



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΛΟΠΟΝΝΗΣΟΥ  
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ  
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ

**ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΑΠΩΛΕΙΑΣ  
ΚΛΗΣΕΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΥ ΕΥΡΟΥΣ ΖΩΝΗΣ ΣΕ ΔΙΚΤΥΑ  
ΠΟΛΥΔΙΑΣΤΑΤΗΣ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ**

**ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**ΓΙΑΝΝΑΚΟΠΟΥΛΟΥ Κ. ΓΕΩΡΓΙΟΥ του**

ΦΟΙΤΗΤΗ ΤΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ  
«ΠΡΟΗΓΜΕΝΑ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΔΙΚΤΥΑ»

**Επιβλέπων Καθηγητής: ΜΟΣΧΟΛΙΟΣ ΙΩΑΝΝΗΣ**

**ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2010**

---

---



---

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<b>Ευρετήριο σχημάτων και πινάκων</b> .....	5
<b>Πρόλογος</b> .....	7
<b>Κεφάλαιο 1 : Η θεωρία της ελαστικότητας στις τηλεπικοινωνίες</b> .....	9
1.1 Γενικά .....	9
1.2 Βελτιστοποίηση της απόδοσης στις τηλεπικοινωνίες .....	10
1.2.1 Βαθμός εξυπηρέτησης .....	10
1.2.2 Η λογική της θεωρίας ελαστικότητας στις τηλεπικοινωνίες .....	11
<b>Κεφάλαιο 2 : Υπολογισμός της απόδοσης συστημάτων απωλειών</b> .....	13
2.1 Εισαγωγή .....	13
2.2 Βασικές αρχές .....	14
2.2.1 Διαδικασία γέννησης κλήσεων .....	14
2.2.2 Χρόνος εξυπηρέτησης κλήσεων .....	15
2.2.3 Φορτίο κίνησης - Ιδιότητες .....	16
2.2.4 Συστήματα απωλειών .....	16
2.3 Μελέτη συστήματος για μονοδιάστατη κίνηση .....	18
2.3.1 Τύπος απωλειών του Erlang .....	18
2.3.2 Στατιστική ισορροπία .....	20
2.3.3 Αριθμητικό παράδειγμα 2.1 .....	21
2.4 Μελέτη συστήματος για πολυδιάστατη κίνηση .....	23
2.4.1 Γενικά .....	23
2.4.2 Αναδρομικός τύπος των Kaufman-Roberts .....	26
2.4.3 Αριθμητικό παράδειγμα 2.2 .....	27
<b>Κεφάλαιο 3 : Υπολογισμός της απόδοσης συστημάτων απωλειών που εξυπηρετούν ελαστική κίνηση</b> .....	29
3.1 Εισαγωγή .....	29
3.2 Η θεωρία ελαστικότητας για μονοδιάστατη κίνηση .....	30
3.2.1 Γενικά .....	30
3.2.2 Αριθμητικό παράδειγμα 3.1 .....	32
3.2.3 Συμπεράσματα .....	35
3.3 Η έννοια της αντιστρεψιμότητας .....	36
3.4 Η θεωρία ελαστικότητας για πολυδιάστατη κίνηση .....	39
3.4.1 Το ελαστικό μοντέλο για πολυδιάστατη κίνηση .....	39
3.4.2 Το μοντέλο του Κουκουλίδη για πολυδιάστατη κίνηση .....	40
3.4.3 Αριθμητικό παράδειγμα 3.2 .....	47

---

<b>Κεφάλαιο 4 : Υπολογιστική ανάλυση</b> .....	53
4.1 Εισαγωγή .....	53
4.2 Μοντελοποίηση του συστήματος-Αποτελέσματα .....	53
4.2.1 Περίπτωση $T=32$ .....	56
4.2.2 Περίπτωση $T=40$ .....	57
4.2.3 Περιπτώσεις $T=50,60,70,80$ .....	59
4.2.3 Διαγράμματα παραμέτρων για το ελαστικό μοντέλο .....	64
<b>Επίλογος</b> .....	68
<b>Παράρτημα Α</b> .....	71
<b>Παράρτημα Β</b> .....	80
<b>Βιβλιογραφία</b> .....	83

---

## Ευρετήριο σχημάτων και πινάκων

### ΣΧΗΜΑΤΑ

2.1	Μοντέλο M/M/s(0)	σελ.17
2.2	Διάγραμμα μεταπτώσεων των καταστάσεων του μοντέλου M/M/s(0)	σελ.21
2.3	Διάγραμμα μεταπτώσεων των καταστάσεων για σύστημα μονοδιάστατης κίνησης με C=5	σελ.22
2.4	Διάγραμμα καταστάσεων δύο κατηγοριών κλήσεων για σύστημα με C=8	σελ.24
2.5	Διάγραμμα μετάβασης καταστάσεων για σύστημα πολυδιάστατης κίνησης	σελ.24
2.6	Οριακές καταστάσεις για την κατηγορία 1	σελ.25
3.1	Διάγραμμα μεταπτώσεων των καταστάσεων για σύστημα μονοδιάστατης κίνησης με C=5 και T=7	σελ.34
3.2	Δισδιάστατο διάγραμμα μετάβασης καταστάσεων (Kolmogorov's criterion)	σελ.38
3.3	Διάγραμμα μετάβασης καταστάσεων του μοντέλου του Κουκουλίδη	σελ.42
3.4	Σύνολο $\Omega$ για σύστημα με $b_1=1$ , $b_2=2$ , C=3 και T=5	σελ.48
3.5	Διαγράμματα μετάβασης καταστάσεων παραδείγματος 3.2	σελ.49
4.1	Επίδραση του φορτίου κίνησης στην CBP <sub>1</sub> για τα διάφορα T	σελ.64
4.2	Επίδραση του φορτίου κίνησης στην CBP <sub>2</sub> για τα διάφορα T	σελ.64
4.3	Επίδραση του φορτίου κίνησης στο μέσο χρόνο εξυπηρέτησης των κλήσεων της πρώτης κατηγορίας για τα διάφορα T	σελ.65
4.4	Επίδραση του φορτίου κίνησης στο μέσο χρόνο εξυπηρέτησης των κλήσεων της δεύτερης κατηγορίας για τα διάφορα T	σελ.65
4.5	Επίδραση του φορτίου κίνησης στο μέσο αριθμό των κλήσεων της πρώτης κατηγορίας που υπάρχουν στο σύστημα για τα διάφορα T	σελ.66
4.6	Επίδραση του φορτίου κίνησης στο μέσο αριθμό των κλήσεων της δεύτερης κατηγορίας που υπάρχουν στο σύστημα για τα διάφορα T	σελ.66
4.7	Επίδραση του φορτίου κίνησης στο μέσο αριθμό των κατειλημμένων εξυπηρετητών για τα διάφορα T	σελ.67

---

## ΠΙΝΑΚΕΣ

<b>2.1</b>	Δυνατές τιμές $n$ και $j$ για σύστημα μονοδιάστατης κίνησης με $C=5$	σελ.22
<b>2.2</b>	Δυνατές τιμές $n$ και $j$ για σύστημα πολυδιάστατης κίνησης με $C=3$	σελ.28
<b>3.1</b>	Δυνατές τιμές $n$ και $j$ για σύστημα μονοδιάστατης κίνησης με $C=5$ και $T=7$	σελ.34
<b>3.2</b>	Δυνατές τιμές $n$ και $j$ για σύστημα πολυδιάστατης κίνησης με $C=3$ και $T=5$	σελ.48
<b>4.1</b>	Υπολογιστική ανάλυση συστήματος με $T=32$	σελ.56
<b>4.2</b>	Υπολογιστική ανάλυση συστήματος με $T=40$	σελ.57-58
<b>4.3</b>	Υπολογιστική ανάλυση συστήματος με $T=50,60,70,80$	σελ.59-62

---

## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Στα πλαίσια εκπόνησης της Πτυχιακής Εργασίας κατά το 3<sup>ο</sup> εξάμηνο του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών (ΠΜΣ) «Προηγμένα Τηλεπικοινωνιακά Συστήματα και Δίκτυα» του Τμήματος Επιστήμης και Τεχνολογίας Τηλεπικοινωνιών του Πανεπιστημίου Πελοποννήσου, αποφάσισα να ασχοληθώ με τη μελέτη της επίδρασης της θεωρίας ελαστικότητας στα τηλεπικοινωνιακά συστήματα.

Οι βασικές αιτίες που με οδήγησαν στην απόφασή μου αυτή ήταν αφενός το γεγονός ότι το αντίστοιχο μάθημα «Προχωρημένα Θέματα Δικτύων» του 2<sup>ου</sup> εξαμήνου μου φάνηκε ιδιαίτερα ενδιαφέρον και αφετέρου η προοπτική μελέτης και ανάλυσης μεθόδων βελτίωσης της απόδοσης των τηλεπικοινωνιακών συστημάτων μου φάνηκε εξαιρετικά ελκυστική. Η όλη μελέτη της εργασίας αναπτύσσεται σε 4 κεφάλαια και 2 παραρτήματα ως εξής :

Στο 1<sup>ο</sup> Κεφάλαιο, αναφέρονται οι γενικές αρχές της θεωρίας της ελαστικότητας και η εφαρμογή της στις τηλεπικοινωνίες ως τεχνικής για τη βελτίωση των παρεχόμενων υπηρεσιών. Στο 2<sup>ο</sup> Κεφάλαιο, μελετώνται τα τηλεπικοινωνιακά συστήματα απωλειών για μονοδιάστατη και πολυδιάστατη τυχαία κίνηση. Περιγράφεται στατιστικά η τυχαία κίνηση που διέπει την ανάλυση τέτοιων συστημάτων και τελικά καταλήγουμε στις δυο σημαντικότερες φόρμουλες, την Erlang B για μονοδιάστατη κίνηση και την αναδρομική φόρμουλα των Kaufman – Roberts για πολυδιάστατη κίνηση, που παρέχουν την πιθανότητα απώλειας μιας κλήσης, δεδομένων των παραμέτρων του συστήματος και των απαιτήσεων των συνδρομητών.

Με το 3<sup>ο</sup> Κεφάλαιο ξεκινά η μελέτη των συστημάτων ελαστικής κίνησης. Παρουσιάζεται αναλυτικά η συλλογιστική της ελαστικής θεωρίας σε συστήματα μονοδιάστατης τηλεπικοινωνιακής κίνησης και μέσω αριθμητικού παραδείγματος καταδεικνύεται η ωφέλιμη επίδραση της, εν συγκρίσει με την αντίστοιχη μέθοδο Erlang B του 2<sup>ου</sup> κεφαλαίου. Ακολούθως η μελέτη επεκτείνεται σε πολυδιάστατη κίνηση. Αναφέρονται οι λόγοι για τους οποίους το ελαστικό μοντέλο για πολυδιάστατη κίνηση δεν μπορεί να εκφραστεί μέσω αναδρομικής σχέσης και εν συνεχεία παρουσιάζεται το αναλυτικό μοντέλο του Κουκουλίδη που προσεγγίζει το ελαστικό. Ακολούθως, μέσω αριθμητικού παραδείγματος καταδεικνύονται αφενός το πόσο ικανοποιητική είναι η ανωτέρω προσέγγιση αφετέρου η επίδραση της ελαστικής

---

θεωρίας σε συστήματα πολυδιάστατης κίνησης. Τέλος στο 4<sup>ο</sup> Κεφάλαιο πραγματοποιείται μια αριθμητική προσέγγιση των παραπάνω μοντέλων, ενώ αναλύονται και τα αποτελέσματα, παρέχοντας χρήσιμα συμπεράσματα.

Στα Παραρτήματα παρουσιάζονται οι κώδικες προγραμματισμού των μαθηματικών εκφράσεων (σε MATLAB) αλλά και της προσομοίωσης (σε γλώσσα SIMSCRIPT Π.5) των διαφόρων μοντέλων απωλειών, καθώς και ορισμένα σχόλια που θα βοηθήσουν στην κατανόηση της συλλογιστικής. Στον επισυναπτόμενο οπτικό δίσκο (CD) περιλαμβάνονται, πέραν της εργασίας σε ηλεκτρονική μορφή, αυτούσιοι οι κώδικες (χωρίς τα σχόλια).

Στο σημείο αυτό, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα της εργασίας μου, Λέκτορα του Πανεπιστημίου Πελοποννήσου, Δρα Ιωάννη Μοσχολιό για την πολύτιμη αρωγή του. Ήταν αυτός που με μύησε στη Θεωρία της Τηλεπικοινωνιακής Κίνησης (teletraffic theory), που με στήριξε ηθικά και πρακτικά στις δυσκολίες που παρουσιάστηκαν κατά την εκπόνηση της εργασίας μου, ήταν αυτός χωρίς τη βοήθεια του οποίου αυτή η εργασία δε θα υπήρχε. Επίσης θέλω να ευχαριστήσω το συμφοιτητή μου στο ΠΜΣ κο Κ. Πουλουπάτη για τη συμπαράσταση και τις πολύτιμες συμβουλές του όσον αφορά την υλοποίηση των υπολογιστικών εκφράσεων στον Η/Υ.



---

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## Η θεωρία της ελαστικότητας στις τηλεπικοινωνίες

### 1. Γενικά

Η παρουσία της θεωρίας της ελαστικότητας αποτελεί μια πρόκληση στη δημιουργία μοντέλων τηλεπικοινωνιακής κίνησης για την βελτιστοποίηση και την αξιολόγηση του άκρως ετερογενούς περιβάλλοντος των τηλεπικοινωνιακών δικτύων. Τα αναπτυσσόμενα τηλεπικοινωνιακά μοντέλα απωλειών απαρτίζονται από εκθετικές και παραγοντικές έννοιες με αποτέλεσμα να περιορίζεται το εύρος εφαρμογής των μόνο σε μικρά συστήματα. Ωστόσο, η ανάπτυξη ενός αναδρομικού μοντέλου τηλεπικοινωνιακής κίνησης μπορεί να καταστεί ιδιαίτερα αποτελεσματική σε συστήματα με μεγάλη χωρητικότητα. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον αποτελεί η μελέτη της τηλεπικοινωνιακής κίνησης που προέρχεται από πεπερασμένες πηγές στο περιβάλλον των ασύρματων δικτύων λόγω της έλλειψης σε αυτά συχνοτήτων/εύρους ζώνης. Βασικός στόχος είναι η δημιουργία ενός αποδοτικού ελαστικού τηλεπικοινωνιακού μοντέλου για την εφαρμογή του κυρίως σε περιπτώσεις όπου το εύρος ζώνης είναι περιορισμένο.

Το τηλεπικοινωνιακό μοντέλο που παρουσιάζεται στην παρούσα εργασία βασίζεται στην εφαρμογή της ελαστικής θεωρίας τόσο σε συστήματα μονοδιάστατης κίνησης όσο και σε συστήματα πολυδιάστατης κίνησης τα οποία ακολουθούν τη συλλογιστική των διαδεδομένων τύπων των Erlang (Erlang B Formula) και Kaufman-Roberts αντίστοιχα. Κατόπιν θα γίνει έλεγχος του κατά πόσο τα αποτελέσματα του ελαστικού αυτού μοντέλου προσεγγίζονται από τον αναδρομικό τύπο του Κουκουλίδη ο οποίος αποτελεί επέκταση του αναδρομικού τύπου των Kaufman-Roberts και προσδιορίζει με προσεγγιστικό τρόπο την πιθανότητα απώλειας κλήσης για ελαστική κίνηση. Για τον έλεγχο αυτό και για καλύτερη κατανόηση θα παρατεθεί και αντίστοιχο αριθμητικό παράδειγμα. Η παρουσίαση των τύπων των Erlang και Kaufman-Roberts γίνεται στο 2<sup>ο</sup> κεφάλαιο ενώ στο 3<sup>ο</sup> κεφάλαιο παρουσιάζεται εκτενώς ο αναδρομικός τύπος του Κουκουλίδη.

---

## 2. Βελτιστοποίηση της Απόδοσης στις Τηλεπικοινωνίες

Η ευρύτατη διάδοση και χρήση, όπως και ο ανταγωνισμός που διέπει τα συστήματα επικοινωνιών, είτε αυτά σχετίζονται με την κλασική τηλεφωνία, είτε με ροές δεδομένων, είτε ακόμα και με ασύρματα συστήματα, είναι πλέον γεγονός αδιαμφισβήτητο. Σε ένα τέτοιο ανταγωνιστικό πλαίσιο, είναι συνεχής η προσπάθεια των φορέων – παρόχων επικοινωνίας να βελτιώσουν κατά το δυνατόν περισσότερο τις προσφερόμενες υπηρεσίες. Τελικό ζητούμενο είναι πάντοτε η μεγιστοποίηση της ωφέλειας που αποκομίζουν οι συνδρομητές.

