακέραιος, και $\theta = 2\pi / \kappa$ και έστω S να είναι ένα σύνολο n σημείων στο χώρο. Το γράφημα Θ- (S, κ) μπορεί να κατασκευαστεί σε O (κn log n) χρόνο, χρησιμοποιώντας O (n) χώρο.

<u>Περιληπτικά η κατασκευή Θ-γραφήματος:</u> Για κάθε σημείο p є S, και έστω r είναι σημείο τέτοιο ώστε {p, r} να είναι η ακμή του Θ-(S, κ) που αντιστοιχεί στον κώνο C. Τότε r είναι η λύση στην ελαχιστοποίηση του ερωτήματος που υπόκεινται σε δύο γραμμικούς περιορισμούς. Χρησιμοποιώντας την τεχνική της σάρωσης του επιπέδου , ο αριθμός των περιορισμών μειώνεται κατά ένα. Από την άλλη πλευρά, αυτά τα περιορισμένα ελάχιστα ερωτήματα πρέπει να απαντηθούν γιατί υπόκεινται σε μία δυναμική μεταβολή του συνόλου των σημείων.



Σχήμα 10: Παρουσιάζεται η κατασκευή του Θ-γραφήματος και συνεχίζεται και στο επόμενο σχήμα (Σχήμα 11)



Σχήμα 11: Τελική μορφή του Θ-γραφήματος ύστερα από υλοποίηση της μεθόδου που περιγράψαμε

Κεφάλαιο
3

Επικαλύπτοντα γραφήματα βασιζόμενα στην αποσύνθεση των καλώς διαχωριζόμενων ζευγών

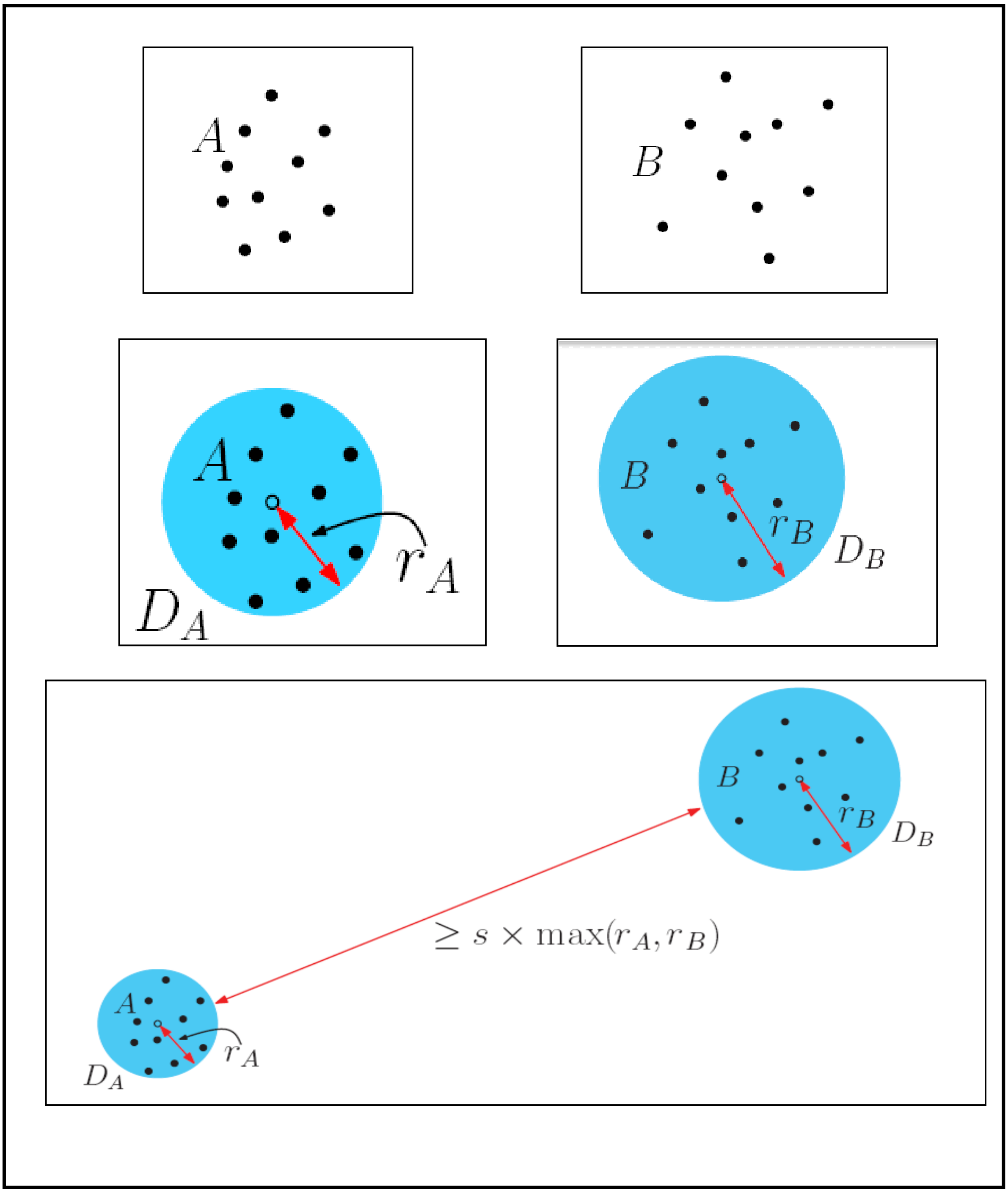
Σε αυτό το κεφάλαιο θα εισάγουμε την αποσύνθεση των καλώς διαχωριζόμενων ζευγών (WSPD) η οποία είναι μια δομή δεδομένων που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να λύσει αποτελεσματικά μια μεγάλη ποικιλία προβλημάτων απόστασης. Ύστερα θα δώσουμε τον ορισμό της αποσύνθεσης των καλώς διαχωριζόμενων ζευγών και θα μελετήσουμε τις σχέσεις που ισχύουν αποδεικνύοντας αυτές και τέλος θα μελετήσουμε πότε μία αποσύνθεση από καλώς διαχωριζόμενα ζεύγη αποτελεί επικαλύπτον γράφημα.