Στη λογική αυτή, είναι καταρχήν απαραίτητος ο καθορισμός της ωφέλειας του συνδρομητή και εν συνεχεία η εφαρμογή τεχνικών που θα εγγυώνται τη μεγιστοποίηση αυτής. Αυτό εν πολλοίς είναι το αντικείμενο της Θεωρίας Τηλεπικοινωνιακής Κίνησης.

### 1. Βαθμός Εξυπηρέτησης

Η σχεδίαση ενός τηλεπικοινωνιακού συστήματος βασίζεται στην αντιμετώπιση της κίνησης κατά την ώρα αιχμής (busy hour). Για παράδειγμα οι κλήσεις που πραγματοποιούνται τις μεταμεσονύκτιες ώρες μιας ημέρας είναι σημαντικά λιγότερες από αυτές που θα απαιτηθεί να διεκπεραιώσει ένα σύστημα κατά την διάρκεια της ώρας αιχμής. Ως εκ τούτου, η επιλογή του αριθμού των εξυπηρετητών της τηλεπικοινωνιακής κίνησης, με την ευρεία έννοια, από PBXs μέχρι WDM MUXs, θα πρέπει να είναι τέτοια που θα επαρκεί για τις εκάστοτε ανάγκες. Σε ένα τηλεφωνικό κέντρο είναι θεωρητικώς δυνατόν όλοι οι συνδρομητές να κάνουν κλήσεις την ίδια χρονική στιγμή. Ωστόσο, το κόστος ικανοποίησης μιας τέτοιας απαίτησης αφ' ενός είναι μεγάλο, αφ' ετέρου η πιθανότητα να συμβεί είναι αμελητέα. Αυτό που συχνά συμβαίνει είναι όλες οι γραμμές (trunks) του συστήματος να είναι κατειλημμένες και επομένως το σύστημα να μην μπορεί να δεχθεί άλλες κλήσεις, φαινόμενο το οποίο καλείται συμφόρηση (congestion). Όταν υπάρχει συμφόρηση και η εισερχόμενη κλήση μπλοκάρεται και εγκαταλείπει το σύστημα, το σύστημα καλείται σύστημα απωλειών. Το ποσοστό των κλήσεων που χάνονται λόγω συμφόρησης αποτελεί ένα δείκτη της ποιότητας εξυπηρέτησης που παρέχεται από το τηλεπικοινωνιακό σύστημα. Το ποσοστό αυτό καλείται Βαθμός Εξυπηρέτησης (grade of service – GoS) και για ένα σύστημα απωλειών ορίζεται ως:

---

$$B = \frac{\text{Συνολικός Αριθμός Κλήσεων που Αποκλείονται}}{\text{Συνολικός Αριθμός Κλήσεων που Προσφέρονται στο Σύστημα}}$$

Ο ορισμός αυτός παραπέμπει στον ορισμό της πιθανότητας απόρριψης κλήσεων (Call Blocking Probability – **CBP**) όπου μια κλήση που καταφθάνει στο σύστημα και δεν βρίσκει τους απαιτούμενους πόρους για να εξυπηρετηθεί, απορρίπτεται τελικά από αυτό [1]. Η πιθανότητα απώλειας κλήσεων αποτελεί το δείκτη αποδοτικότητας των τηλεπικοινωνιακών συστημάτων ενώ ο αποτελεσματικός υπολογισμός της είναι αναγκαίος για τη μελέτη των συστημάτων αυτών. Προφανώς, όσο μικρότερος είναι ο Βαθμός Εξυπηρέτησης, τόσο καλύτερη είναι η επίδοσή του συστήματος. Είναι λογικό να υποθέσουμε ότι για συγκεκριμένο αριθμό προσφερόμενων κλήσεων στο σύστημα, ο Βαθμός Εξυπηρέτησης μειώνεται, άρα η επίδοση του συστήματος αυξάνεται, όσο περισσότερο αυξάνονται οι πόροι του συστήματος. Στον αντίποδα αυτών των διαπιστώσεων, παρατίθεται το κόστος των πόρων, είτε αυτοί αναφέρονται ως απαίτηση επέκτασης του δικτύου, είτε ως αύξηση του εξοπλισμού. Επομένως, το αντικείμενο της Θεωρίας Τηλεπικοινωνιακής Κίνησης ανάγεται στην ελαχιστοποίηση του GoS υπό παραδεκτό κόστος πόρων. Υπάρχουν διάφορες μέθοδοι που έχουν διερευνηθεί κατά καιρούς για την μείωση του GoS ενός τηλεπικοινωνιακού συστήματος ανάλογα με το είδος της κίνησης που πρόκειται να εξυπηρετήσει (elastic traffic, adaptive traffic etc). Στην παρούσα εργασία θα μελετηθεί η θεωρία της ελαστικότητας (elastic theory) η οποία πραγματεύεται την περίπτωση ενός τηλεπικοινωνιακού συστήματος που εξυπηρετεί ελαστική κίνηση (elastic traffic).

## 2. Η Λογική της θεωρίας ελαστικότητας στις Τηλεπικοινωνίες

Μια νέα κλήση κατά την τυχαία άφιξη της σε ένα τηλεπικοινωνιακό σύστημα, έχει μια αρχική (υψηλή) απαίτηση σε εύρος ζώνης. Αν αυτό το εύρος ζώνης είναι διαθέσιμο τότε η κλήση γίνεται δεκτή στο σύστημα. Διαφορετικά, τόσο η νέα κλήση όσο και οι κλήσεις που εξυπηρετούνται συμπιέζουν το εύρος ζώνης τους προκειμένου η νέα κλήση να γίνει τελικά δεκτή στο σύστημα. Η συμπίεση αυτή οδηγεί σε αύξηση του χρόνου εξυπηρέτησης όλων των κλήσεων έτσι ώστε το γινόμενο (εύρος ζώνης) x (χρόνος εξυπηρέτησης) να διατηρείται σταθερό. Ωστόσο, ένα εύλογο ερώτημα που μπορεί να δημιουργηθεί είναι το κατά πόσο μπορούν οι κλήσεις να υποστούν συμπίεση του εύρους ζώνης τους ώστε η αύξηση του χρόνου εξυπηρέτησης τους να είναι ανεκτή. Η απάντηση στο ερώτημα αυτό δίνεται στο 4<sup>ο</sup> κεφάλαιο μέσω των αποτελεσμάτων της προσομοίωσης του μοντέλου. Οι κλήσεις που είναι σε θέση να

---

μειώσουν το εύρος ζώνης τους με παράλληλη αύξηση του χρόνου εξυπηρέτησης τους, συνθέτουν τη λεγόμενη ελαστική κίνηση (π.χ. μεταφορά αρχείων – file transfer). Στην περίπτωση τώρα που εξυπηρετηθεί μία κλήση με συνέπεια την αποδέσμευση εύρους ζώνης, τότε αυτό μοιράζεται σε όλες τις κλήσεις του συστήματος που έχουν υποστεί συμπίεση και μάλιστα αναλογικά με την αρχική τους απαίτηση σε εύρος ζώνης.

Συμπερασματικά, γίνεται φανερό και σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό του GoS, ότι η χρήση ελαστικών μοντέλων τηλεπικοινωνιακής κίνησης μπορεί να αποδειχθεί ιδιαίτερα χρήσιμη καθώς μειώνεται ο συνολικός αριθμός των αποκλεισμένων κλήσεων και επομένως μειώνεται ο βαθμός εξυπηρέτησης που σημαίνει και βελτίωση της επίδοσης του συστήματος.

---

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

### Υπολογισμός της απόδοσης συστημάτων απωλειών

#### 1. Εισαγωγή

Όπως αναφέρθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, η παράμετρος GoS που χαρακτηρίζει την επίδοση ενός συστήματος σχετίζεται αφενός με τη στατιστική υφή της ζήτησης πόρων και του χρόνου κατάληψης αυτών, και αφετέρου με τους πόρους αυτούς καθαυτούς. Επιπλέον δόθηκε ο ορισμός του GoS, ως

$$B = \frac{\text{Συνολικός Αριθμός Κλήσεων που Αποκλείονται}}{\text{Συνολικός Αριθμός Κλήσεων που Προσφέρονται στο Σύστημα}}$$

ο οποίος και παραπέμπει στον ορισμό της πιθανότητας μια κλήση που καταφθάνει στο σύστημα και απαιτεί πόρους για να εξυπηρετηθεί να αποκλείεται τελικά από αυτό λόγω έλλειψης διαθέσιμων πόρων.

Όπως λοιπόν γίνεται φανερό κρίνεται αναγκαίος ο υπολογισμός αυτής της πιθανότητας, δεδομένων της χωρητικότητας του συστήματος, των απαιτήσεων των κλήσεων σε εύρος ζώνης (εξυπηρετητές), του ρυθμού άφιξης και του ρυθμού εξυπηρέτησης των κλήσεων στο σύστημα. Αρχικά, θα εξεταστεί η μεθοδολογία για τον υπολογισμό της πιθανότητας απώλειας κλήσης σε ένα σύστημα απωλειών όπου οι κλήσεις έχουν την ίδια απαίτηση σε αριθμό εξυπηρετητών (μονοδιάστατη κίνηση) ενώ η άφιξη τους στο σύστημα είναι τυχαία. Θα αναλυθεί η συλλογιστική, καθώς και η Erlang B Formula, που αποτελεί τον ευρύτερα διαδεδομένο τρόπο υπολογισμού της πιθανότητας απώλειας κλήσης σε ένα σύστημα απωλειών μονοδιάστατης τυχαίας κίνησης. Ακολούθως θα αναλυθεί ο ακριβής και αναδρομικός τύπος των Kaufman–Roberts, που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της πιθανότητας απώλειας κλήσης σε ένα σύστημα απωλειών όπου οι κλήσεις έχουν διαφορετικές απαιτήσεις σε αριθμό εξυπηρετητών (πολυδιάστατη κίνηση) και φθάνουν στο σύστημα με τυχαίο τρόπο. Είναι λογικό να εξεταστεί ένα τέτοιο σύστημα, δεδομένου ότι τα σύγχρονα δίκτυα εξυπηρετούν πολλές κατηγορίες κίνησης, από την κλασική τηλεφωνία, μέχρι streaming video και από μεταφορά δεδομένων μέχρι αποστολή μηνυμάτων SMS

---

μέσω των κινητών τηλεφώνων. Οι διάφορες κατηγορίες κλήσεων έχουν αφενός διαφορετικές απαιτήσεις σε εύρος ζώνης αφετέρου είναι δυνατό να ανταγωνίζονται για το διαθέσιμο εύρος ζώνης του συστήματος. Τέλος θα δοθούν αριθμητικά παραδείγματα εφαρμογής των παραπάνω τύπων τα οποία και θα χρησιμοποιηθούν ως μέτρο σύγκρισης με το αντίστοιχο ελαστικό τηλεπικοινωνιακό μοντέλο που αναπτύσσεται στο 3<sup>ο</sup> κεφάλαιο.

## 2. Βασικές αρχές

Πριν την παρουσίαση των μαθηματικών τύπων του Erlang και των Kaufman-Roberts είναι αναγκαίο να παρατεθούν κάποιες βασικές αρχές στις οποίες βασίζεται η ανάλυση των δύο παραπάνω μοντέλων τηλεπικοινωνιακής κίνησης:

### 1. Διαδικασία γέννησης κλήσεων

Απαραίτητη προϋπόθεση για την εύρεση της CBP κατά την ανάλυση των τηλεπικοινωνιακών μοντέλων, αποτελεί η θεώρηση της κίνησης ως τυχαίας. Λέμε ότι μια κλήση φθάνει **τυχαία** στο τηλεφωνικό κέντρο όταν ισχύουν:

Σε οποιοδήποτε χρονικό διάστημα  $\Delta t$ , τείνοντος στο μηδέν ( $\Delta t \rightarrow 0$ ) [1]:

1. Η πιθανότητα  $P_1(\Delta t)$  ότι μια κλήση θα γεννηθεί σε χρονικό διάστημα  $\Delta t$ , δηλ. στο  $(t, t+\Delta t]$ , τείνει στο  $\lambda \Delta t$ , ανεξάρτητα από τον χρόνο  $t$ , όπου  $\lambda$  είναι σταθερός αριθμός.
2. Η πιθανότητα  $P_{2+}(\Delta t)$  ότι δύο ή περισσότερες κλήσεις γεννώνται εντός χρονικού διαστήματος  $\Delta t$ , δηλ. εντός του  $(t, t+\Delta t]$ , τείνει στο μηδέν.
3. Οι κλήσεις γεννώνται ανεξάρτητα η μία από την άλλη.

Όταν ισχύουν τα ανωτέρω τρία αξιώματα, τότε αποδεικνύεται ότι ο αριθμός των κλήσεων που θα φθάσουν π.χ. σε ένα τηλεφωνικό κέντρο ακολουθεί την κατανομή Poisson. Δηλαδή η πιθανότητα να έχουμε  $k$  αφίξεις κλήσεων εντός ενός χρονικού διαστήματος  $t$  δίνεται από την σχέση:

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \quad (2.1)$$

---

όπου  $\lambda$  είναι η σταθερά του αξιώματος (1) και εκφράζει την μέση τιμή του ρυθμού αφίξεως των κλήσεων στην μονάδα του χρόνου. Το γινόμενο  $\lambda * t$  εκφράζει την μέση τιμή του αριθμού των αφίξεων εντός του χρονικού διαστήματος  $t$ . Η σχέση αυτή λέγεται κατανομή Poisson (ονομάζεται κατανομή πιθανοτήτων διότι μας δίνει την πιθανότητα για όλες τις τιμές του  $k$ ,  $k=0,1,2,3,\dots$ ) και αυτή πλέον θα χρησιμοποιηθεί για την μοντελοποίηση της τυχαίας άφιξης της κλήσης.

## 2. Χρόνος εξυπηρέτησης κλήσεων

Ο χρόνος εξυπηρέτησης κλήσης είναι ένα μέγεθος το οποίο πρέπει να καθοριστεί επαρκώς καθώς δηλώνει το χρόνο για τον οποίο οι πόροι του συστήματος που απαιτεί μια κλήση είναι κατειλημμένοι και επομένως μη διαθέσιμοι για τις τυχόν νέες κλήσεις κατά το διάστημα αυτό. Αρχική θεώρηση αποτελεί ότι η κλήση τερματίζεται τυχαία. Αρχίζοντας τη μέτρηση του χρόνου από τη στιγμή που μία κλήση αρχίζει να εξυπηρετείται, η πιθανότητα να εξυπηρετηθεί η κλήση αυτή σε διάστημα  $(t, t+\Delta t)$  είναι  $\mu * \Delta t$  ανεξάρτητα από το  $t$ , όπως προκύπτει από την υπόθεση του τυχαίου τερματισμού της κλήσεως. Ως  $\mu$  ορίζεται ο ρυθμός εξυπηρέτησης των κλήσεων στην μονάδα του χρόνου. Η συμπληρωματική συνάρτηση κατανομής  $H(t)$ , δηλαδή η πιθανότητα ότι ο χρόνος εξυπηρέτησης είναι μεγαλύτερος από  $t$ , ισούται με την πιθανότητα ότι η κλήση δεν θα τερματιστεί σε διάστημα  $[0, t]$ . Επιμερίζοντας το χρονικό διάστημα  $[0, t]$  σε ένα αρκετά μεγάλο αριθμό υπό-διαστημάτων όπου  $\Delta t = t/n$ , αφού η εν λόγω πιθανότητα ισούται με  $(1 - \mu \Delta t)$ , καθώς  $n > \infty$ , η συμπληρωματική συνάρτηση κατανομής  $H(t)$  δίνεται από τη σχέση [1]:

$$H(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\mu * t}{n}\right)^n = e^{-\mu t} \quad (2.2)$$

Με παρόμοιο τρόπο προκύπτει πως ο χρόνος εξυπηρέτησης είναι εκθετικά κατανομημένος και ίσος με  $1/\mu$ . Επιπλέον ισχύει πως το  $1/\mu$  είναι σταθερό σε όλη τη διάρκεια μελέτης του συστήματος και σε χρονικό διάστημα ίσο με  $1/\mu$  είναι δυνατή η εξυπηρέτηση μιας μόνο κλήσης. Η τελευταία έκφραση σημαίνει ότι αν σε χρόνο  $t$  υπάρχουν  $k$  κλήσεις στο σύστημα, σε ένα διάστημα πολύ μικρό  $\Delta t$  οι κλήσεις θα είναι τουλάχιστον  $k-1$ . Πράγματι, αν στο σύστημα υπάρχουν  $k$  κλήσεις, τότε σε ένα πολύ μικρό  $\Delta t$  μπορεί είτε να γεννηθεί μια κλήση, είτε να εξυπηρετηθεί μια κλήση και να αποχωρήσει, είτε τίποτε από τα δύο. Άρα ο μικρότερος αριθμός κλήσεων που θα έχουν απομείνει στο σύστημα θα είναι  $k-1$ .

---

### 3. Φορτίο κίνησης - Ιδιότητες

Φορτίο κίνησης  $\alpha$  (traffic load) ορίζεται ως η συνολική διάρκεια όλων των κλήσεων σε ένα σύστημα εντός ενός χρονικού διαστήματος [1]. Από τον ορισμό του φορτίου κίνησης γίνεται φανερό ότι η τηλεπικοινωνιακή κίνηση είναι αδιάστατο μέγεθος. Ωστόσο προς τιμήν του Δανού μαθηματικού A.K.Erlang, ιδρυτή της τηλεπικοινωνιακής κίνησης, ως μονάδα μέτρησης του φορτίου ορίζεται το **Erlang (erl)**. Το 1 erlang ως χρόνο αναφοράς έχει την μία ώρα. Το φορτίο κίνησης χαρακτηρίζεται από τις ακόλουθες ιδιότητες [1]:

- Αν  $c$  ο αριθμός των κλήσεων που φθάνουν σε ένα τηλεπικοινωνιακό σύστημα και  $1/\mu$  (όπως αναφέρθηκε παραπάνω) είναι η μέση διάρκεια τους, τότε το φορτίο κίνησης  $\alpha$  δίνεται από την σχέση:  
$$\alpha = c * 1/\mu \text{ (erl)}$$
- Το φορτίο κίνησης ισούται προς τον αριθμό των κλήσεων που καταφθάνουν σε ένα τηλεπικοινωνιακό σύστημα εντός χρονικού διαστήματος ίσου προς τη μέση τιμή της διάρκειας των.
- Το φορτίο κίνησης που διεκπεριώνεται από μία γραμμή μόνο, είναι ισοδύναμο με την πιθανότητα ότι η γραμμή χρησιμοποιείται (ποσοστό του χρόνου που η γραμμή είναι κατειλημμένη). Επομένως μία γραμμή μπορεί να μεταφέρει το πολύ 1 erl (αφού η μέγιστη τιμή πιθανότητας είναι 1).
- Το φορτίο κίνησης που διεκπεριώνεται από μία δέσμη γραμμών είναι ισοδύναμο με τον μέσο αριθμό κατειλημμένων γραμμών της δέσμης.

Από τις ιδιότητες αυτές του φορτίου κίνησης και από τους παραπάνω ορισμούς για το  $\lambda$  και το  $\mu$  προκύπτει πως  $\alpha = \lambda/\mu$ .

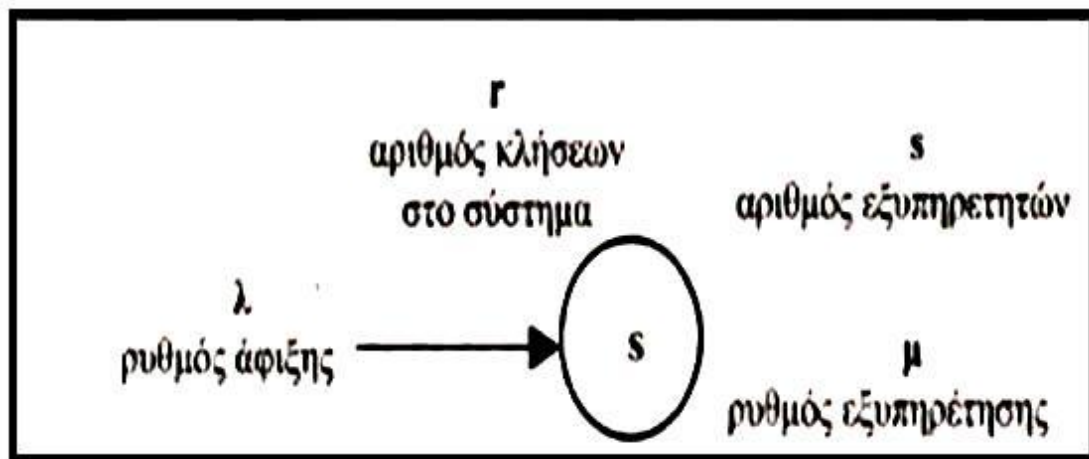
### 4. Συστήματα Απωλειών

Ένα μοντέλο στο οποίο ο χρόνος άφιξης και ο χρόνος εξυπηρέτησης των κλήσεων ακολουθούν εκθετική κατανομή καλείται Μαρκοβιανό μοντέλο. Η εφαρμογή τέτοιων μοντέλων μας βοηθάει στην πλήρη ανάλυση των συστημάτων απωλειών τα οποία από εδώ και στο εξής θα καλούνται Μαρκοβιανά συστήματα απωλειών [6].

Θεωρούμε ένα σύστημα απωλειών στο οποίο εξυπηρετούνται κλήσεις με τυχαία στατιστικά χαρακτηριστικά. Το σύστημα αποτελείται από πεπερασμένο αριθμό



εξυπηρετητών ( $s$  – servers) στους οποίους οι νέες κλήσεις έχουν πλήρη πρόσβαση. Αυτό σημαίνει ότι όποια νέα κλήση βρίσκει ελεύθερους τους απαιτούμενους πόρους που χρειάζεται για να εξυπηρετηθεί, τους δεσμεύει και εξυπηρετείται. Τέτοια συστήματα καλούνται συστήματα πλήρους διάθεσης (complete sharing systems). Όταν οι εισερχόμενες κλήσεις βρίσκουν όλους τους εξυπηρετητές απασχολημένους, εγκαταλείπουν αμέσως το σύστημα χωρίς να επηρεάζουν τις κλήσεις που ήδη εξυπηρετούνται. Το εν λόγω σύστημα συμβολίζεται κατά Kendall ως  $M/M/s(0)$  όπου, ο πρώτος όρος  $M$  (Markov) εκφράζει την εκθετική κατανομή πιθανότητας των χρονικών διαστημάτων μεταξύ των διαδοχικών αφίξεων, ο δεύτερος όρος  $M$  (Markov) εκφράζει την εκθετική κατανομή του χρόνου εξυπηρέτησης των κλήσεων και ο τρίτος όρος  $s(0)$  σημαίνει ότι δεν υπάρχει ουρά αναμονής στο σύστημα. Τέλος, σύμφωνα με τα παραπάνω θεωρούμε ότι πρώτον ο ρυθμός άφιξης κλήσεων είναι σταθερός και ίσος με  $\lambda$  στη μονάδα του χρόνου, δεύτερον ο ρυθμός εξυπηρέτησης είναι σταθερός και ίσος με  $\mu$ , τρίτον ο αριθμός των εξυπηρετητών στο σύστημα είναι ίσος με  $s$  και τέταρτον συμβολίζουμε τον αριθμό των υπαρχουσών κλήσεων στο σύστημα ως  $r$ .



Σχήμα 2.1 Μοντέλο  $M/M/s(0)$ . [1]

---

### 3. Μελέτη συστήματος για μονοδιάστατη κίνηση

#### 1. Τύπος απωλειών του Erlang

Θεωρούμε ένα σύστημα απωλειών αντίστοιχο με αυτό της προηγούμενης παραγράφου όπως φαίνεται στο σχήμα 2.1 . Έστω  $N(t)$  ο αριθμός των κλήσεων στο σύστημα σε χρόνο  $t$ , και έστω ότι δεν υπάρχουν καταστάσεις όπου δύο ή περισσότερες κλήσεις ξεκινούν ή τερματίζουν σε  $(t, t+\Delta t]$  όταν  $\Delta t \rightarrow 0$  ( δηλαδή ή μόνο μία κλήση καταφθάνει στο σύστημα σε αυτό το χρονικό διάστημα ή μία κλήση τερματίζεται εντός αυτού του χρονικού διαστήματος ή καμία κλήση δεν καταφθάνει και καμία δεν τερματίζεται εντός του χρονικού διαστήματος αυτού). Τότε το γεγονός  $\{N(t+\Delta t)=r\}$  προκύπτει από μία από τις παρακάτω περιπτώσεις [1]:

- A)  $N(t) = r$  και καμία κλήση δεν καταφθάνει ή τερματίζεται στο διάστημα  $(t, t+\Delta t]$ .
- B)  $N(t) = r-1$  και μία κλήση καταφθάνει στο διάστημα  $(t, t+\Delta t]$ .
- C)  $N(t) = r+1$  και μία κλήση τερματίζεται στο διάστημα  $(t, t+\Delta t]$ .

Γνωρίζοντας ότι η πιθανότητα μία κλήση να τερματιστεί στο διάστημα  $(t, t+\Delta t]$  με  $r$  κλήσεις να εξυπηρετούνται, είναι  $r\mu\Delta t$  και με την υπόθεση πως  $P_r(t) = P\{N(t) = r\}$ , οι πιθανότητες των τριών παραπάνω περιπτώσεων είναι η εξής :

- $P\{A\} = P_r(t) \cdot (1 - \lambda \Delta t - r \mu \Delta t)$
  - $P\{B\} = P_{r-1}(t) \cdot \lambda \Delta t$
  - $P\{C\} = P_{r+1}(t) \cdot (r+1) \mu \Delta t$
- (2.3)

Είναι προφανές ότι η συνολική πιθανότητα να υπάρχουν  $r$  κλήσεις στο σύστημα κατά το χρονικό διάστημα  $(t, t+\Delta t]$  είναι το άθροισμα των παραπάνω πιθανοτήτων :

$$P_r(t+\Delta t) = P_r(t) \cdot [P_{r-1}(t) \cdot \lambda - (\lambda + r \mu) \cdot P_r(t) + (r+1) \mu \cdot P_{r+1}(t)] \cdot \Delta t \quad (2.4)$$

Από την (2.4) με διαίρεση ως προς  $\Delta t$  παίρνουμε την διαφορική εξίσωση :

$$dP_r(t)/dt = P_{r-1}(t) \cdot \lambda - (\lambda + r \mu) \cdot P_r(t) + (r+1) \mu \cdot P_{r+1}(t) \quad (2.5)$$

$$\text{όπου } dP_r(t)/dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{Pr(t+\Delta t) - Pr(t)}{\Delta t}$$

Πρακτικά, αυτό που μας ενδιαφέρει είναι η μόνιμη κατάσταση του συστήματος ύστερα από αρκετό χρονικό διάστημα. Είναι γνωστό πως αν υπάρχει μόνιμη

κατάσταση, υπάρχει και μία μοναδική οριακή πιθανοτική κατανομή  $\{P_r\}$  όπως για  $t \rightarrow \infty$  :

$$P_r(t) \rightarrow P_r, \{dP_r(t)/dt\} \rightarrow 0$$

ανεξάρτητα από την αρχική κατάσταση. Αυτό καλείται στατιστική ισορροπία (statistical equilibrium) και το  $P_r$  ονομάζεται **πιθανότητα μόνιμης κατάστασης**. Στη σταθερή λοιπόν κατάσταση, εφόσον  $dP_r(t)/dt = 0$ , από τη (2.5) προκύπτει η λεγόμενη **εξίσωση κατάστασης ισορροπίας (equilibrium state equation)**.

$$P_{r-1} \cdot \lambda - (\lambda + r \cdot \mu) \cdot P_r + (r+1) \cdot \mu \cdot P_{r+1} = 0 \quad \text{με } r = 0, 1, \dots, s \quad (2.6)$$

Παρατηρώντας την σχέση (2.6) γίνεται αντιληπτό ότι οι πιθανότητες των καταστάσεων  $r-1, r, r+1$  δεν εξαρτώνται πλέον από το χρόνο καθώς  $t \rightarrow \infty$ .

Ορίζοντας τώρα ως  $\alpha = \lambda/\mu$  και θεωρώντας ότι  $P_i = 0$  για  $i = -1$  και για  $i = s+1$  μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση (2.6) αθροίζοντας κατά μέλη τις σχέσεις που προκύπτουν για  $r=0$  έως  $r=i-1$ . Το αποτέλεσμα της άθροισης αυτής είναι η παρακάτω αναδρομική σχέση :

$$P_i = (\alpha^i / i!) \cdot P_0 \quad \text{με } i = 1, 2, \dots, s \quad (2.7)$$

Εφαρμόζοντας την (2.7) για τις διαδοχικές τιμές του  $i$  προκύπτει :

$$P_i = (\alpha^i / i!) \cdot P_0 \quad (2.8)$$

όπου  $P_0$  η πιθανότητα κατά την οποία στο σύστημα δεν εξυπηρετείται καμία κλήση. Από τη συνθήκη κανονικοποίησης έχουμε :

$$\sum_{i=0}^s P_i = P_0 + \sum_{i=1}^s P_i = P_0 + \sum_{i=1}^s \frac{\alpha^i}{i!} = 1 \quad (2.9)$$

Από την (2.9) τελικά προκύπτει :

$$P_0 = \left( \sum_{i=0}^s \frac{\alpha^i}{i!} \right)^{-1} \quad (2.10)$$

Αν συνδυάσουμε τις σχέσεις (2.8) και (2.10) και αντικαταστήσουμε όπου  $i = r$ , οδηγούμαστε στη σχέση η οποία εκφράζει την κατανομή Erlang (Erlang distribution):

$$P_r = \frac{\frac{\alpha^r}{r!}}{\sum_{i=0}^s \frac{\alpha^i}{i!}} \quad (2.11)$$

Αν θεωρήσουμε ότι μία κλήση χρειάζεται ένα εξυπηρετητή (server) για την εξυπηρέτηση της (στα παραδείγματα που θα χρησιμοποιήσουμε αλλά και στην πορεία της εργασίας θα θεωρούμε ότι μία κλήση απαιτεί ακέραιο αριθμό εύρους ζώνης για την εξυπηρέτησή της και ο συνολικός αριθμός των εξυπηρετητών θα αποτελούν την συνολική χωρητικότητα του συστήματος) τότε αντικαθιστώντας το  $r$  με το  $s$  στην (2.11) παίρνουμε την πιθανότητα μία κλήση που εισέρχεται στο σύστημα, να το βρίσκει πλήρως κατειλημμένο και επομένως να αποκλείεται από αυτό. Η πιθανότητα αυτή που αποτελεί το βασικό τύπο απωλειών του Erlang, καλείται **Erlang B-formula**, συμβολίζεται με  $E_s(\alpha)$ , αποτελεί μέτρο του GoS και έχει την παρακάτω μαθηματική έκφραση :

$$B = \frac{\frac{\alpha^s}{s!}}{\sum_{i=0}^s \frac{\alpha^i}{i!}} = E_s(\alpha) \quad (2.12)$$

Πριν προχωρήσουμε σε ένα μικρό παράδειγμα εφαρμογής της φόρμουλας του Erlang κρίνεται απαραίτητη για την συνέχεια της εργασίας η αναφορά στη φυσική έννοια της στατιστικής ισορροπίας και στη διαγραμματική απεικόνιση των μεταβάσεων μεταξύ των καταστάσεων  $r-1, r, r+1$ .

## 2. Στατιστική ισορροπία

Με χρήση της σχέσης (2.7) θέτοντας όπου  $i$  το  $r$  και αντικαθιστώντας το  $\alpha$  με  $\lambda/\mu$  προκύπτει [1] :

$$\lambda \cdot P_{r-1} = r \cdot \mu \cdot P_r \quad (2.13)$$

Η σχέση (2.13) αναφέρεται και ως εξίσωση τοπικής ισορροπίας (local balance equation) όπου το αριστερό μέλος εκφράζει το ρυθμό ανόδου (προς την κατάσταση  $r$ ) ενώ το δεξιό μέλος εκφράζει το ρυθμό καθόδου (προς την κατάσταση  $r-1$ ).