3.1 Αποσύνθεση των καλώς διαχωριζόμενων ζευγών

Θα ξεκινήσουμε την αναφορά μας με τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός (Καλώς διαχωριζόμενα ζεύγη): Έστω s>0 να είναι ένας πραγματικός αριθμός και έστω A και B να είναι δύο πεπερασμένα σύνολα σημείων στον $\mathbb{R}^d$ χώρο. Λέμε ότι A και B είναι καλώς διαχωριζόμενα (well seperated) σε σχέση με το s αν υπάρχουν δύο ασύνδετα δυσδιάστατα σύνολα D_α και D_b τέτοια ώστε:

1. D_a και D_b έχουν την ίδια ακτίνα
2. D_a περιέχει τον περιβάλλοντα χώρο R(A) του A
3. D_b περιέχει τον περιβάλλοντα χώρο R(B) του B
4. η απόσταση μεταξύ D_a και D_b είναι μεγαλύτερη ή ίση από την ακτίνα του D_a



Σχήμα 12 : Δύο σύνολα σημείων Α και Β που είναι καλά διαχωρισμένα Και οι δύο κύκλοι έχουν ακτίνα $\rho = r_a = r_b$, και η απόσταση τους είναι μεγαλύτερη από ή ίση με sρ**.**

Εξηγώντας τώρα το παραπάνω σχήμα με βάση τον ορισμό που αναφέραμε, τονίζουμε πως ο πραγματικός αριθμός s ονομάζεται *αναλογία διαχωρισμού(seperation ratio).* Επίσης παρατηρούμε πως τα δύο σύνολα Α και Β που είναι καλά διαχωρισμένα πρέπει να είναι ξένα μεταξύ τους επειδή οι δύο κύκλοι D_a και D_b απαιτείται να είναι ξένοι μεταξύ τους. Επίσης βλέπουμε πως τα κέντρα των δύο κύκλων D_a και D_b μπορούν να είναι σε οποιεσδήποτε κατευθύνσεις και δεν είναι απαραίτητο να συμπίπτουν με τα κέντρα των ορθογώνιων κουτιών που οριοθετούν τα σημεία.

Απόρροια των παραπάνω είναι μια πολύ σημαντική ιδιότητα των καλώς διαχωριζόμενων ζευγών την οποία θα τη χρησιμοποιήσουμε και παρακάτω. Θεωρώντας πως δύο σύνολα A και B είναι καλώς διαχωριζόμενα με αναλογία διαχωρισμού s πολύ μεγάλη τότε έχουμε ότι: i) η απόσταση μεταξύ δύο σημείων στο A είναι πολύ μικρότερη από την απόσταση μεταξύ οποιουδήποτε σημείου στο A και οποιουδήποτε σημείου στο B και ii) όλες οι αποστάσεις μεταξύ ενός σημείου στο A και ενός σημείου στο B είναι περίπου ίσες.

Το παρακάτω λήμμα συνοψίζει όλα αυτά που αναφέραμε:

Λήμμα: Έστω $s>0$ ένας πραγματικός αριθμός και A και B δύο πεπερασμένα σύνολα σημείων που είναι καλώς διαχωριζόμενα με το s και p και p' δύο οποιαδήποτε σημεία στο A και q και q' δύο οποιαδήποτε σημεία στο B, τότε:

1. $\|pp'\| \le (2/s)\|pq\|$
2. $\|p'q'\| \le (1+4/s)\|pq\|$

Απόδειξη Λήμματος: Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό υπάρχουν δύο ασύνδετα δυσδιάστατα σύνολα D_α και D_b που περιέχουν σημεία του A και του B αντίστοιχα όπου έχουν την ίδια ακτίνα ρ και αυτά των οποίων η απόσταση είναι μεγαλύτερη ή ίση από sρ.

Έχουμε ότι: $\|p'p'\| \le 2\rho$ και $\|pq\| \ge s\rho$

Από αυτές τις δύο ανισότητες αμέσως συνεπάγεται ότι: $\|pp'\| \le (2/s)\|pq\|$ άρα αποδείχτηκε ο πρώτος μας ισχυρισμός. Ακριβώς με ένα όμοιο ισχυρισμό αποδεικνύεται και ο δεύτερος ισχυρισμός μας.

Με το συνδυασμό αυτών των δύο ανισοτήτων και εφαρμόζοντας την τριγωνική ανισότητα παίρνουμε:

$$\begin{aligned}\|p'q'\| &\le \|p'p\| + \|pq\| + \|qq'\| \\ &\le (2/s)\|pq\| + \|pq\| + (2/s)\|pq\| \\ &= (1+4/s)\|pq\|\end{aligned}$$

Άρα αποδείξαμε και τον δεύτερο ισχυρισμό μας.

Στη συνέχεια θα ορίσουμε την αποσύνθεση των καλώς διαχωριζόμενων ζευγών και ύστερα θα ασχοληθούμε με το κατά πόσο αυτά είναι επικαλύπτοντα γραφήματα.

Ορισμός(αποσύνθεση καλώς διαχωριζόμενων ζευγών): Έστω S να είναι ένα σύνολο σημείων στον $\mathbb{R}^d$ χώρο και s>0 να είναι ένας πραγματικός αριθμός. Η αποσύνθεση των καλώς διαχωριζόμενων ζευγών για το S σε σχέση με την αναλογία διαχωρισμού s είναι μια σειρά $\{A_1, B_1\}, \{A_2, B_2\}, \ldots, \{A_m, B_m\}$ ζευγών μην κενών υποσυνόλων του S για μερικά m τέτοια ώστε:

1. για κάθε i με $1 \leq i \leq m$, τα A_i και B_i είναι καλώς διαχωριζόμενα σε σχέση με το s, και
2. για οποιαδήποτε δύο διακριτά σημεία p και q του S, υπάρχει ακριβώς ένας δείκτης i με $1 \leq i \leq m$, τέτοιος ώστε:

   - $p \in A_i$ και $q \in B_i$,
   - $p \in B_i$ και $q \in A_i$

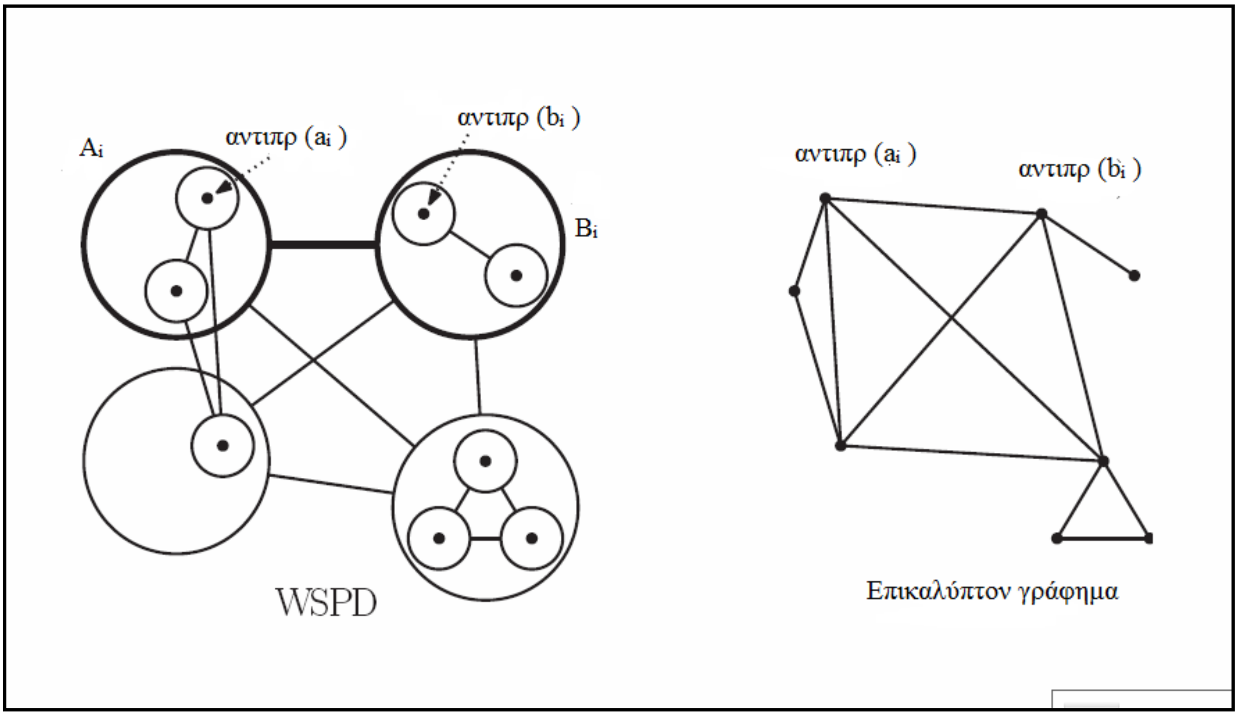
Ο ακέραιος m καλείται μέγεθος της αποσύνθεσης των καλώς διαχωριζόμενων ζευγών.

3.2 Επικαλύπτοντα γραφήματα βασιζόμενα στην αποσύνθεση των καλώς διαχωριζόμενων ζευγών

Θα κατασκευάσουμε αποσύνθεση των καλώς διαχωριζόμενων ζευγών με αναλογία διαχωρισμού s>4 όπου θα παίρνει μια αυθαίρετη ακμή για κάθε ζεύγος της αποσύνθεσης. Το αποτέλεσμα είναι ένα επικαλύπτον γράφημα με *$t = (s+4)/(s-4)$.*

Για να το αποδείξουμε, θεωρούμε ότι το S είναι ένα σύνολο n σημείων στον και το t>1να είναι ένας πραγματικός αριθμός.

Θεωρούμε μία αυθαίρετη αποσύνθεση καλώς διαχωριζομένων ζευγών , $\{A_1, B_1\}, \{A_2, B_2\}, \ldots, \{A_m, B_m\}$. Για κάθε i με $1 \leq i \leq m$ θεωρούμε ένα a_i να είναι ένα τυχαίο σημείο του A_i και b_i, ένα τυχαίο σημείο του B_i. Καλούμε αυτά τα σημεία αντιπροσώπους του A_i και του B_i. Επίσης ισχυριζόμαστε ότι το μη κατευθυνόμενο γράφημα του G (graph G) = (S. E) όπου το E = $\{a_i, b_i\}$: $1 \leq i \leq m\}$ είναι ένα t-επικαλύπτον γράφημα για το S.



Σχήμα 13: Κατασκευή γεωμετρικού επικαλύπτοντος γραφήματος βασιζόμενο στην αποσύνθεση των καλώς διαχωριζόμενων ζευγών

Θα δείξουμε επαγωγικά πως μεταξύ της απόστασης $\|pq\|$ το γράφημα G περιέχει ένα μονοπάτι μεταξύ των p και q το οποίο $\|pq\|$=0 είναι επικαλύπτον γράφημα. Αρχίζοντας την απόδειξη ισχυριζόμαστε πως αν ισχύει σε κάθε περίπτωση. Αν $\|pq\|$>0 και επιπλέον υποθέτουμε ότι έχουμε δύο σημεία x και y του S τέτοια ώστε: $\|xy\| < \|pq\|$, το γράφημα (S.E) περιέχει ένα μονοπάτι μεταξύ των x και y. Άρα υπάρχει ένα ζεύγος (A_i, B_i) στην αποσύνθεση των καλώς διαχωριζόμενων ζευγών τέτοιο ώστε i) p є A_i και q є B_i και ii) p є B_i και q є A_i. Μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι το i) ισχύει. Άρα θεωρούμε αντιπρόσωπο του A_i το a_i και του B_i το b_i. Άρα έχουμε πως το $\|pa_i\| \leq (2/s)\|pq\|$ το οποίο είναι μικρότερο από το $\|pq\|$ επειδή το s>4. Άρα λόγω της επαγωγικής υπόθεσης υπάρχει ένα μονοπάτι P_1 στο επικαλύπτον γράφημα G μεταξύ των p και a_i.

Ομοίως επειδή το $\|b_i q\| < \|pq\|$ υπάρχει ένα μονοπάτι P_2 στο επικαλύπτον γράφημα G μεταξύ των b_i και q. Άρα P είναι το μονοπάτι μεταξύ των p και q το οποίο βγήκε από τη συνένωση της διαδρομής P_1, και της ακμής (γωνίας) (a_i , b_i) και του P_2 μονοπατιού. Έτσι τελικά βγάλαμε το μήκος L του μονοπατιού P.

Παρατηρήσεις:

1. $L \le t\|pa_i\| + \|a_i b_i\| + t\|b_i q\|$
2. $\|a_i b_i\| \le (1 + 4/s)\|pq\|$
3. $\|pa_i\| \le (2/s)\|pq\|$ και $\|b_i q\| \le (2/s)\|pq\|$

Άρα συνδυάζοντας τις προηγούμενες παρατηρήσεις παίρνουμε ότι:

$$L \le (\left(\frac{4(t+1)}{s}\right) + 1)\|pq\|$$

το οποίο είναι ίσο με $t\|pq\|$ από την αρχική επιλογή μας με αναλογία διαχωρισμού s. Άρα αποδείξαμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα (αποσύνθεση καλώς διαχωριζόμενων ζευγών - επικαλύπτον γράφημα): Έστω S να είναι ένας σύνολο σημείων στον $\mathbb{R}^d$ χώρο , t>1 να είναι ένας πραγματικός αριθμός και s = 4(t+1)/(t − 1). Δεδομένης μια αυθαίρετης αποσύνθεσης καλώς διαχωριζόμενων ζευγών για το S σε σχέση με το s μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα επικαλύπτον γράφημα για το S που αποτελείται από m ακμές όπου m το μέγεθος της αποσύνθεσης των καλώς διαχωριζόμενων ζευγών.

3.3 Ο Αλγόριθμος της αποσύνθεσης των καλώς διαχωριζόμενων ζευγών για επικαλύπτοντα γραφήματα

Θα παρουσιάσουμε τον αλγόριθμο σε μορφή ψευδοκώδικα που επιστρέφει το επικαλύπτον γράφημα από την αποσύνθεση των καλώς διαχωριζόμενων ζευγών. Τ

<u>Αλγόριθμος 3:</u> *Ο Αλγόριθμος της αποσύνθεσης των καλώς διαχωριζόμενων ζευγών για επικαλύπτον γράφημα*
Ο παρακάτω Αλγόριθμος λαμβάνει ως δεδομένα ένα σύνολο S και t > 1και επιστρέφει το επικαλύπτον γράφημα G(S, E).
1. Για αρχή W= W.S.P.D σε σχέση με το s = 4(t+1)/(t − 1) 2. Αρχικά Ε = 0 (κενό σύνολο) 3. **for each (**A_i , B_i) є W επέλεξε τυχαίους κόμβους α є A_i και b є B_i πρόσθεσε την ακμή (α, b) στο E 4. **return** G (S, E)

Ο παραπάνω αλγόριθμος για να πραγματοποιηθεί απαιτείται χρόνος O (nlogn) και χώρος O (n). O Callahan και ο Kosaraju το 1995 ανέφεραν πως για κάθε σύνολο n σημείων μπορούμε να κατασκευάσουμε την αποσύνθεση των καλώς διαχωριζόμενων ζευγών με μέγεθος O (s^d n) σε χρόνο O (nlogn) καταλαμβάνοντας O (s^d n) χώρο.

Κεφάλαιο 4

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα εισαγάγουμε και να αναλύσουμε μια ιδιότητα P, τη λεγόμενη ιδιότητα του κενού (gap property). Θα ορίσουμε την απλή και την ισχυρή ιδιότητα του κενού(strong gap property) , θα αναφερθούμε στον αλγόριθμο Gap-Greedy και τέλος θα αποδείξουμε ότι ο αλγόριθμος Gap-Greedy είναι αραιό επικαλύπτον γράφημα για το S.

4.1 Επικαλύπτοντα γραφήματα βασιζόμενα στον αλγόριθμο Gap-Greedy

4.1.1 Ιδιότητα του κενού

Έστω S ένα σύνολο n σημείων στον $\mathbb{R}^d$ χώρο και έστω E ένα σύνολο (κατευθυνόμενων και μη κατευθυνόμενων) ακμών των οποίων τα τελικά σημεία ανήκουν στο S και ικανοποιούν κάποια ιδιότητα P. Έτσι ένα καλό άνω όριο για το βάρος wt(E) του E είναι το άθροισμα των μηκών των ακμών.

Ένα σύνολο από κατευθυνόμενες ακμές ικανοποιούν την ιδιότητα του κενού αν δύο οποιεσδήποτε διαφορετικές τιμές είναι μακριά (σε σχέση με το μήκος των πλησιέστερων δύο ακμών). Αν ισχύει αυτό για το προορισμό δύο οποιονδήποτε ακμών τότε το σύνολο των ακμών ικανοποιεί την ισχυρή ιδιότητα του κενού.

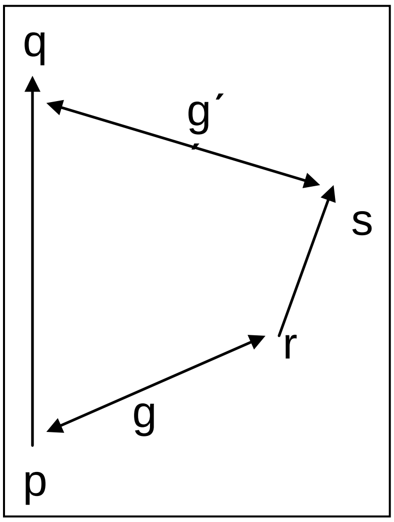
Ορισμός: Ιδιότητα του κενού: Έστω $w \geq 0$ είναι ένας πραγματικός αριθμός και έστω E είναι ένα σύνολο κατευθυνόμενων ακμών στον $\mathbb{R}^d$ χώρο.

1. Το Ε ικανοποιεί την w ιδιότητα του κενού αν για οποιεσδήποτε δύο διαφορετικές ακμές (p,q) και (r,s) στο Ε έχουμε ότι: $\|pr\| > w * \min(\|pq\|, \|rs\|)$
2. Το Ε ικανοποιεί την w ισχυρή ιδιότητα του κενού αν για οποιεσδήποτε δύο διαφορετικές ακμές (p,q) και (r,s) στο Ε έχουμε ότι: $\|pr\| > w * \min(\|pq\|, \|rs\|)$ και $\|qs\| > w * \min(\|pq\|, \|rs\|)$

Στην προηγούμενη αναφορά μας υπενθυμίζουμε ότι για κάθε κατευθυνόμενη ακμή (p,q), p ονομάζεται η πηγή και το q είναι ο προορισμός.