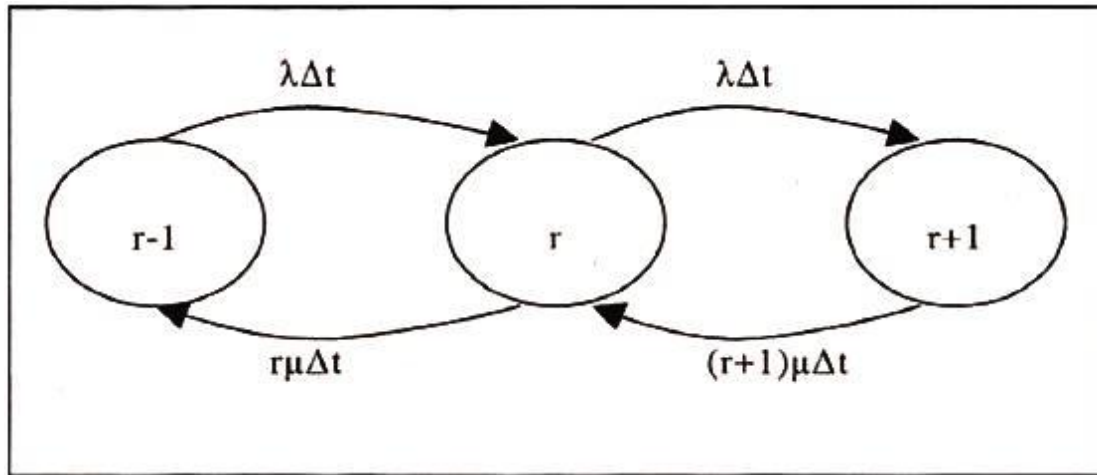
Πολλαπλασιάζοντας την σχέση (2.6) με  $\Delta t$  παίρνουμε :

$$P_r \cdot \lambda \cdot \Delta t + P_r \cdot \Gamma \cdot \mu \cdot \Delta t = P_{r-1} \cdot \lambda \cdot \Delta t + P_{r+1} \cdot (r+1) \cdot \mu \cdot \Delta t \quad (2.14)$$

Η σχέση (2.14) αναφέρεται και ως εξίσωση σφαιρικής ισορροπίας (global balance equation) όπου το αριστερό μέλος αντιπροσωπεύει το ρυθμό «εξόδου» από την κατάσταση  $r$  ενώ το δεξιό μέλος αντιπροσωπεύει το ρυθμό «εισόδου» δηλαδή το ρυθμό με τον οποίο γίνονται μεταβάσεις προς την κατάσταση  $r$ . Πρέπει να σημειωθεί

πως αν ισχύει η σφαιρική ισορροπία δεν είναι απαραίτητο να ισχύει και η τοπική ισορροπία. Αντίθετα αν υπάρχει η τοπική ισορροπία τότε υπάρχει και η σφαιρική ισορροπία. Στο διάγραμμα μεταπτώσεων των καταστάσεων που ακολουθεί παρουσιάζονται όλα τα ανωτέρω :

0



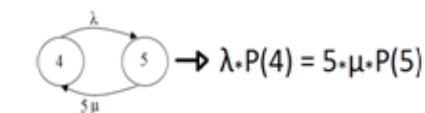
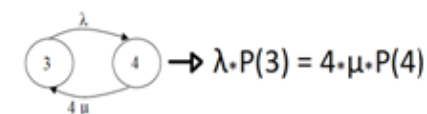
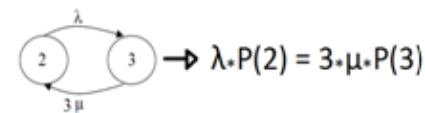
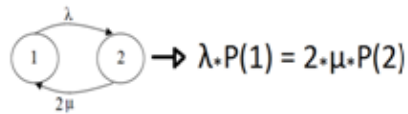
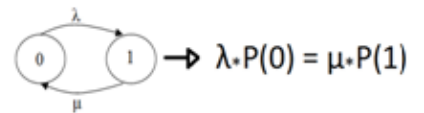
Σχήμα 2.2 Διάγραμμα μεταπτώσεων των καταστάσεων του μοντέλου  $M/M/s(0)$ . [1]

### 3. Αριθμητικό παράδειγμα 2.1

Θεωρούμε ένα σύστημα στο οποίο οι κλήσεις που καταφθάνουν ακολουθούν την κατανομή Poisson και ο χρόνος εξυπηρέτησης τους είναι εκθετικά κατανομημένος με ρυθμό άφιξης  $\lambda=1$  και ρυθμό εξυπηρέτησης  $\mu=1$ . Το σύστημα αποτελείται από  $C=5$  εξυπηρετητές οι οποίοι και υποδηλώνουν το συνολικό εύρος ζώνης του ενώ κάθε εισερχόμενη στο σύστημα κλήση έχει απαίτηση  $b=1$  μονάδα εύρους ζώνης για την εξυπηρέτησή της. Ορίζουμε ως  $j$  το γινόμενο  $n * b$  το οποίο παριστάνει τον αριθμό των κατειλημμένων εξυπηρετητών, όπου προφανώς  $0 \leq j \leq C$ . Ως « $n$ » ορίζεται ο αριθμός των κλήσεων που εξυπηρετούνται στο σύστημα. Το ζητούμενο μας ανάγεται στην εύρεση της πιθανότητας μία εισερχόμενη κλήση να μην μπορεί να εξυπηρετηθεί και επομένως να μπλοκαρισθεί δηλαδή η πιθανότητα κατά την οποία  $j=5$ . Στον πίνακα (2.1) που ακολουθεί παριστάνονται οι δυνατές τιμές των  $n$  και  $j$  ενώ δίπλα παρουσιάζονται τα επιμέρους διαγράμματα μετάβασης Markov με τις εξισώσεις που προκύπτουν λόγω της τοπικής ισορροπίας:

n	j=n·b
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5

**Πίνακας 2.1** Δυνατές τιμές n και j για σύστημα μονοδιάστατης κίνησης με C=5



**Σχήμα 2.3** Διάγραμμα μεταπτώσεων των καταστάσεων για σύστημα μονοδιάστατης κίνησης με C=5

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Erlang, η CBP είναι όπως προαναφέρθηκε η πιθανότητα το σύστημα να είναι πλήρως κατειλημμένο (n=5 και j=5). Επομένως από την (2.12) για s=C=5 και από τα δεδομένα του παραδείγματος για α=λ/μ=1 προκύπτει η πιθανότητα απώλειας κλήσης για το σύστημα ως :

$$B = \frac{\frac{\alpha^s}{s!}}{\sum_{i=0}^s \frac{\alpha^i}{i!}} = \frac{1}{326} = 0.307\% \quad (2.15)$$

Πριν προχωρήσουμε στην ανάλυση της πολυδιάστατης κίνησης θα πρέπει να αναφερθεί πως διάφορες μέθοδοι έχουν προταθεί για την βελτίωση των συστημάτων και κατά συνέπεια την μείωση της CBP. Στη μέθοδο που μελετάται στο 3<sup>ο</sup> κεφάλαιο θα γίνει φανερό μέσω του ίδιου αριθμητικού παραδείγματος το πόσο πολύ μειώνεται η τιμή της (2.15) με χρήση της ελαστικής θεωρίας και πως η θεωρία αυτή επηρεάζει την καταγραφή των εξισώσεων ισορροπίας οι οποίες μας οδηγούν και σε διαφορετική μαθηματική εξίσωση από την (2.8).

---

## 4. Μελέτη συστήματος για πολυδιάστατη κίνηση

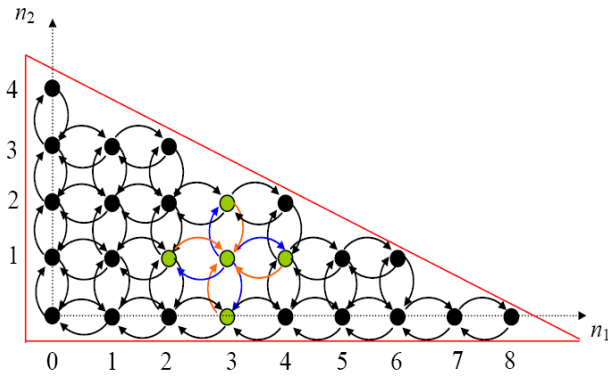
### 1. Γενικά

Η ραγδαία εξέλιξη των τηλεπικοινωνιών στην σημερινή εποχή, οι οποίες πλέον παρέχουν ενοποιημένες υπηρεσίες τηλεπικοινωνίας, όπως υπηρεσίες φωνής, βίντεο, διαδικτυακή σύνδεση κ.α., συνιστά επιτακτική ανάγκη τη μελέτη συστημάτων που εξυπηρετούν διαφορετικές κατηγορίες τηλεπικοινωνιακής κίνησης, με διαφορετικές απαιτήσεις σε εύρος ζώνης, γεγονός το οποίο καθιστά την προηγούμενη ανάλυση ανεπαρκή. Η γενικότερη ανάλυση τέτοιων συστημάτων έχει μελετηθεί εκτενώς [1, κεφ.6], [4,κεφ.7] και έχουν προταθεί διάφορες προσεγγίσεις. Ωστόσο μία από τις πιο διαδεδομένες και στην οποία βασίζεται η παρούσα εργασία, οδηγεί στην αναδρομική σχέση γνώστη ως φόρμουλα των Kaufman – Roberts [2][3].

Επειδή η μελέτη της ανωτέρω προσέγγισης για  $K$  κατηγορίες κίνησης ίσως προκαλέσει σύγχυση κρίνεται σκόπιμο να χρησιμοποιηθεί η παρακάτω μοντελοποίηση προς καλύτερη κατανόηση [6] :

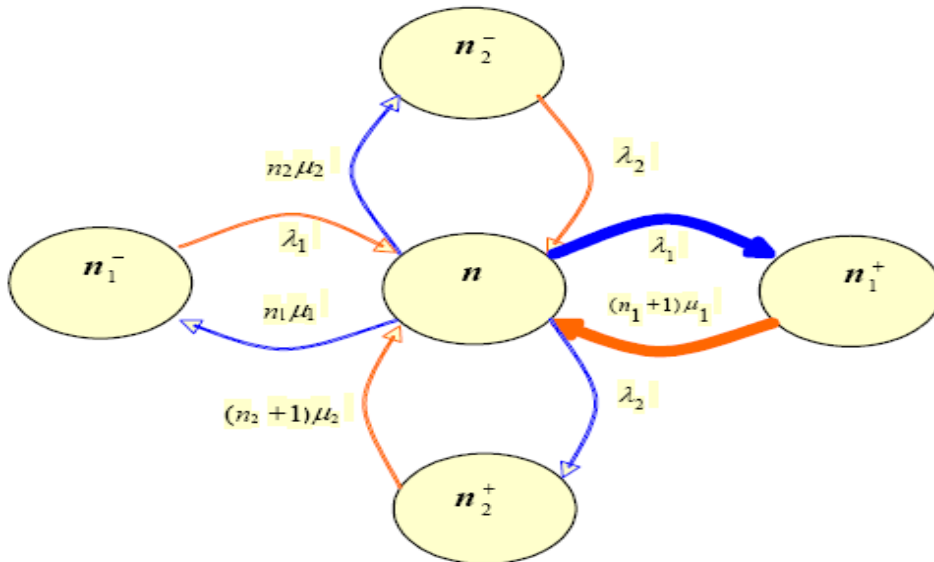
- Θεωρούμε ότι εξυπηρετούνται δυο κατηγορίες κλήσεων με στατιστικά χαρακτηριστικά τυχαίας κίνησης  $(\lambda_1, \mu_1)$  και  $(\lambda_2, \mu_2)$ .
- Η χωρητικότητα του συστήματος είναι  $C$  (όσοι δηλαδή οι εξυπηρετητές) και το σύστημα ακολουθεί πολιτική πλήρους διάθεσης πόρων (complete sharing policy). Δηλαδή αν μία εισερχόμενη κλήση της πρώτης κατηγορίας κίνησης απαιτεί  $b_1$  μονάδες εύρους ζώνης για να διεκπεραιωθεί μπλοκάρεται αν και μόνο αν οι διαθέσιμες μονάδες εύρους ζώνης του συστήματος είναι λιγότερες από  $b_1$ . Με άλλα λόγια μία εισερχόμενη στο σύστημα κλήση γίνεται δεκτή οποτεδήποτε υπάρχει διαθέσιμο το εύρος ζώνης που απαιτεί.
- Οι κλήσεις κάθε κατηγορίας έχουν απαίτηση  $b_1$  και  $b_2$  μονάδων εύρους ζώνης αντίστοιχα.

Παρακάτω παρουσιάζονται τα διαγράμματα καταστάσεων και μεταβάσεων σύμφωνα με την Μαρκοβιανή ανάλυση όπου προς χάριν ευκολίας έχουν θεωρηθεί οι εξής αριθμητικές τιμές :  $b_1=1, b_2=2, C = 8$ .



Σχήμα 2.4 Διάγραμμα καταστάσεων δύο κατηγοριών κλήσεων για σύστημα με  $C=8$ . [6]

Όπως φαίνεται στο διάγραμμα καταστάσεων, στους άξονες παριστάνονται οι κλήσεις των δύο κατηγοριών που εξυπηρετεί το σύστημα. Η συνθήκη που πρέπει να ικανοποιείται είναι  $n_1 \cdot b_1 + n_2 \cdot b_2 \leq C$  και εκφράζεται από την υποτείνουσα του σχηματιζόμενου ορθογώνιου τριγώνου και αποτελεί το όριο συνδυασμών  $(n_1, n_2)$  που μπορεί να εξυπηρετήσει το σύστημα. Εντός του τριγώνου είναι φανερές οι μεταβάσεις καταστάσεων. Μία μεγέθυνση για τις 4 καταστάσεις που είναι με πράσινο χρώμα στο σχήμα (2.4) (χωρίς όμως τις παραπάνω αριθμητικές τιμές των  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $C$ ) αποτελεί το ακόλουθο διάγραμμα :



Σχήμα 2.5 Διάγραμμα μετάβασης καταστάσεων για σύστημα πολυδιάστατης κίνησης. [6]

Στο παραπάνω σχήμα, έχουμε μια κεντρική κατάσταση  $n := (n_1, n_2)$  από την οποία μπορούμε να μεταβούμε στις  $n_1(+):=(n_1+1, n_2)$ ,  $n_2(+):=(n_1, n_2+1)$ ,  $n_1(-):=(n_1-1, n_2)$  και



$n_2(-):=(n_1, n_2-1)$  με τους αντίστοιχους ρυθμούς μετάβασης. Από την χρήση της τοπικής ισορροπίας, δηλαδή με το γεγονός πως ο ρυθμός με τον οποίο μεταβαίνουμε από μια κατάσταση σε μια άλλη με αύξηση κατά 1 των κλήσεων της μιας κατηγορίας ισούται με τον ρυθμό της αντίστροφης μετάβασης, για το παραπάνω σχήμα παίρνουμε την εξίσωση :

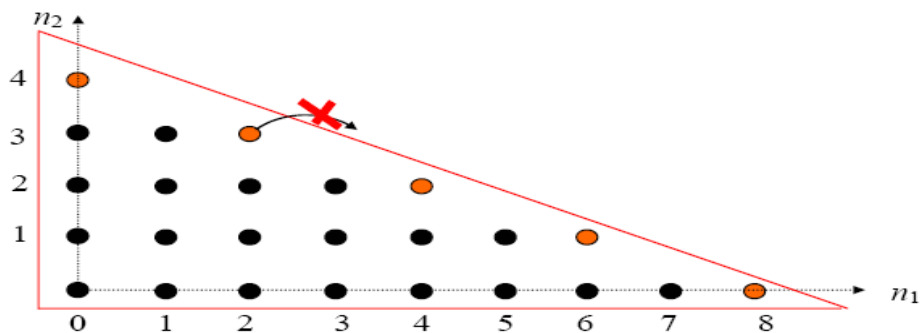
$$\lambda_1 * P(n) = (n_1+1) * \mu_1 * P(n_1^+) \quad (2.16)$$

Η λογική της παραπάνω ανάλυσης καταλήγει σε μια επίλυση μορφής γινομένου που παρέχει ανά πάσα στιγμή την πιθανότητα να βρισκόμαστε σε μια κατάσταση  $n:=(n_1, n_2)$ . Γενικά για  $K$  κατηγορίες κλήσεων, η πιθανότητα μόνιμης κατάστασης (με  $n_i$  κλήσεις για την κατηγορία  $i$ ) δίνεται από τον τύπο [1,Κεφ.6]:

$$P(n) = \frac{\prod_{i=1}^K \frac{a_i^{n_i}}{n_i!}}{\sum_{n \in \Omega} \left( \prod_{i=1}^K \frac{a_i^{n_i}}{n_i!} \right)}$$

όπου  $n:=(n_1, n_2, \dots, n_K)$ .

Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι οι πιθανότητες απώλειας κλήσης κάθε κατηγορίας. Η πιθανότητα απώλειας κλήσης της πρώτης κατηγορίας ισούται με την πιθανότητα να βρισκόμαστε σε μια από τις «οριακές» καταστάσεις, δηλαδή σε κατάσταση τέτοια ώστε να είναι αδύνατη η μετάβαση στην  $n_1(+)$ . Αντιστοίχως ορίζεται η πιθανότητα απώλειας κλήσης της δεύτερης κατηγορίας. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται, για το σύστημα που έχουμε ορίσει παραπάνω, οι οριακές καταστάσεις της πρώτης κατηγορίας :



Σχήμα 2.6 Οριακές καταστάσεις για την κατηγορία 1.[6]

Επομένως η πιθανότητα απώλειας για την πρώτη κατηγορία θα είναι το άθροισμα των πιθανοτήτων να βρεθούμε στις καταστάσεις αυτές, δεδομένου ότι πρόκειται για

ανεξάρτητα μεταξύ τους γεγονότα. Η μέθοδος αυτή είναι ακριβής, αλλά δύσκολη στην εφαρμογή της κυρίως λόγω της ύπαρξης εκθετικών και παραγοντικών. Ως εκ τούτου ακολουθείται μια ελαφρώς διαφορετική συλλογιστική, που καταλήγει στον ακριβή αναδρομικό τύπο των Kaufman – Roberts [2][3].