Θεώρημα του κενού: Έστω S ένα σύνολο n σημείων στον $\mathbb{R}^d$ χώρο και έστω Ε: $E \subseteq S \times S$ να είναι ένα σύνολο διαφορετικών ακμών που ικανοποιούν την w ιδιότητα του κενού.

1. Αν w≥0 τότε για κάθε σημείο του S είναι η πηγή των περισσότερων της μιας ακμής του Ε.
2. Αν w≥0 τότε wt(E) < (1 + 2/w) · wt(MST(S)) logn, όπου MST(S) είναι το ελάχιστο επικαλύπτον δέντρο του S.
3. Αν w≥0 και το Ε ικανοποιεί την w ισχυρή ιδιότητα του κενού τότε το κάθε σημείο του S είναι ο προορισμός των περισσοτέρων των μια ακμών του Ε.



Σχήμα 13 : Αποδεικνύοντας την ισχυρή w ιδιότητα του κενού για τις δύο κατευθυνόμενες ακμές (p, q) και (r, s). Η απόσταση g μεταξύ των δύο πηγών p και r είναι μεγαλύτερη από w φορές το μήκος της κοντινότερης ακμής (r, s). Ομοίως, η απόσταση g΄ μεταξύ των δύο προορισμών q και s είναι μεγαλύτερη από w ||rs||.

Θα παρουσιάσουμε τώρα ένα γεωμετρικό λήμμα το οποίο θα μας είναι χρήσιμο στις επόμενες αποδείξεις μας. Ξεκινώντας από μία κορυφή p με σκοπό να πάμε σε κάποια άλλη κορυφή q πηγαίνουμε κατά τη γενική διεύθυνση του q για να βρούμε την κορυφή q. Θα ορίσουμε τώρα την γωνία μεταξύ δύο κατευθυνόμενων ακμών. Έστω p, q, r και s είναι τέσσερα σημεία στον $\mathbb{R}^d$ χώρο τέτοια ώστε p≠q και r≠s. Η γωνία μεταξύ των κατευθυνόμενων ακμών (p,q) και (r,s), που συμβολίζεται με (pq,rs) και είναι ένας πραγματικός αριθμός από το [0,π].

Λήμμα: Έστω t, θ, και w να είναι πραγματικοί αριθμοί, έτσι ώστε $0 < \theta < \pi / 4$, $0 \leq w < (\cos\theta - \sin\theta) / 2$ και $t \geq 1 / (\cos\theta - \sin\theta - 2w)$. Έστω p, q, r και s είναι σημεία στον $\mathbb{R}^d$ χώρο, τέτοια ώστε:

1. p≠q, r≠s,
2. η γωνία $\angle(pq, rs) \leq \theta$,
3. $\|rs\| \leq \|pq\| / \cos\theta$
4. $\|pr\| \leq w\|rs\|$

Τότε το $\|pr\| \leq \|pq\|$, $\|sq\| \leq \|pq\|$ και $t\|pr\| + \|rs\| + t\|sq\| \leq t\|pq\|$

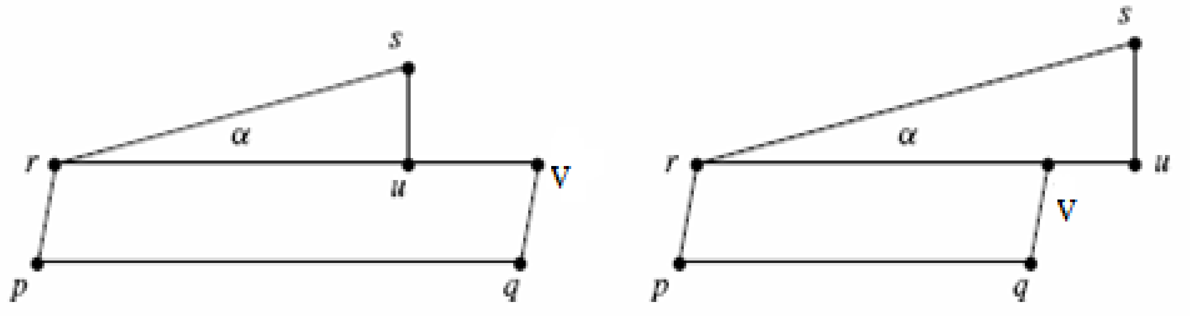
Απόδειξη:

Αφού το $\|rs\| \leq \|pq\| / \cos\theta$ και η γωνία θ βρίσκεται στο $0 < \theta < \pi / 4$ έχουμε ότι το $\|rs\| < \sqrt{2}\|pq\|$ **(1)**

Επίσης αφού το w<1/2 και το $\|pr\| \leq w\|rs\|$ έχουμε ότι το $\|pr\| < \|rs\| / 2$ **(2)**

Συνδυάζοντας αυτές τις δύο ανισότητες **(1), (2)** έχουμε ότι: $\|pr\| < \sqrt{2}\|pq\| / 2 < \|pq\|$

Έστω τώρα ℓ είναι η ακτίνα που προέρχεται από r και που έχει την ίδια κατεύθυνση με το διάνυσμα $\overrightarrow{pq}$. Έστω v είναι το σημείο πάνω στην ℓ, έτσι ώστε $\|rv\| = \|pq\|$. Παρατηρούμε ότι $\|pr\| = \|vq\|$. Έστω τώρα u να είναι η ορθή προβολή του s επάνω στην ℓ, και έστω $\hat{a}$ να είναι η γωνία μεταξύ του διανύσματος $\overrightarrow{rs}$ και της ακτίνας ℓ. Τότε $\hat{a} = (pq, rs) \leq \hat{\theta}$, $\sin a = \|su\| / \|rs\|$ και $\cos a = \|ru\| / \|rs\|$. Θα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις, ανάλογα με το αν το $\|ru\| \le \|rv\|$ ή $\|ru\| > \|rv\|$. Αυτό που περιγράψαμε απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα Σχήμα 14.