Σύμφωνα λοιπόν με τον τύπο των Kaufman – Roberts, αυτό που μας ενδιαφέρει είναι ο αριθμός των διαθέσιμων εξυπηρετητών  $j$  του συστήματος και η ικανοποίηση της συνθήκης  $j = n_1 * b_1 + n_2 * b_2 \leq C$ . Έτσι μπορούμε να κατασκευάσουμε μια μονοδιάστατη αλυσίδα Markov, οι καταστάσεις της οποίας θα εκφράζουν τους κατειλημμένους εξυπηρετητές του συστήματος. Με τον τρόπο αυτό, το πρόβλημα της εύρεσης της πιθανότητας απώλειας ανάγεται στην εύρεση της πιθανότητας να έχουμε συγκεκριμένο αριθμό κατειλημμένων πόρων. Για να γίνει πιο κατανοητό, θεωρώντας το σύστημα που έχουμε ορίσει παραπάνω και συμβολίζοντας ως  $j = n_1 * b_1 + n_2 * b_2$  τον αριθμό των κατειλημμένων εξυπηρετητών προκύπτει πως η συνθήκη περιορισμού είναι  $j = n_1 + 2 * n_2$  και το  $j$  παίρνει τιμές από 0 έως 8 (καθότι  $j = 0, \dots, C$ ). Έτσι λοιπόν η πιθανότητα απώλειας κλήσης της πρώτης κατηγορίας, εφόσον αυτή απαιτεί μία μονάδα εύρους ζώνης, ισούται με την πιθανότητα το σύστημα να βρίσκεται στην κατάσταση  $j = 8$ . Αντιστοίχως, η πιθανότητα απώλειας κλήσης της δεύτερης κατηγορίας, εφόσον αυτή απαιτεί δύο μονάδες εύρους ζώνης, ισούται με την πιθανότητα το σύστημα να βρίσκεται είτε στην κατάσταση  $j = 7$  είτε στην  $j = 8$ .

## 2. Αναδρομικός τύπος των Kaufman-Roberts

Από τα παραπάνω γίνεται προφανές ότι το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση των πιθανοτήτων για της διάφορες τιμές του  $j$ . Έχει αποδειχθεί [2][3], πως αν  $q(j)$  είναι η μη κανονικοποιημένη πιθανότητα να βρίσκεται το σύστημα στη κατάσταση  $j$  (δηλαδή να υπάρχουν  $j$  κατειλημμένοι εξυπηρετητές), για  $K$  κατηγορίες κλήσεων, ισχύει:

$$q(j) = \begin{cases} 1 & \text{για } j = 0 \\ \frac{1}{j} \sum_{i=1}^K \alpha_i b_i q(j - b_i) & \text{για } j = 1, \dots, C \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \quad (2.17)$$

όπου  $\alpha_i$  το φορτίο κίνησης της κατηγορίας  $i$  ( $i = 1, \dots, K$ ).

Ο παραπάνω αναδρομικός τύπος ο οποίος είναι γνωστός ως τύπος των Kaufman-Roberts, υπολογίζει με ακρίβεια τις τιμές των  $q(j)$  και κατέχει κεφαλαιώδη σημασία στην τελική εύρεση του τύπου απωλειών μιας κατηγορίας  $i$ . Προχωρώντας λοιπόν

στη συσχέτιση της πιθανότητας απώλειας με το  $q(j)$  παραθέτονται τα εξής : Αν έχουμε  $j$  εξυπηρετητές κατειλημμένους και η κλήση της κατηγορίας  $i$  απαιτεί  $b_i$  εξυπηρετητές, τότε η εισερχόμενη αυτή κλήση θα εξυπηρετείται αν και μόνο αν  $C-j \geq b_i$ , αν δηλαδή οι ελεύθεροι εξυπηρετητές είναι περισσότεροι ή ίσοι από όσους απαιτούνται για την εξυπηρέτηση της και αντιστρόφως θα αποκλείεται αν και μόνο αν  $C-j < b_i \rightarrow j > C-b_i$ . Επομένως σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό της  $q(j)$  και δεδομένου ότι το  $j$  παίρνει ακέραιες τιμές, η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με το άθροισμα των  $q(j)$  για  $j=(C-b_i+1), (C-b_i+2), \dots, C$ . Ωστόσο, όπως προαναφέρθηκε η μορφή της  $q(j)$  πιθανότητας είναι μη κανονικοποιημένη. Έτσι διαιρούμε το άθροισμα των  $q(j)$  με τον παράγοντα κανονικοποίησης  $G = \sum_{j=0}^C q(j)$ . Από τα ανωτέρω καταλήγουμε στον τελικό τύπο εύρεσης της πιθανότητας απώλειας κλήσης της κατηγορίας  $i$  :

$$P_{b_i} = \sum_{j=C-b_i+1}^C \left( \frac{q(j)}{G} \right) \quad (2.18)$$

Ακολούθως, παρατίθεται ένα αριθμητικό παράδειγμα εφαρμογής του τύπου των Kaufman-Roberts.

### 3. Αριθμητικό παράδειγμα 2.2

Θεωρούμε δύο υπηρεσίες οι κλήσεις των οποίων έχουν απαίτηση σε μονάδες εύρους ζώνης  $b_1=1$  και  $b_2=2$  αντιστοίχως και η χωρητικότητα του συστήματος που τις εξυπηρετεί είναι  $C=3$ . Επιπλέον θεωρούμε ότι οι δύο υπηρεσίες έχουν στατιστικά χαρακτηριστικά τυχαίας κίνησης με  $\lambda_1=1$ ,  $\mu_1=1$  και  $\lambda_2=1$ ,  $\mu_2=1$  αντίστοιχα. Σύμφωνα λοιπόν με την ανάλυση που έχει προηγηθεί αλλά και τα αριθμητικά δεδομένα, η συνθήκη περιορισμού είναι  $j=n_1+2n_2 \rightarrow n_1+2n_2 \leq 3$ . Από την σχέση (2.17) βρίσκουμε όλα τα πιθανά  $q(j)$  που παριστάνονται παρακάτω μαζί με τον πίνακα για τα δυνατά  $(n_1, n_2)$  και  $j$  (υπενθυμίζεται ότι  $\alpha_k = \lambda_k / \mu_k$ ) :

- Για  $j=0 \rightarrow \mathbf{q(0) = 1}$
- Για  $j=1 \rightarrow q(1) = \frac{1}{1} \sum_{k=1}^2 \alpha_k b_k q(1 - b_k) = \alpha_1 b_1 q(1 - b_1) + \alpha_2 b_2 q(1 - b_2) = 1 * 1 * q(0) + 1 * 2 * q(-1) = 1 + 0 \Rightarrow \mathbf{q(1) = 1}$

- Για  $j=2 \rightarrow q(2) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \alpha_k b_k q(2 - b_k) = \frac{1}{2} \{ \alpha_1 b_1 q(2 - b_1) + \alpha_2 b_2 q(2 - b_2) \} = \frac{1}{2} \{ 1 * 1 * q(1) + 1 * 2 * q(0) \} \frac{3}{2} = >$   
 $q(2) = \frac{3}{2}$
- Για  $j=3 \rightarrow q(3) = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^2 \alpha_k b_k q(3 - b_k) = \frac{1}{3} \{ \alpha_1 b_1 q(3 - b_1) + \alpha_2 b_2 q(3 - b_2) \} = \frac{1}{3} \{ 1 * 1 * q(2) + 1 * 2 * q(1) \} = \frac{7}{6} = >>$   
 $q(3) = \frac{7}{6}$

Εν συνεχεία υπολογίζεται ο συντελεστής κανονικοποίησης ως :

$$G = \sum_{j=0}^3 q(j) = q(0) + q(1) + q(2) + q(3) = 1 + 1 + \frac{3}{2} + \frac{7}{6} = \frac{14}{3} \quad (2.19)$$

και τελικά με συνδυασμό των σχέσεων (2.17) και (2.18) προκύπτουν οι πιθανότητες απόλειας κλήσης για κάθε υπηρεσία ως :

$$P_{b_1} = \sum_{j=3-b_1+1}^3 \left( \frac{q(j)}{G} \right) = \frac{q(3)}{G} = \frac{\frac{7}{6}}{\frac{14}{3}} = 0.25 \text{ ή } 25\% \quad (2.20)$$

και

$$P_{b_2} = \sum_{j=3-b_2+1}^3 \left( \frac{q(j)}{G} \right) = \frac{q(2)+q(3)}{G} = \frac{\frac{3}{2} + \frac{7}{6}}{\frac{14}{3}} \approx 0.57 \text{ ή } 57\% \quad (2.21)$$

j	n <sub>1</sub>	n <sub>2</sub>
0	0	0
2	0	1
1	1	0
3	1	1
2	2	0
3	3	0

**Πίνακας 2.2** Δυνατές τιμές n και j για σύστημα πολυδιάστατης κίνησης με C=3.

---

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

### Υπολογισμός της απόδοσης συστημάτων απωλειών που εξυπηρετούν ελαστική κίνηση.

#### 1. Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετηθούν η συλλογιστική της ελαστικής θεωρίας και το κατά πόσο η χρήση αυτής βελτιώνει την απόδοση του τηλεπικοινωνιακού συστήματος. Αρχικά θα παρατεθεί η συλλογιστική του ελαστικού μοντέλου που θέλουμε να προσομοιώσουμε. Εν συνεχεία θα μελετηθεί εκτενώς η συλλογιστική και ο αναδρομικός τύπος του Κουκουλίδη [7][8] ο οποίος προσδιορίζει με προσεγγιστικό τρόπο την πιθανότητα απώλειας κλήσης για ελαστική κίνηση όπου με τη χρήση αριθμητικών παραδειγμάτων: 1) θα εξετασθεί κατά πόσο τα αποτελέσματα του αναλυτικού μοντέλου του Κουκουλίδη προσεγγίζουν τα αποτελέσματα της προσομοίωσης και 2) θα δειχθεί η σημαντική βελτίωση που επιφέρει η χρήση της ελαστικής θεωρίας στην απόδοση του συστήματος, υπολογίζοντας τη CBP και συγκρίνοντας τα αποτελέσματα αυτής με εκείνα που προκύπτουν από την εφαρμογή του μοντέλου των Kaufman-Roberts.

Όπως έχει προαναφερθεί, στόχος των μοντέλων τηλεπικοινωνιακής κίνησης και κατ' επέκταση του ελαστικού μοντέλου, είναι να αξιολογήσουν και να βελτιώσουν την απόδοση των σύγχρονων τηλεπικοινωνιακών δικτύων προς όφελος πάντα των συνδρομητών. Η βασική αρχή την οποία ακολουθεί ένα τέτοιο μοντέλο είναι η εξυπηρέτηση όσο το δυνατόν μεγαλύτερου αριθμού χρηστών σε ώρες αιχμής όπου συνήθως τα συστήματα είναι πλήρως κατειλημμένα. Η μελέτη της ελαστικής κίνησης θα ακολουθήσει το ίδιο κατά σειρά πλάνο με αυτό του 2<sup>ου</sup> κεφαλαίου ξεκινώντας από την επίδραση της σε συστήματα μονοδιάστατης κίνησης και συνεχίζοντας στα αντίστοιχα πολυδιάστατης κίνησης.

---

## 2. Η Θεωρία ελαστικότητας για μονοδιάστατη κίνηση

### 1. Γενικά

Σε ένα ελαστικό μοντέλο τηλεπικοινωνιακής κίνησης είναι δυνατόν τόσο οι νέες κλήσεις όσο και οι κλήσεις που εξυπηρετούνται να μπορούν να ανεχθούν συμπίεση του εύρους ζώνης τους. Οι κλήσεις που είναι σε θέση να μειώσουν το εύρος ζώνης τους, με παράλληλη αύξηση του χρόνου εξυπηρέτησης τους, συνθέτουν όπως έχει αναφερθεί, την ελαστική κίνηση. Η ιδιότητα αυτή έχει ως συνέπεια την αύξηση του αριθμού των συνδρομητών στο σύστημα κατά τις ώρες αιχμής καθώς πλέον δεν απορρίπτονται αλλά γίνονται δεκτοί. Στο σημείο αυτό είναι σημαντικό να αναφέρουμε πως συμπίεση δεν μπορούν να υποστούν όλες οι κατηγορίες κίνησης, όπως για παράδειγμα η φωνή. Οι κατηγορίες που μπορούν να υποστούν συμπίεση αφορούν αυτές στις οποίες δεν αλλοιώνονται τα χαρακτηριστικά τους (π.χ. αρχεία μεταφοράς-file transfer) αλλά αυξάνεται μόνο ο χρόνος εξυπηρέτησης τους. Για το λόγο αυτό λοιπόν, από εδώ και στο εξής όταν αναφερόμαστε σε κλήσεις θα εννοούμε αυτές που προέρχονται από κατηγορίες ελαστικής κίνησης.

Βασική προϋπόθεση για να μπορεί να εφαρμοστεί η ελαστική θεωρία αποτελεί η ικανοποίηση του περιορισμού :

$$\sum_{i=1}^K n_i * b'_i = C \quad (3.1)$$

με  $i$  τον αριθμό των κατηγοριών κίνησης,  $n_i$  τον αριθμό των κλήσεων κάθε κατηγορίας στο σύστημα και  $b'_i$  το συμπιεσμένο εύρος ζώνης το οποίο τους έχει διατεθεί, σχέση η οποία είναι προφανής καθώς οι διαθέσιμοι πόροι ενός συστήματος είναι πάντα αμετάβλητοι (προφανώς για τα συστήματα τα οποία μελετώνται στην ενότητα αυτή η οντότητα  $i$  είναι ίση με 1). Ωστόσο, είναι σημαντικό να τονιστεί, πως ο αριθμός των επιπλέον κλήσεων στο σύστημα δεν μπορεί να είναι άπειρος. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η συμπίεση του εύρους ζώνης συνεπάγεται την αύξηση του χρόνου εξυπηρέτησης η οποία προφανώς δεν πρέπει να είναι δυσανάλογα μεγάλη σε σχέση με την μείωση της πιθανότητας απώλειας κλήσης. Αποδεικνύεται μέσω προσομοίωσης, τα αποτελέσματα της οποίας αναλύονται στο 4<sup>ο</sup> κεφάλαιο, πως έπειτα από κάποια τιμή συμπίεσης του εύρους ζώνης η τιμή της πιθανότητας απώλειας κλήσης (CBP) μεταβάλλεται ελάχιστα (σχεδόν σταθεροποιείται) ενώ ο χρόνος εξυπηρέτησης συνεχίζει να αυξάνεται και μάλιστα αισθητά.

---

Για να γίνει πιο κατανοητή η συλλογιστική και η λειτουργία του ελαστικού μοντέλου σε συστήματα μονοδιάστατης κίνησης θεωρούμε την παρακάτω μοντελοποίηση :

- Θεωρούμε ένα δίκτυο με  $C$  εξυπηρετητές οι οποίοι αποτελούν και την πραγματική χωρητικότητα του δικτύου.
- Η προσφερόμενη κίνηση στο δίκτυο αποτελείται από μία κατηγορία κλήσεων με τυχαία στατιστικά χαρακτηριστικά  $(\lambda, \mu)$ .
- Κάθε εισερχόμενη κλήση έχει ως βασική απαίτηση  $b$  μονάδες εύρους ζώνης.
- Το σύστημα διεκπεραιώνει ελαστική κίνηση.

Ως γνωστόν, σε ένα μη ελαστικό σύστημα μονοδιάστατης κίνησης, ο μέγιστος αριθμός των κλήσεων που μπορούν να εξυπηρετηθούν προκύπτει από τον περιορισμό  $n_{\max} * b = C$ , όπου  $n_{\max}$  ο μέγιστος αυτός αριθμός με  $n_{\max} = C/b$  κλήσεις. Εφόσον όμως θεωρούμε ότι η κίνηση που διεκπεραιώνεται στο σύστημα είναι ελαστική, αυτομάτως γίνεται αντιληπτό πως το σύστημα μπορεί να εξυπηρετήσει μεγαλύτερο αριθμό κλήσεων από  $n_{\max}$ . Θέλοντας να δοθεί μία αριθμητική υπόσταση των ανωτέρω, θεωρούμε ότι  $C=5$ ,  $b=1$  και πως μπορούν να εξυπηρετηθούν επιπλέον 2 κλήσεις ώστε ο μέγιστος αριθμός των κλήσεων που εξυπηρετούνται ταυτόχρονα να είναι  $n_{\max}'' = n_{\max} + 2 = 7$ . Στην περίπτωση αυτή, κάθε μια κλήση θα καταλαμβάνει  $b' = 5/7$  μονάδες εύρους ζώνης, έτσι ώστε να ικανοποιείται ο περιορισμός (3.1) και ο συνολικός αριθμός των κατειλημμένων μονάδων εύρους ζώνης να είναι  $C=5$ . Για να απεικονίσουμε την ιδιότητα αυτή, ορίζουμε ως  $T=7$  την θεωρητική μέγιστη τιμή της χωρητικότητας του συστήματος τέτοια ώστε ο μέγιστος αριθμός των κλήσεων να προκύπτει από τον περιορισμό  $n_{\max}' * b = T$ . Συνεχίζοντας την ανάλυση της συλλογιστικής της λειτουργίας του ελαστικού μοντέλου, θεωρούμε πως κάποια χρονική στιγμή καταφθάνει μία νέα κλήση στο δίκτυο. Συμβολίζοντας ως  $j$  τον αριθμό των κατειλημμένων εξυπηρετητών την χρονική αυτή στιγμή και αν  $0 \leq j \leq C - 1$  τότε η νέα κλήση γίνεται αμέσως δεκτή με την βασική της απαίτηση σε εύρος ζώνης. Αν όμως όλοι οι εξυπηρετητές είναι κατειλημμένοι τότε η νέα κλήση γίνεται δεκτή αν και μόνο αν το νέο πεδίο ορισμού του  $j$  είναι  $C \leq j \leq T - 1$ . Προφανώς εάν  $j > T$ , η νέα κλήση μπλοκάρεται και χάνεται. Εφαρμόζοντας λοιπόν την συλλογιστική της ελαστικότητας, το εύρος ζώνης της εισερχόμενης κλήσης συμπίεζεται παίρνοντας την τιμή  $b' = \frac{C}{j+1}$  μονάδες εύρους

---

ζώνης ενώ ταυτόχρονα ο χρόνος εξυπηρέτησης της αυξάνεται και γίνεται ίσος με  $h' = h \left( \frac{j+1}{C} \right)$ , με  $h=1/\mu$ , έτσι ώστε να ικανοποιείται η ισότητα :

$$b' * h' = b * h \quad (3.2)$$

Επιπροσθέτως, συμπίεση εύρους ζώνης όσο και αύξηση στο χρόνο εξυπηρέτησης τους, επιδέχονται και οι κλήσεις που εξυπηρετούνται τη χρονική αυτή στιγμή, οι τιμές των οποίων γίνονται ακριβώς ίδιες με τις τιμές της νέας κλήσης. Στην αντίθετη τώρα περίπτωση κατά την οποία μία κλήση εξυπηρετήθηκε από το σύστημα, αυτή αποδεσμεύει τους πόρους που της είχαν διατεθεί και εν συνεχεία το σύστημα μοιράζει αναλογικά το εύρος ζώνης αυτό στις υπόλοιπες κλήσεις όπου αναλόγως με την τιμή του  $j$  διακρίνονται δύο περιπτώσεις :

1. Εάν  $j \leq C$  μετά την απομάκρυνση της κλήσης από το σύστημα τότε το εύρος ζώνης όλων των κλήσεων που εξυπηρετούνται αποσυμπιέζεται πλήρως έτσι ώστε να γίνει  $b=1$ .
2. Εάν παραμένει να ισχύει  $j > C$  τότε το εύρος ζώνης των κλήσεων του συστήματος παραμένει συμπιεσμένο αλλά η τιμή του αυξάνεται ως  $b = \frac{C}{j}$  μονάδες για κάθε κλήση.

Κατά αντιστοιχία των ανωτέρω περιπτώσεων μεταβάλλεται και ο χρόνος εξυπηρέτησης.

Στο σημείο αυτό κρίνεται αναγκαίο ένα απλό παράδειγμα όχι μόνο για την πλήρη κατανόηση των παραπάνω αλλά και προκειμένου να δειχθεί η αποτελεσματικότητα της μεθόδου σε σύγκριση με αυτή του προηγούμενου κεφαλαίου όπου χρησιμοποιήθηκε η φόρμουλα του Erlang.

## 2. Αριθμητικό παράδειγμα 3.1

Αρχικά χρησιμοποιούνται τα ίδια δεδομένα με αυτά του παραδείγματος 2.1 και επιπλέον ορίζεται ως  $T=7$ . Ξεκινώντας την ανάλυση από την χρονική στιγμή κατά την οποία το σύστημα είναι πλήρως κατειλημμένο (δηλαδή δεν μπορούν να εξυπηρετηθούν νέες κλήσεις βάσει της βασικής τους απαίτησης σε εύρος ζώνης) και μία νέα κλήση καταφθάνει διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :



- Εάν  $j=C=5$  τότε όλες οι κλήσεις του συστήματος συμπεριλαμβανομένης και της νέας θα υποστούν συμπίεση του εύρους ζώνης τους ώστε  $b' = \frac{C}{j+1} = \frac{5}{6}$  μονάδες, ενώ ο χρόνος εξυπηρέτησης τους αυξάνεται αντιστρόφως ανάλογα  $h' = h * \left(\frac{j+1}{C}\right) = \frac{6}{5} * h$  ώστε να ισχύει η ισότητα της (3.2). Επιπλέον είναι φανερό ότι οι πόροι του συστήματος παραμένουν αμετάβλητοι και ίσοι με την μέγιστη τιμή τους  $C=5$  καθώς ικανοποιείται η συνθήκη (3.1). Πράγματι, εφόσον  $n=6$  η συνθήκη παίρνοντας αριθμητική υπόσταση γίνεται  $n * b' = 6 * \frac{5}{6} = 5 = C$ .
- Εάν  $j=6$  τότε όλες οι κλήσεις συμπεριλαμβανομένης και της νέας θα υποστούν συμπίεση εύρους ζώνης ώστε  $b' = \frac{5}{7}$ , ενώ ο χρόνος εξυπηρέτησης τους γίνεται  $h' = \frac{7}{5} * h$ . Προφανώς ικανοποιούνται οι περιορισμοί (3.1) και (3.2).
- Εάν  $j=7$  τότε οι κλήσεις που ήδη βρίσκονται στο σύστημα και εξυπηρετούνται είναι 7. Στο παράδειγμα όμως αυτό έχουμε ορίσει ως θεωρητική μέγιστη τιμή της χωρητικότητας του συστήματος την τιμή  $T=7$ . Αυτό σημαίνει πως η νέα κλήση δεν μπορεί να γίνει δεκτή και κατά συνέπεια χάνεται διότι η πολιτική κατανομής του συγκεκριμένου συστήματος δεν επιτρέπει περαιτέρω συμπίεση.

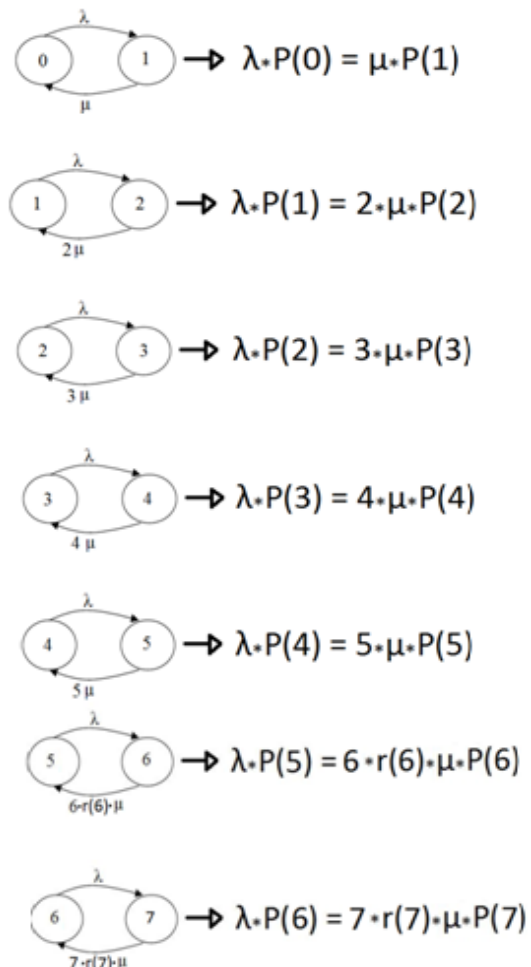
Συμπερασματικά, για το παράδειγμα αυτό, οι κλήσεις είτε θα έχουν  $b=1$  όταν  $j \leq C$  είτε  $b=5/6$  όταν  $j=6$  είτε  $b=5/7$  όταν  $j=7$ . Με άλλα λόγια το εύρος ζώνης των κλήσεων μπορεί να πάρει μόνον αυτές τις τιμές με την ελάχιστη δυνατή τιμή να προκύπτει ως :

$$b_{\min} = \frac{C}{T} \quad (3.3)$$

Έχοντας πλέον υπολογίσει όλες τις απαραίτητες παραμέτρους που υποδηλώνουν την εφαρμογή της ελαστικής θεωρίας στο σύστημα μπορούμε να προχωρήσουμε στην εύρεση της CBP. Κατά αντιστοιχία λοιπόν με το παράδειγμα του προηγούμενου κεφαλαίου ακολουθούν πίνακας με τα δυνατά  $n$  και  $j$  καθώς και τα διαγράμματα μεταπτώσεων των καταστάσεων με τις αντίστοιχες εξισώσεις τοπικής ισορροπίας που τα διέπουν προς εύρεση του γενικού τύπου της πιθανότητας μονίμου κατάστασης  $P(n)$  ο οποίος και προφανώς διαφέρει από αυτόν της σχέσης (2.8).

n	j = n·b
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7

**Πίνακας 3.1** Δυνατές τιμές n και j για σύστημα μονοδιάστατης κίνησης με C=5 και T=7.



**Σχήμα 3.1** Διάγραμμα μεταπτώσεων των καταστάσεων για σύστημα μονοδιάστατης κίνησης με C=5 και T=7

Από τον παραπάνω πίνακα και εν συγκρίσει με τον αντίστοιχο (2.1) φαίνονται οι δύο κρίσιμες καταστάσεις όπου οι κλήσεις ξεπερνούν τον αριθμό των εξυπηρετητών. Εν αντιστοιχία, στο σχήμα 3.1 φαίνονται οι εξισώσεις ισορροπίας για τις κρίσιμες αυτές καταστάσεις στις οποίες λογίζεται μία νέα παράμετρος r και η οποία εκφράζει τον παράγοντα μείωσης του χρόνου εξυπηρέτησης όταν μία κλήση απομακρυνθεί από το σύστημα. Η τιμή της παραμέτρου αυτής για τις καταστάσεις 1 έως 5, προφανώς παίρνει την τιμή 1 ενώ για τις καταστάσεις 6 και 7 γίνεται  $r(6)=5/6$  και  $r(7)=5/7$  αντίστοιχα. Βασιζόμενοι λοιπόν στις εξισώσεις τοπικής ισορροπίας και δεδομένου ότι  $\alpha=\lambda/\mu$  καταλήγουμε στον τύπο εύρεσης της πιθανότητας μόνιμου κατάστασης ο οποίος είναι :

$$P(n) = \frac{\alpha^n}{\prod_{l=0}^n r(l)} * P(0) \quad , \text{ με } r(0)=1 \quad (3.4)$$

---

Από την (3.4), της οποίας η διαφορά από την (2.8) είναι εμφανής, μπορούμε πλέον να υπολογίσουμε όλες τις πιθανές καταστάσεις αρκεί να γνωρίζουμε την  $P(0)$ . Όμως, με την χρήση της συνθήκης κανονικοποίησης (2.9) και την σχέση (3.4) μπορούμε να υπολογίσουμε την  $P(0)$  από την σχέση :

$$P(0) = \left( \sum_{i=0}^n \frac{a^i}{\prod_{l=0}^i r(l)} \right)^{-1} \quad (3.5)$$

Επομένως από την (3.5) και τα αριθμητικά δεδομένα του παραδείγματος προκύπτει ότι :

$$P(0) = (2.7186)^{-1} \quad (3.6)$$

Έχοντας πλέον υπολογίσει την πιθανότητα κατά την οποία καμία κλήση δεν εξυπηρετείται από το σύστημα μπορούμε με την χρήση της αναδρομικής σχέσης (3.4) να καταλήξουμε στην πιθανότητα απώλειας κλήσης. Όπως είναι προφανές η CBP αφορά την κατάσταση 7 όπου το σύστημα πέρα από μη διαθέσιμους πόρους δεν μπορεί και να υποβάλλει περαιτέρω συμπίεση στο εύρος ζώνης των κλήσεων που εξυπηρετεί διότι το απαγορεύει ο αρχικός ορισμός του  $T=7$ . Από την (3.4) λοιπόν και με χρήση της (3.6) καταλήγουμε στην CBP όπου:

$$B = P(7) = 0.0001226 \text{ ή } 0.012\% \quad (3.7)$$

### 3. Συμπεράσματα

Από το αποτέλεσμα της (3.7) εν συγκρίσει με αυτό της (2.15), γίνεται ιδιαίτερος αισθητή η βελτίωση της απόδοσης του συστήματος με την εφαρμογή του ελαστικού μοντέλου. Επιπλέον γίνεται φανερό πως ο αριθμός των κλήσεων οι οποίες μπορούν να εξυπηρετηθούν από το σύστημα είναι περισσότερες από ότι στο αντίστοιχο του 2<sup>ο</sup> κεφαλαίου κάτι το οποίο συνάδει απόλυτα με τον βασικό σκοπό των μοντέλων τηλεπικοινωνιακής κίνησης, δηλαδή το όφελος των συνδρομητών.

Έχοντας λοιπόν ολοκληρώσει την μελέτη της επίδρασης της ελαστικής θεωρίας σε ένα σύστημα μονοδιάστατης κίνησης συνίσταται, για τους λόγους οι οποίοι έχουν αναφερθεί στην παράγραφο 2.4.1, η μελέτη της επιρροής της ελαστικής κίνησης σε συστήματα που εξυπηρετούν πολυδιάστατη κίνηση. Ωστόσο, το γεγονός της ύπαρξης περισσότερων της μίας κατηγοριών κίνησης σ' ένα τέτοιο σύγχρονο

---

τηλεπικοινωνιακό δίκτυο καθιστά αδύνατη την εύρεση ακριβούς αναδρομικού τύπου. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το εύρος ζώνης αυξομειώνεται με τον ίδιο ρυθμό σε όλες τις κατηγορίες κίνησης με αποτέλεσμα η Μαρκοβιανή ανάλυση του μοντέλου να μην επαληθεύει την τοπική ισορροπία. Το προαναφερθέν πρόβλημα μας αναγκάζει στην εύρεση ενός προσεγγιστικού αναδρομικού τύπου μέσω μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας που προσεγγίζει την αρχική και στην οποία υπάρχει η έννοια της τοπικής ισορροπίας. Ένας τέτοιος προσεγγιστικός τύπος έχει προταθεί από τον Κουκουλίδη. Το αναλυτικό αυτό μοντέλο προσεγγίζει σε αρκετά ικανοποιητικό βαθμό το ελαστικό μοντέλο που εξετάζουμε και ειδικότερα βασικές παραμέτρους όπως τη CBP, το μέσο αριθμό κατειλημμένων εξυπηρετητών κ.α. Στην επόμενη ενότητα, πρωτίστως, θα γίνει μία αναφορά στην έννοια της αντιστρεψιμότητας (reversibility) [4][5], πως αυτή συνδέεται με την έννοια της τοπικής ισορροπίας αλλά και με βάση ποιο θεώρημα γίνεται ο έλεγχος της ύπαρξής της. Εν συνεχεία θα δοθεί τόσο η συλλογιστική του ρεαλιστικού όσο και του μοντέλου του Κουκουλίδη καθώς και αντίστοιχο αριθμητικό παράδειγμα που θα αποδεικνύει την ανωτέρω προσέγγιση αλλά και τη βελτίωση στην απόδοση ενός συστήματος πολυδιάστατης κίνησης εν συγκρίσει με τη μέθοδο των Kaufman-Roberts του 2<sup>ου</sup> κεφαλαίου.

### **3. Η έννοια της αντιστρεψιμότητας (Reversibility)**

Όπως έχει προαναφερθεί στο 2<sup>ο</sup> κεφάλαιο, βασική προϋπόθεση για την εύρεση των πιθανοτήτων μόνιμης κατάστασης αποτελεί η ύπαρξη τοπικής ισορροπίας. Στην προηγούμενη ενότητα υπολογίσαμε τις πιθανότητες αυτές καταγράφοντας τις εξισώσεις τοπικής ισορροπίας για τη μελέτη μονοδιάστατης κίνησης από τα αντίστοιχα διαγράμματα μετάβασης καταστάσεων. Ωστόσο, η αντίστοιχη μελέτη για πολυδιάστατη κίνηση, λόγω του αρκετά μεγαλύτερου αριθμού πιθανών καταστάσεων και επομένως μεγάλου αριθμού εξισώσεων, καθιστά δύσκολη την εξαγωγή συμπεράσματος ύπαρξης ή μη τοπικής ισορροπίας [4]. Για να αρθεί λοιπόν το πρόβλημα αυτό, αναγόμεστε σε μία διαφορετική μέθοδο επαλήθευσης της τοπικής ισορροπίας η οποία στηρίζεται στην αξιοποίηση της δομής και των ιδιοτήτων των διαγραμμάτων μεταπτώσεων των καταστάσεων εισάγοντας την έννοια της αντιστρεψιμότητας.