Σχήμα 14: Σχηματικά η περίπτωση 1 και 2 για την απόδειξη του λήμματος

Περίπτωση 1: $\|ru\| \le \|rv\|$

Θα δείξουμε ότι $\|sq\| < \|pq\|$ εφαρμόζοντας την τριγωνική ανισότητα:

$$\begin{aligned}
\|sq\| &\le \|su\| + \|uv\| + \|vq\| \\
&= \|su\| + \|rv\| - \|ru\| + \|vq\| \\
&= \|su\| + \|pq\| - \|ru\| + \|pr\| \\
&= \|rs\|(\sin a - \cos a) + \|pq\| + \|pr\| \\
&\le \|rs\|(\sin\theta - \cos\theta) + \|pq\| + w\|rs\| \\
&= \|pq\| - \|rs\|(\cos\theta - \sin\theta - w)
\end{aligned}$$

Αφού το $w < (\cos\theta - \sin\theta)/2$ και το $r \ne s$ συμπεραίνουμε ότι το $\|sq\| < \|pq\|$.

Για να αποδείξουμε τον τελευταίο ισχυρισμό του λήμματος εργαζόμαστε ως εξής:

$$
\begin{aligned}
t\|pr\|+\|rs\|+t\|sq\| &\le t\|pr\|+\|rs\|+t\|pq\|-t\|rs\|(\cos\theta-\sin\theta-w)\\
&\le tw\|rs\|+\|rs\|+t\|pq\|-t\|rs\|(\cos\theta-\sin\theta-w)\\
&=(1-t(\cos\theta-\sin\theta-2w))\|rs\|+t\|pq\|\\
&\le t\|pq\|
\end{aligned}
$$

Περίπτωση 2: $\|ru\|>\|rv\|$

Θα εργαστούμε παρόμοια με την περίπτωση 1 δηλαδή θα εφαρμόσουμε την τριγωνική ανισότητα. Άρα έχουμε ότι:

$$
\begin{aligned}
\|sq\| &\le \|su\|+\|uv\|+\|vq\|\\
&=\|su\|+\|ru\|-\|rv\|+\|vq\|\\
&=\|rs\|(\sin a+\cos a)-\|pq\|+\|pr\|\\
&\le\|rs\|(\sin\theta+\cos\theta)-\|pq\|+w\|rs\|\\
&=\|rs\|(\sin\theta+w)=\|rs\|\cos\theta-\|pq\|\\
&\le\|rs\|(\sin\theta+w)\\
&\le\frac{\|pq\|}{\cos\theta}\left(\sin\theta+\frac{\cos\theta-\sin\theta}{2}\right)\\
&=\frac{1}{2}\|pq\|(1+\tan\theta)
\end{aligned}
$$

Αφού το $0<\theta<\pi/4$ έχουμε ότι $\tan\theta<1$. Άρα το $\|sq\|<\|pq\|$.

Για να τελειώσουμε την απόδειξη μας έχουμε ότι:

$$
\begin{aligned}
t\|pr\|+\|rs\|+t\|sq\| &\le t\|pr\|+\|rs\|+t\|rs\|(\sin\theta+w)\\
&\le tw\|rs\|+\|rs\|+t\|rs\|(\sin\theta+w)\\
&=(1+t(\sin\theta+2w))\|rs\|\\
&=t\|pq\|-t\|pq\|+(1+t(\sin\theta+2w))\|rs\|
\end{aligned}
$$

$$\leq t\|pq\| - t\|rs\|\cos\theta + (1 + t(\sin\theta + 2w))\|rs\|$$
$$= t\|pq\| - (t(\cos\theta - \sin\theta - 2w) - 1)\|rs\|$$
$$\leq t\|pq\|$$

<u>Μια απλή εφαρμογή:</u> Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να ταξιδέψουμε από την κορυφή p προς την κορυφή q. Επιπλέον, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μια κατευθυνόμενη ακμή (r, s), τέτοια ώστε:

(i) η (r,s) να είναι σχεδόν παράλληλη στην (p, q),
(ii) το $\|rs\|$ να μην είναι πολύ μεγαλύτερο από το $\|pq\|$, και
(iii) το r είναι κοντά στο p .

Τότε το Λήμμα δηλώνει ότι έχουμε μια σύντομη διαδρομή μεταξύ του p και του q, πηγαίνοντας καταρχάς από το p προς το r, ύστερα ακολουθώντας την ακμή (r, s), και τέλος πηγαίνοντας από το s στο q.

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε τον αλγόριθμο Gap-Greedy. Αυτός ο αλγόριθμος υπολογίζει το επικαλύπτον γράφημα του οποίου οι ακμές μπορούν να χωριστούν σε ένα σταθερό αριθμό υποσυνόλων που το κάθε ένα ικανοποιεί την w ισχυρή ιδιότητα του κενού.

4. 2 Επικαλύπτον γράφημα αλγορίθμου GapGreedy

Πότε ένα κατευθυνόμενο γράφημα G έχει ένα μικρό παράγοντα επιμήκυνσης;

Υποθέτουμε ότι για οποιαδήποτε δύο διαφορετικά σημεία p και q ενός συνόλου S , υπάρχει μια ακμή (r, s) στο γράφημα G τότε:

1. τα διανύσματα $\overrightarrow{pq}$ και $\overrightarrow{rs}$ έχουν περίπου την ίδια κατεύθυνση.
2. το $\|rs\|$ δεν είναι πολύ μεγάλο σε σχέση με το $\|pq\|$

3. τουλάχιστον μία από τις αποστάσεις $\|pr\|$ και $\|qs\|$ είναι μικρές (σε σχέση με το μήκος της ακμής (r, s)) . Τότε το γράφημα G έχει ένα μικρό παράγοντα επέκτασης.

Λήμμα: Έστω θ, w και t να είναι πραγματικοί αριθμοί όπου $0<\theta<\pi/4$, $0\leq w<(\cos\theta - \sin\theta)/2$, και $t \geq 1/(\cos\theta - \sin \theta - 2w)$. Έστω S ένα σύνολο n σημείων στο επίπεδο και G = (S, E) να είναι ένα κατευθυνόμενο γράφημα, έτσι ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα: Για κάθε δύο διαφορετικά σημεία p και q του S, να υπάρχει μια ακμή (r, s) ϵ E, τέτοια ώστε:

1. η γωνία $\angle(pq, rs) \leq \theta$
2. $\|rs\| \leq \|pq\| / \cos\theta$
3. $\|pr\| \leq w\|rs\|$ και $\|qs\| \leq w\|rs\|$

τότε το γράφημα G είναι t-επικαλύπτον γράφημα για το S.