---

**Θεώρημα 3.1** Μία Μαρκοβιανή αλυσίδα χαρακτηρίζεται ως αντιστρέψιμη αν και μόνο αν υπάρχει τοπική ισορροπία μεταξύ γειτονικών καταστάσεων και αντιστρόφως[4][5].

Ορίζουμε ως γειτονικές καταστάσεις τις καταστάσεις εκείνες που συνδέονται μεταξύ τους μέσω της αποδοχής στο σύστημα ή της αναχώρησης από το σύστημα μιας μόνο κλήσης.

Από την σχέση έκφρασης τοπικής ισορροπίας (2.13) παρατηρούμε πως η εξαγωγή του συμπεράσματος ότι η Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι αντιστρεπτή βασίζεται στο γινόμενο των πιθανοτήτων μετάβασης με τις αντίστοιχες πιθανότητες κατάστασης:

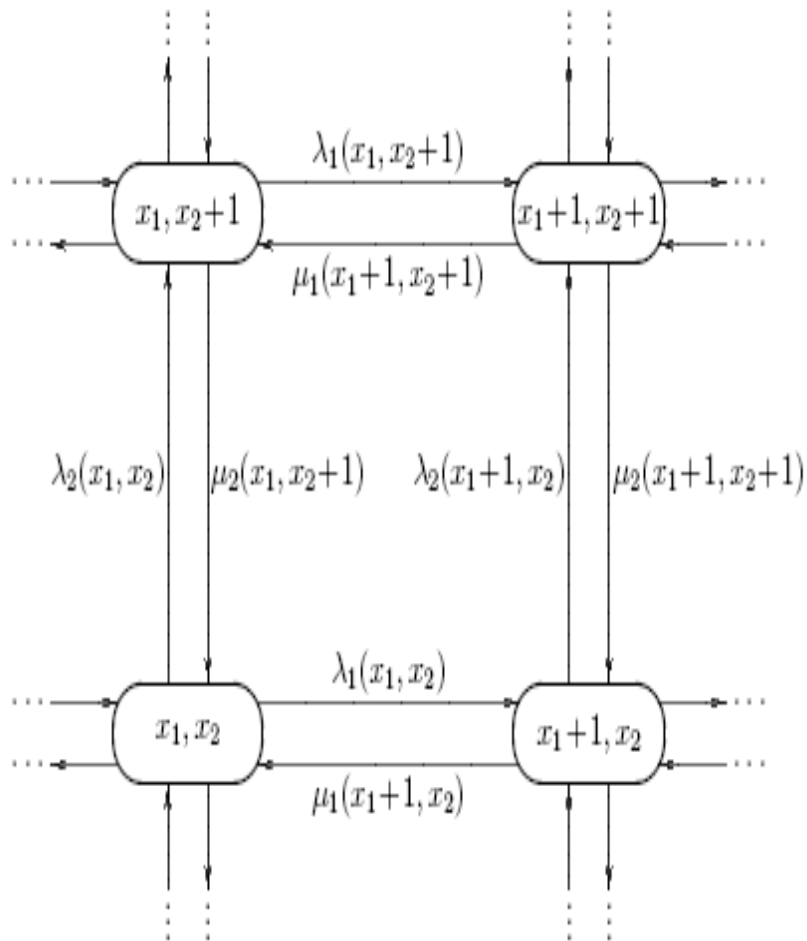
$$\pi(r-1) * P_{r-1} = \pi(r) * P_r \quad (3.8)$$

όπου  $\pi(r-1)=\lambda$  και  $\pi(r)=r*\mu$  οι πιθανότητες μετάβασης.

Όπως προαναφέρθηκε, η μελέτη της πολυδιάστατης κίνησης είναι δύσκολη λόγω του μεγάλου αριθμού καταστάσεων και επομένως μεγάλου αριθμού πιθανοτήτων μονίμου κατάστασης. Ως εκ τούτου, δημιουργείται το ερώτημα για το αν θα μπορούσε να αποδειχθεί ότι υπάρχει αντιστρεψιμότητα χωρίς να συμπεριληφθούν οι πιθανότητες κατάστασης, δηλαδή με τη χρήση μόνο των πιθανοτήτων μετάβασης [5]. Αν αυτό συνέβαινε, τότε σύμφωνα με το θεώρημα 3.1 θα επαληθευόταν η ύπαρξη της τοπικής ισορροπίας. Η απάντηση στο ερώτημα αυτό δίνεται από το ακόλουθο θεώρημα σύμφωνα με το οποίο :

**Θεώρημα 3.2 (Kolmogorov's criterion):** Αναγκαία και ικανή συνθήκη για την ύπαρξη αντιστρεψιμότητας αποτελεί το γεγονός πως αν υπάρχει μία ροή μετάβασης από μία κατάσταση  $x_1$  σε μία κατάσταση  $x_2$  τότε υπάρχει και η αντίστροφη ροή μετάβασης από την κατάσταση  $x_2$  στην κατάσταση  $x_1$  και μάλιστα οι ροές αυτές είναι ίσες.

Για να γίνει κατανοητό το ανωτέρω θεώρημα υποθέτουμε το παρακάτω διδιάστατο διάγραμμα μετάβασης τεσσάρων καταστάσεων :



**Σχήμα 3.2** Δισδιάστατο διάγραμμα μετάβασης καταστάσεων (Kolmogorov's criterion) [4]

Θεωρώντας ως αρχική κατάσταση την  $(x_1, x_2)$  τότε με βάση το παραπάνω σχήμα οι ροές οι οποίες αναφέρονται στο θεώρημα 3.2 εκφράζονται ως :

**Κατά τη φορά ρολογιού:**

$$\lambda_2(x_1, x_2) * \lambda_1(x_1, x_2 + 1) * \mu_2(x_1 + 1, x_2 + 1) * \mu_1(x_1 + 1, x_2)$$

**Αντίθετη φορά ρολογιού:**

$$\lambda_1(x_1, x_2) * \lambda_2(x_1 + 1, x_2) * \mu_1(x_1 + 1, x_2 + 1) * \mu_2(x_1, x_2 + 1)$$

Αν λοιπόν οι παραπάνω ροές είναι ίσες τότε υπάρχει αντιστρεψιμότητα και επομένως υπάρχει και τοπική ισορροπία [4]. Η παραπάνω έννοια αποτελεί και τη βάση ανάπτυξης του προσεγγιστικού μοντέλου του Κουκουλίδη που θα δούμε παρακάτω.

---

## 4. Η Θεωρία ελαστικότητας για πολυδιάστατη κίνηση

### 1. Το ελαστικό μοντέλο για πολυδιάστατη κίνηση

Όπως αναφέρθηκε, προκειμένου να περιγράψουμε το μοντέλο του Κουκουλίδη και να καταλήξουμε στην αναδρομική φόρμουλα που το εκφράζει, πρέπει πρώτα να ορίσουμε την μοντελοποίηση του ελαστικού το οποίο και εφαρμόζεται κατά την προσομοίωση. Με βάση τα ανωτέρω, θεωρούμε ένα σύστημα με χωρητικότητα  $C$  και θεωρητική μέγιστη χωρητικότητα  $T$ . Το σύστημα αυτό εξυπηρετεί  $K$  κατηγορίες κλήσεων όπου κάθε κατηγορία τύπου  $i$ , με  $i=1, \dots, K$ , χαρακτηρίζεται αντίστοιχα από  $b_i$  βασική απαίτηση μονάδων εύρους ζώνης,  $\lambda_i$  ρυθμό άφιξης και  $\mu_i$  ρυθμό εξυπηρέτησης. Συμβολίζοντας ως  $j = \sum_{i=1}^K n_i * b_i$  τον αριθμό των κατειλημμένων εξυπηρετητών βάσει του  $T$ , η βασική λειτουργία του συστήματος αυτού ακολουθεί την παρακάτω πολιτική :

- Εάν, κατά την άφιξη μία νέας κλήσης κατηγορίας  $i$  με βασική απαίτηση  $b_i$ , το άθροισμα του  $b_i$  με το ήδη κατειλημμένο εύρος ζώνης, δίνει  $j \leq C$  τότε κάθε κλήση λαμβάνει την βασική της απαίτηση σε εύρος ζώνης.
- Εάν, κατά την άφιξη μία νέας κλήσης κατηγορίας  $i$  με βασική απαίτηση  $b_i$ , το άθροισμα του  $b_i$  με το ήδη κατειλημμένο εύρος ζώνης δίνει  $j$  τέτοιο ώστε  $C \leq j \leq T$ , τότε όλες οι κλήσεις, συμπεριλαμβανομένης και της νέας, συμπιέζουν το εύρος ζώνης τους κατά αναλογία με την βασική τους απαίτηση. Με άλλα λόγια αν ο παράγοντας μείωσης είναι  $r$ , τότε το συμπιεσμένο εύρος ζώνης των κλήσεων κάθε κατηγορίας είναι ίσο με το γινόμενο της βασικής απαίτησης κάθε μίας με τον παράγοντα αυτό ( $b_i * r$ ). Για παράδειγμα αν οι κλήσεις μιας κατηγορίας έχουν βασική απαίτηση εύρους ζώνης διπλάσια των κλήσεων κάποιας άλλης κατηγορίας τότε και τα αντίστοιχα συμπιεσμένα εύρη ζώνης θα είναι διπλάσια. Επιπλέον πρέπει να τονισθεί ότι οι κλήσεις της ίδιας κατηγορίας λαμβάνουν πάντα την ίδια τιμή πόρων (συμπιεσμένων ή μη). Στην αντίθετη τώρα περίπτωση όπου μία κλήση εξυπηρετήθηκε και αποχωρεί από το σύστημα, τότε το εύρος ζώνης το οποίο δέσμευε μοιράζεται στις υπόλοιπες κλήσεις πάντα ανάλογα με την βασική τους απαίτηση σε εύρος ζώνης.
- Μία κλήση μπλοκάρεται και χάνεται αν κατά την άφιξη της βρίσκει το σύστημα στην κατάσταση όπου  $j=T$ . Με άλλα λόγια μία κλήση δεν μπορεί να λάβει εύρος ζώνης μικρότερο της τιμής που ορίζει η συνθήκη:

---

$$b'_i = \frac{C}{T} * b_i \quad (3.9)$$

όπου το πηλίκο  $r_{\min} = \frac{C}{T}$  αποτελεί την ελάχιστη τιμή του παράγοντα  $r$  που πολλαπλασιάζεται με την βασική απαίτηση εύρους ζώνης μίας κλήσης. Ο ελάχιστος αυτός παράγοντας  $r_{\min}$  είναι ίδιος για τις κλήσεις όλων των κατηγοριών.

Όπως έχει προαναφερθεί, η συγκεκριμένη λογική κατανομής των πόρων δεν καθιστά δυνατή την εύρεση αναδρομικής σχέσης που να εκφράζει το παραπάνω μοντέλο. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η Μαρκοβιανή ανάλυση του συστήματος αυτού δεν επαληθεύει την τοπική ισορροπία (local balance) καθώς δεν τηρείται το θεώρημα 3.2. Με άλλα λόγια είναι ένα μη αντιστρέψιμο μοντέλο. Μόνη λύση επομένως στο παραπάνω πρόβλημα αποτελεί η εύρεση ενός μοντέλου που θα προσεγγίζει ικανοποιητικά το ελαστικό αλλά ταυτόχρονα θα ικανοποιεί την τοπική ισορροπία. Ένα τέτοιο μοντέλο είναι το μοντέλο του Κουκουλίδη.

## 2. Το μοντέλο του Κουκουλίδη για πολυδιάστατη κίνηση

Ξεκινώντας τη συλλογιστική του μοντέλου του Κουκουλίδη, αλλά και για να εξαχθούν οι αναλυτικές εξισώσεις ισορροπίας, θεωρούμε την εξής μοντελοποίηση :

- Η χωρητικότητα του συστήματος είναι  $C$ .
- Η θεωρητική χωρητικότητα του συστήματος είναι  $T$ .
- Η διαδικασία άφιξης και εξυπηρέτησης των κλήσεων ακολουθεί στατιστικά χαρακτηριστικά τυχαίας κίνησης.
- Το σύστημα εξυπηρετεί δύο κατηγορίες κίνησης.
- Οι απαιτήσεις σε πόρους κάθε κατηγορίας είναι  $b_1$  και  $b_2$  αντίστοιχα.

Αν συμβολίσουμε με  $n_i$  τον αριθμό των κλήσεων τύπου  $i$  στο σύστημα στην κατάσταση ισορροπίας τότε θεωρούμε το διάνυσμα οριακής κατάστασης  $\mathbf{n}=(n_1,n_2)$ . Επιπλέον συμβολίζουμε ως  $j$  τον αριθμό των κατειλημμένων εξυπηρετητών όπου για την παραπάνω μοντελοποίηση ορίζεται ως  $j=\mathbf{n}*\mathbf{b}=n_1*b_1+n_2*b_2$ . Εάν μία νέα κλήση μίας κατηγορίας  $i$  ( $i=1,2$ ) αφιχθεί και το σύστημα βρεθεί σε μία κατάσταση  $(n_1,n_2)$  τέτοια ώστε  $T \geq \mathbf{n} * \mathbf{b} > C$ , τότε η κλήση θα γίνει αποδεκτή αλλά ο χρόνος εξυπηρέτησης όλων των κλήσεων που βρίσκονται στο σύστημα θα υποστεί αύξηση όπως αντίστοιχα και στο ελαστικό μοντέλο. Η διαφορά έγκειται στην συλλογιστική



της αύξησης του χρόνου εξυπηρέτησης όπου στην περίπτωση του προσεγγιστικού μοντέλου βασίζεται στην ικανοποίηση του θεωρήματος 3.2. Η διαφορά λοιπόν αυτή εκφράζεται από τον παράγοντα  $\Phi_i(\mathbf{n})$  με  $i=1,2,\dots,K$  [7][8]. Επιπλέον το εύρος ζώνης των κλήσεων που εξυπηρετούνται υπόκειται αντίστοιχα συμπίεση κατά τον ίδιο αυτό παράγοντα έτσι ώστε να ισχύει πάντα, όπως έχει αναφερθεί και στην προηγούμενη παράγραφο, η σχέση (3.2). Εάν :

1. συμβολίσουμε με  $\mathbf{n}_i^+$  το διάνυσμα οριακής κατάστασης που εκφράζει την περίπτωση να αυξηθεί κατά μία κλήση ο αριθμός των κλήσεων τύπου  $i$  που βρίσκονται στο σύστημα.
2. συμβολίσουμε με  $\mathbf{n}_i^-$  το διάνυσμα οριακής κατάστασης που εκφράζει την περίπτωση να μειωθεί κατά μία κλήση ο αριθμός των κλήσεων τύπου  $i$  που βρίσκονται στο σύστημα.
3. ορίσουμε ως  $\Omega$  το σύνολο των δυνατών καταστάσεων που περιγράφεται από τη σχέση  $\Omega = \{ \mathbf{n} : 0 \leq \mathbf{n} * \mathbf{b} \leq T \}$

τότε ο παράγοντας  $\Phi_i(\mathbf{n})$  ορίζεται ως ακολούθως:

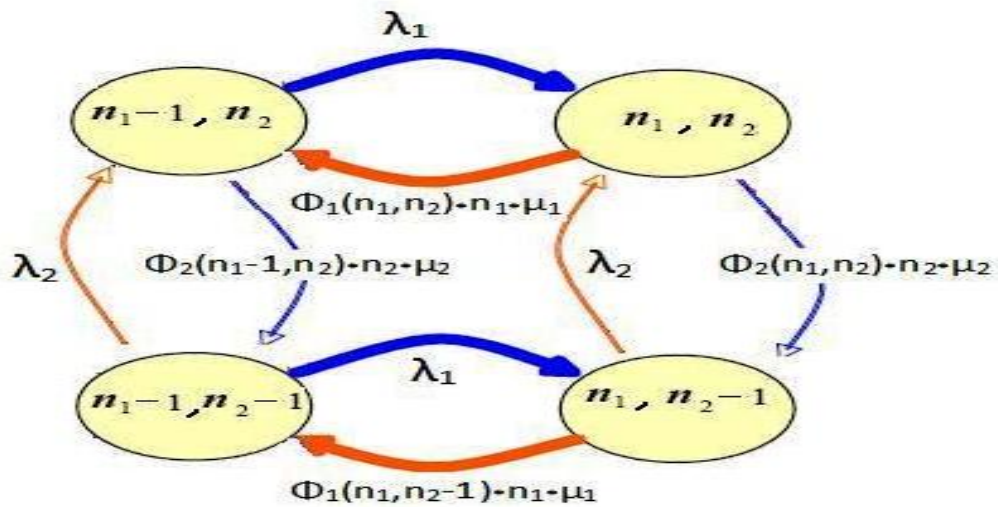
$$\Phi_i(\mathbf{n}) = \begin{cases} 1 & , \text{ για } \mathbf{n} : \mathbf{n} * \mathbf{b} \leq C \text{ και } \mathbf{n} \in \Omega \\ \frac{x(\mathbf{n}_i^-)}{x(\mathbf{n})} & , \text{ για } \mathbf{n} : C < \mathbf{n} * \mathbf{b} \leq T \text{ και } \mathbf{n} \in \Omega \end{cases} \quad (3.10)$$