Απόδειξη:

Έστω p και q να είναι οποιαδήποτε δύο οποιαδήποτε σημεία του S. Θα δείξουμε ότι το γράφημα G περιέχει ένα t-επικαλύπτον μονοπάτι από το p στο q. Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή όσον αφορά την απόσταση $\|pq\|$ σε μία ταξινομημένη ακολουθία των αποστάσεων που καθορίζεται από όλα τα διατεταγμένα ζεύγη σημείων. Αν $\|pq\| = 0$,τότε p = q και το γράφημα G περιέχει σαφώς ένα t- επικαλύπτον μονοπάτι από το p στο q. Ας υποθέσουμε ότι $\|pq\|>0$. Επιπλέον, ας υποθέσουμε ότι για οποιαδήποτε δύο σημεία x και y του S με $\|xy\| < \|pq\|$, το γράφημα G περιέχει ένα t-επικαλύπτον μονοπάτι από το x στο y.

Έστω (r, s) να είναι μία οποιαδήποτε ακμή του E για την οποία ισχύουν και οι τρεις ιδιότητες αυτού του λήμματος. Εμείς θα εξετάσουμε την υπόθεση μόνο όταν $\|pr\| \leq w\|rs\|$. Η περίπτωση όταν $\|qs\| \leq w\|rs\|$ γίνεται συμμετρικά. Σύμφωνα με τις ιδιότητες του προηγούμενου λήμματος από την προηγούμενη ενότητα οι οποίες και πληρούνται, ακολουθούμε το λήμμα από το οποίο προκύπτει ότι: $\|pr\| < \|pq\|$, $\|sq\| < \|pq\|$ και $t\|pr\| + \|rs\| + t\|sq\| \leq t\|pq\|$

Ως εκ τούτου, από την επαγωγική υπόθεση, υπάρχουν t-επικαλύπτοντα μονοπάτια του G από έως p στο r, καθώς και από το s στο q. Ας υποθέσουμε ότι το μονοπάτι στο G ξεκινά από το p, ακολουθεί το t-επικαλύπτον μονοπάτι προς το r, τότε έχουμε την ακμή από το r στο s, και ακολουθεί τελικά το t-επικαλύπτον μονοπάτι από το s στο q. Το μήκος αυτής της διαδρομής που οροθετείται από πάνω από το $t\|pr\| + \|rs\| + t\|sq\|$, το οποίο είναι μικρότερο από ή ίσο με $t\|pq\|$.

Άρα, το γράφημα G περιέχει ένα t-επικαλύπτον μονοπάτι από το p στο q.

4.3 Ο Αλγόριθμος Gap-Greedy

Σε αυτή την ενότητα, θα δώσουμε ένα απλό άπληστο (greedy) αλγόριθμο για την κατασκευή ενός επικαλύπτοντος γραφήματος. Θα τον αποκαλούμε χάσμα-άπληστο αλγόριθμο, έτσι ώστε να το διακρίνουμε από το μονοπάτι-άπληστο αλγόριθμο (path greedy algorithm) στον οποίο δε θα αναφερθούμε εμείς εδώ.

Ο Αλγόριθμος Gap-Greedy: Ο αλγόριθμος ξεκινά με ένα κενό σύνολο E ακμών και θεωρεί ότι όλα διατεταγμένα ζεύγη διαφορετικά σημεία σε αύξουσα σειρά τους όσον αφορά τις αποστάσεις. Έστω ότι p και q σχηματίζουν ένα ζεύγος σημείων. Ο αλγόριθμος προσθέτει την ακμή (p, q) στο E, αν δεν παραβιάζεται η ισχυρή ιδιότητα του κενού. Δηλαδή, η απόφαση αν θα προστεθεί η ακμή (p, q) στο E βασίζεται στο προηγούμενο *Λήμμα:* Ακμή (p, q) προστίθεται αν και μόνο αν δεν υπάρχει ακμή (r, s) στο τρέχον σύνολο E τέτοια ώστε:

1. (p,q) και (r,s) έχουν περίπου την ίδια κατεύθυνση και
2. τουλάχιστον μία από τις αποστάσεις $\|pq\|$ και $\|qs\|$ να είναι μικρή.

Εάν υπάρχει μια τέτοια ακμή (r, s) τότε το προηγούμενο Λήμμα υποστηρίζει ότι δεν χρειάζεται να προσθέτουμε την ακμή (p, q) για να πάρουμε μια γραφική παράσταση με ένα μικρό παράγοντα επέκτασης.

<u>Αλγόριθμος 3:</u> Ο *Αλγόριθμος GapGreedy(S,θ,w)*

Σχόλιο: Αυτός ο αλγόριθμος παίρνει ως είσοδο ένα σύνολο S από n σημεία στο επίπεδο, και δύο πραγματικούς αριθμούς θ και w τέτοιοι ώστε 0 <θ <π / 4 και 0 ≤ w <(cos θ - sin θ) / 2. Η αλγόριθμος επιστρέφει ένα κατευθυνόμενο t-επικαλύπτον γράφημα G = (S, E), για t = 1 / (cos θ - sin θ - 2w).

ταξινόμηση των $2\binom{n}{2}$ διατεταγμένων ζευγών σε διακριτά σημεία σε μη-φθίνουσα σειρά σε σχέση με τις αποστάσεις τους και να τις αποθηκεύετε σε μία λίστα L:

E:=0; (κενό σύνολο για αρχή)

for each διατεταγμένο ζεύγος (p,q) є L {Θεωρούμε ότι τα ζεύγη είναι ταξινομημένα}

do add=true;

for each ακμή (r,s) є E

do if η γωνία $(pq, rs) \leq \theta$

then add := add $\wedge(\|pr\| > w\|rs\|) \wedge (\|qs\| > w\|rs\|)$

end if

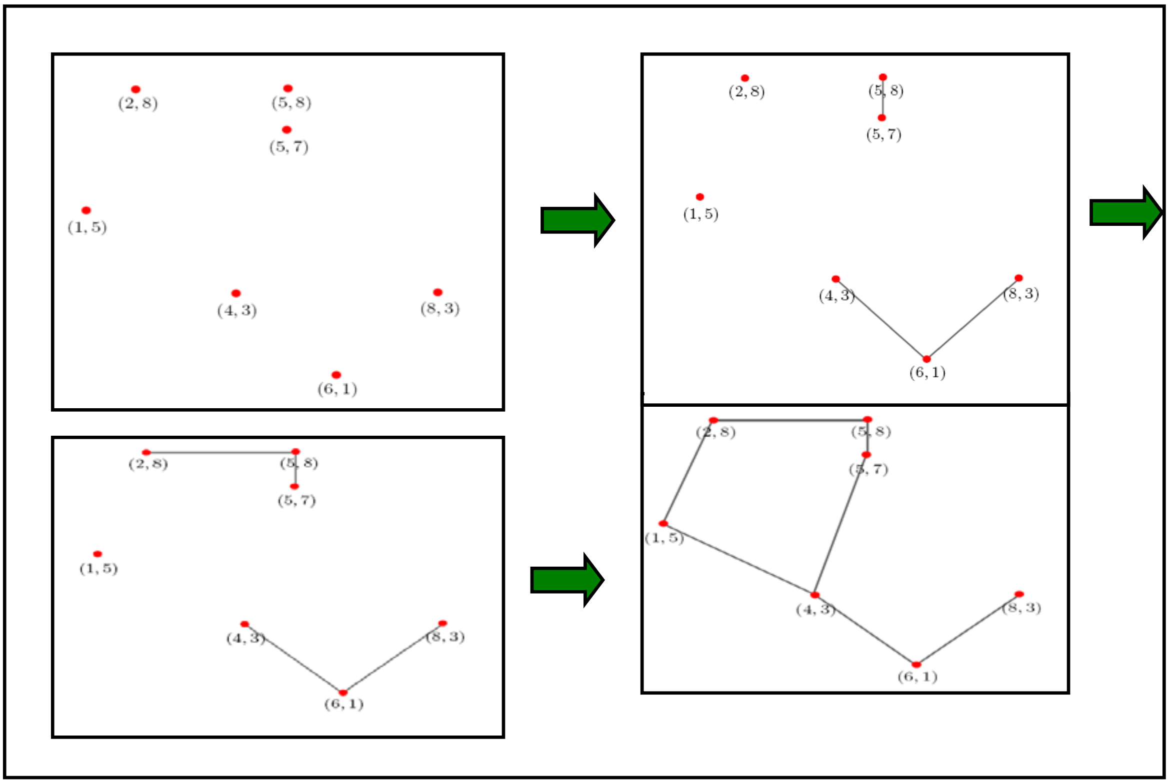
end for;

if add = true **then** E := E ∪ {(p, q)} **endif**

enf for;

επέστρεψε το γράφημα G=(S,E)

Ο αλγόριθμος GapGreedy χρειάζεται χρόνο O (n^3logn). Αυτό εξαιτίας του γεγονότος ότι χρειαζόμαστε O(n^2logn^2) = O (2 n^2logn) є O (n^2logn), για την ταξινόμηση των $2\binom{n}{2}$ є O (n^2) ζευγών. Για όλα λοιπόν τα ζευγάρια έχουμε O (n) ακμές που ανήκουν στο E. O απαιτούμενος χώρος είναι περίπου O (n^2) γιατί διατηρούμε μόνο το E και το add και το μήκος O (n^2).



Σχήμα 15: Παρουσιάζεται σχηματικά ο τρόπος δημιουργία του επικαλύπτοντος γραφήματος μέσω του αλγορίθμου Gap Greedy.

Λήμμα: Έστω θ και w να είναι πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $0 < \theta < \pi / 4$ και $0 \leq w < (\cos\theta - \sin\theta) / 2$, και έστω S είναι ένα σύνολο n σημείων στο επίπεδο. Το γράφημα G = (S, E) που επιστρέφεται από τον αλγόριθμο GapGreedy (S, θ, w) είναι μια t- επικαλύπτον γράφημα για το S, για $t = 1 / (\cos\theta - \sin\theta - 2w)$.

Απόδειξη:

Αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο Ε ικανοποιεί τις 3 προϋποθέσεις του προηγούμενου Λήμματος που έχουμε αποδείξει, αφού αυτό συνεπάγεται ότι το γράφημα G είναι t- επικαλύπτον γράφημα για το S.

Έστω p και q να είναι οποιεσδήποτε δύο διαφορετικά σημεία του S. Αν (p, q) είναι μία ακμή του E, τότε οι τρεις συνθήκες του προηγούμενου Λήμματος ισχύουν με r = p και s = q. Υποθέστε ότι η (p, q), δεν αποτελεί μία ακμή του E. Θεωρείστε ότι η επανάληψη του εξωτερικού βρόχου για τη διάρκεια του ζεύγους (p, q) έχει ελεγχθεί . Ο αλγόριθμος δεν προσθέτει την ακμή (p, q) στο σύνολο E, επειδή το σύνολο αυτό περιέχει μία ακμή (r, s), τέτοια ώστε (i) γωνία (pq, rs) ≤ θ, και (ii) τουλάχιστον ένα από τα $\|pr\|$ και $\|qs\|$ να είναι μικρότερα ή ίσα με $w\|rs\|$. Επειδή η ακμή (r, s) περιέχεται στο σύνολο E αυτή τη στιγμή κατά την οποία ο αλγόριθμος έλεγξε το ζεύγος (p, q), έχουμε $\|rs\| < \|pq\|$. Ειδικότερα, $\|rs\| < \|pq\| / \cos\theta$. Ως εκ τούτου, πληρούνται και οι τρεις προϋποθέσεις του προηγούμενου Λήμματος, άρα αποδείξαμε και αυτό το Λήμμα.

5. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. G. Narasimhan and M. Smid. *Geometric Spanner Networks*, CambridgeUniversity Press, 2007.
2. Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universityat Bonn, Sven Bendel, *The Gap-Greedy Algorithm*, November 18, 2010.
3. Ralf Waldukat, *Spanners based on the Θ-Graph,* Institut fur Informatik I, University at Bonn, November 9, 2010.
4. Ralf Waldukat, *Spanners based on the Θ-graph*, December 6, 2010.
5. Sunil Arya, Michiel Smid , *Efficient Construction of a bounded degree spanner with low weight* , May 2 ,1996.
6. Artur Czumaj and Hairong Zhao, *Fault Tolerant Geometric Spanners*, Department of Computer Science, New Jersey Institute of Technology , USA.
7. Geometric Algorithms, Lecture 10: Geometric Spanners and Well Separated Pair Decompositions.