όπου τα  $x(\mathbf{n})$  ορίζονται ως βάρη της κατάστασης  $\mathbf{n} \in \Omega$ . Επομένως, με τη χρήση του παράγοντα που ορίζεται στην (3.10) η πιθανότητα μονίμου κατάστασης ικανοποιεί την τοπική ισορροπία της οποίας η αντίστοιχη εξίσωση είναι:

$$\lambda_i * P(\mathbf{n}_i^-) = n_i * \mu_i * \Phi_i(\mathbf{n}) * P(\mathbf{n}) \quad (3.11)$$

Θέτοντας τώρα στην (3.11) ως  $\Phi_i(\mathbf{n}) = 1$ , δηλαδή για την περίπτωση που δεν εφαρμόζεται ελαστική κίνηση, είναι προφανής η ισότητα της με την αντίστοιχη εξίσωση (2.17) του μοντέλου των Kaufman-Roberts. Ωστόσο, το διάστημα το οποίο και μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε είναι αυτό κατά το οποίο εφαρμόζεται ελαστική κίνηση, δηλαδή στο διάστημα όπου το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση  $\mathbf{n} \in \Omega$  για την οποία ισχύει  $C < \mathbf{n} * \mathbf{b} \leq T$ . Από την (3.10), για το διάστημα αυτό, ο παράγοντας  $\Phi_i(\mathbf{n})$  παίρνει τιμή η οποία εξαρτάται από τα βάρη  $x(\mathbf{n})$  το οποίο και αναγάγει την περαιτέρω μελέτη στον υπολογισμό αυτών αλλά και τη συλλογιστική της επιλογής αυτής της τιμής για τον  $\Phi_i(\mathbf{n})$ . Ξεκινώντας λοιπόν τη μελέτη

εξετάζουμε όλα τα διαστήματα των πιθανών καταστάσεων του συστήματος. Για το διάστημα όπου  $\mathbf{n} \notin \Omega$  η τιμή του  $x(\mathbf{n})$  είναι προφανώς 0 ενώ για το για το διάστημα όπου  $\mathbf{n}: \mathbf{n} * \mathbf{b} \leq C$  λόγω της μη ύπαρξης ελαστικής κίνησης (καθώς οι κατειλημμένοι πόροι του συστήματος είναι μικρότεροι ή το πολύ ίσοι με την χωρητικότητα του συστήματος) μπορούμε να θεωρήσουμε ότι  $x(\mathbf{n}) = 1$ . Προς χάριν τώρα της μελέτης της περίπτωσης κατά την οποία  $\mathbf{n}: C < \mathbf{n} * \mathbf{b} \leq T$  με  $\mathbf{n} \in \Omega$  και σύμφωνα με τη Μαρκοβιανή ανάλυση θεωρούμε το παρακάτω διάγραμμα μετάβασης τεσσάρων γειτονικών καταστάσεων για σύστημα δύο κατηγοριών κίνησης :



Σχήμα 3.3 Διάγραμμα μετάβασης καταστάσεων του μοντέλου του Κουκουλίδη

Όπως έχουμε αναφέρει, βασική απαίτηση βάσει της οποίας αναπτύσσεται το μοντέλο αυτό, είναι η ύπαρξη τοπικής ισορροπίας. Για να επιτευχθεί επομένως αυτό και με βάση το σχήμα 3.3, αρκεί να επαληθεύεται το θεώρημα 3.2. Έτσι συμβολίζοντας με  $\Pi(A)$  τη ροή κατά τη φορά του ρολογιού και με  $\Pi(B)$  τη ροή κατά την αντίθετη φορά προκύπτουν:

$$\Pi(A) = \lambda_1 * \Phi_2(n_1, n_2) * n_2 * \mu_2 * \Phi_1(n_1, n_2 - 1) * n_1 * \mu_1 * \lambda_2$$

$$\Pi(B) = \lambda_1 * \Phi_2(n_1 - 1, n_2) * n_2 * \mu_2 * \Phi_1(n_1, n_2) * n_1 * \mu_1 * \lambda_2 \quad (3.12)$$

$$\Pi(A) = \Pi(B)$$

Τελικώς, το αποτέλεσμα της ισότητας που περιγράφεται στις σχέσεις (3.12) είναι :

$$\Phi_2(n_1, n_2) * \Phi_1(n_1, n_2 - 1) = \Phi_2(n_1 - 1, n_2) * \Phi_1(n_1, n_2) \quad (3.13)$$

Εάν αντικατασταθεί η τιμή του παράγοντα  $\Phi(i)$  στην (3.13) με την χρήση του ορισμού του από την σχέση (3.10) προκύπτει η ισχύς της εν λόγω ισότητας το οποίο και εξηγεί την επιλογή  $\Phi_i(\mathbf{n}) = \frac{x(n_i^-)}{x(\mathbf{n})}$  για το διάστημα στο οποίο  $\mathbf{n}: C < \mathbf{n} * \mathbf{b} \leq T$ .

Επιπλέον όπως έχει αναφερθεί στην αρχή της παραγράφου 2.1, βασική προϋπόθεση για την εφαρμογή της ελαστικής θεωρίας αποτελεί η σχέση (3.1). Εφαρμόζοντας την για την συγκεκριμένη μοντελοποίηση προκύπτει η παρακάτω εξίσωση :

$$n_1 * b_1 * \Phi_1(n_1, n_2) + n_2 * b_2 * \Phi_2(n_1, n_2) = C \quad (3.14)$$

όπου  $b_1 * \Phi_1(n_1, n_2)$  και  $b_2 * \Phi_2(n_1, n_2)$  απεικονίζουν τα  $b'_1$  και  $b'_2$  αντίστοιχα. Εάν ισχύει η ανισότητα  $\mathbf{n} * \mathbf{b} = n_1 * b_1 + n_2 * b_2 > C$  τότε από τον συνδυασμό των σχέσεων (3.14) και (3.10) προκύπτει η σχέση :

$$x(n_1, n_2) = \frac{1}{C} [n_1 * b_1 * x(n_1 - 1, n_2) + n_2 * b_2 * x(n_1, n_2 - 1)] \quad (3.15)$$

Με βάση επομένως την παραπάνω εξίσωση αλλά και την γενικότερη ανάλυση της παραγράφου αυτής μπορούμε να δώσουμε το γενικό ορισμό των βαρών  $x(\mathbf{n})$  για ένα σύστημα το οποίο ικανοποιεί  $K$  κατηγορίες κίνησης :

$$x(\mathbf{n}) = \begin{cases} 1 & , \text{για } \mathbf{n}: \mathbf{n} * \mathbf{b} \leq C \text{ και } \mathbf{n} \in \Omega \\ \frac{1}{C} * \sum_{i=1}^K n_i * b_i * x(n_i^-) & , \text{για } \mathbf{n}: C < \mathbf{n} * \mathbf{b} \leq T \text{ και } \mathbf{n} \in \Omega \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases} \quad (3.16)$$

Προφανώς γίνεται κατανοητό πως το μοντέλο του Κουκουλίδη αποτελεί επέκταση του μοντέλου των Kaufman-Roberts. Επομένως η περαιτέρω ανάλυση ανάγεται στην εύρεση των αντίστοιχων του μοντέλου των Kaufman-Roberts πιθανοτήτων κατειλημμένων εξυπηρετητών  $q(j)$  για  $K$  κατηγορίες κίνησης .

Εξετάζοντας το σύστημα στα διαστήματα όλων των πιθανών καταστάσεων διακρίνουμε τα εξής :

- Αν το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση  $(n_1, n_2)$  τέτοια ώστε  $0 < j = \mathbf{n} * \mathbf{b} \leq C$  αποδεικνύεται εύκολα πως :

$$q(j) = \frac{1}{j} * \sum_{i=1}^K a_i * b_i * q(j - b_i) \quad (3.17)$$

αποτέλεσμα που συμπίπτει με τον τύπο των Kaufman-Roberts κάτι το οποίο και προφανώς περιμέναμε.

- Αν το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση  $(n_1, n_2)$  τέτοια ώστε  $C < j = \mathbf{n} * \mathbf{b} \leq T$ , τότε αντικαθιστώντας στην εξίσωση τοπικής ισορροπίας (3.11) την αντίστοιχη τιμή του παράγοντα της (3.10) αλλά και χρησιμοποιώντας τον ορισμό του φορτίου κίνησης  $\alpha_i = \lambda_i / \mu_i$  προκύπτει:

$$\alpha_i * x(\mathbf{n}) * P(n_i^-) = n_i * x(n_i^-) * P(\mathbf{n}) \quad (3.18)$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (3.18) με  $b_i$ , παίρνοντας το άθροισμα για  $i=1, \dots, K$  και αντικαθιστώντας το βάρος  $x(\mathbf{n})$  από την (3.16) προκύπτει η σχέση :

$$P(\mathbf{n}) = \frac{1}{C} * \sum_{i=1}^K \alpha_i * b_i * P(n_i^-) \quad (3.19)$$

Αθροίζοντας την (3.19) για όλες τις καταστάσεις όπου  $\{n | \mathbf{n} * \mathbf{b} = j\}$  προκύπτει:

$$\sum_{\{n | \mathbf{n} * \mathbf{b} = j\}} P(\mathbf{n}) = \frac{1}{C} * \sum_{\{n | \mathbf{n} * \mathbf{b} = j\}} \sum_{i=1}^K \alpha_i * b_i * P(n_i^-) \quad (3.20)$$

Επιπλέον είναι γνωστό ότι η πιθανότητα να έχουμε  $j$  κατειλημμένες γραμμές στην κατάσταση ισορροπίας δίνεται από τη σχέση  $q(j) = \sum_{\{n \in \Omega_j\}} P(\mathbf{n})$ . Επομένως από τον συνδυασμό της με την (3.20) προκύπτει η αναδρομική σχέση που δίνει τα  $q(j)$  :

$$q(j) = \frac{1}{C} * \sum_{i=1}^K \alpha_i * b_i * q(j - b_i) \quad (3.21)$$

Από τις σχέσεις (3.17) και (3.21) παρατηρούμε πως η διαφορά τους έγκειται μόνο στον παρανομαστή του πηλίκου το οποίο πολλαπλασιάζεται με τον όρο του αθροίσματος. Επομένως, αν ορίσουμε ως  $\min(j, C) = \begin{cases} j, & \text{για } \mathbf{n} * \mathbf{b} \leq C \\ C, & \text{για } \mathbf{n} * \mathbf{b} > C \end{cases}$  τότε οι σχέσεις αυτές μπορούν να συνδυαστούν σε μία :

$$q(j) = \frac{1}{\min(j, C)} * \sum_{i=1}^K \alpha_i * b_i * q(j - b_i) \quad (3.22)$$

Αν τέλος θεωρήσουμε ότι για  $j=0$  το  $q(j)=1$  ενώ για οποιαδήποτε κατάσταση  $n \neq \Omega$   $q(j)=0$ , τότε μαζί με την (3.22) μπορούμε να καταλήξουμε στον γενικό τύπο :

$$q(j) = \begin{cases} 1 & \text{για } j = 0 \\ \frac{1}{\min(j,C)} \sum_{i=1}^K a_i b_i q(j - b_i) & \text{για } j = 1, \dots, T \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \quad (3.23)$$

Τέλος αποδεικνύεται πως ο τύπος υπολογισμού της πιθανότητας μονίμου κατάστασης προκύπτει από την σχέση :

$$P(n) = \frac{1}{\min(n*b,C)} \sum_{i=1}^K a_i * b_i * P(n_i^-) \quad (3.24)$$

Έχοντας υπολογίσει την αναδρομική σχέση υπολογισμού των  $q(j)$  και ακολουθώντας την ίδια λογική με αυτή της παραγράφου 2.4.2 συνεχίζουμε με τον υπολογισμό της CBP. Η μόνη διαφορά πλέον έγκειται στο διάστημα στο οποίο μπλοκάρεται μια κλήση. Έτσι μία κλήση κατηγορίας  $i$  θα αποκλείεται αν και μόνο αν  $T-j < b_i \rightarrow j > T - b_i$ . Επομένως, δεδομένου πως το  $j$  παίρνει ακέραιες τιμές, η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με το άθροισμα των  $q(j)$  για  $j = (T-b_i+1), (T-b_i+2), \dots, T$ . Αντίστοιχα ο παράγων κανονικοποίησης γίνεται  $G = \sum_{j=0}^T q(j)$ . Τελικώς, ο γενικός τύπος υπολογισμού της CPB της κατηγορίας  $i$  είναι :

$$P_{b_i} = \sum_{j=T-b_i+1}^T \left( \frac{q(j)}{G} \right) \quad (3.25)$$

Αξίζει να σημειωθεί πως αν χρησιμοποιηθούν οι σχέσεις (3.23) και (3.25) για τα δεδομένα του παραδείγματος 3.1, προκύπτει ακριβώς το ίδιο αποτέλεσμα για την πιθανότητα απώλειας κλήσης. Συγκεκριμένα η χρήση της (3.23) δίνει τις κάτωθι τιμές για τα  $q(j)$  :

$$q(0) = 1, q(1) = 1, q(2) = 0.16666, q(4) = 0.041666, q(5) = 0.008333,$$

$$q(6) = 0.0016666, q(7) = 0.0003333.$$

και ο παράγων κανονικοποίησης γίνεται  $G = 2.718665$

Χρησιμοποιώντας εν συνεχεία την (3.25) προκύπτει  $B = \sum_{j=7-1+1}^7 \left( \frac{q(j)}{G} \right) = \frac{q(7)}{G} = 0.0001226$ , δηλαδή ακριβώς το ίδιο αποτέλεσμα με αυτό της σχέσης (3.7) κάτι το οποίο προφανώς και αναμέναμε καθώς στο σύστημα εξυπηρετείται μόνον μία

κατηγορία κίνησης και επομένως δεν τίθεται θέμα περί μη αναλογικής κατανομής πόρων κατά την διαδικασία της συμπίεσης των.

Τέλος είναι σημαντικό να παρατεθεί και η μαθηματική σχέση που εξήχθη από τον Κουκουλίδη και αφορά τον υπολογισμό του μέσου χρόνου εξυπηρέτησης των κλήσεων καθώς σε αντίθεση με το μοντέλο των Kaufman-Roberts, δεν παραμένει σταθερός αλλά μεταβάλλεται όπως απαιτείται από την θεωρία της ελαστικότητας:

$$D_i = \frac{E(n_i)}{\lambda_i(1-p_{b_i})} \quad (3.26)$$

Όπου η παράμετρος  $E(n_i)$  αντιπροσωπεύει τον μέσο όρο των κλήσεων κάθε κατηγορίας και προκύπτει από τη σχέση :

$$E(n_i) = \sum_{j=1}^T y_i(j)q(j) \quad (3.27)$$

Τέλος, στην σχέση (3.27) η μεταβλητή  $y_i(j)$  ορίζεται ως η μέση τιμή των κλήσεων της κατηγορίας  $i$  στην κατάσταση  $j$  της οποίας η μαθηματική έκφραση δίνεται ως:

$$y_i(j) = \frac{1}{\min(j,C)q(j)} [\alpha_i b_i q(j - b_i)(1 + y_i(j - b_i)) + \frac{1}{\min(j,C)q(j)} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^i \alpha_l b_l q(j - b_l) y_l(j - b_l)] \quad (3.28)$$

Αξίζει να σημειωθεί πως η σχέση (3.26) προκύπτει άμεσα από την εφαρμογή του διαδομένου στην θεωρία τηλεπικοινωνιακής κίνησης νόμου του Little. [1 Κεφ1]

Οι παράμετροι (3.26) και (3.27), οι οποίες και λογίζονται κατά την υπολογιστική ανάλυση του 4<sup>ου</sup> κεφαλαίου, είναι εξέχουσας σημασίας καθώς ο υπολογισμός τους μας δίνει σαφή συμπεράσματα για το μέγεθος της συμπίεσης την οποία μπορούν να υποστούν οι κλήσεις, ώστε η εφαρμογή της θεωρίας της ελαστικότητας να καταστεί ωφέλιμη για το σύστημα.

Έχοντας πλέον ολοκληρώσει την παρουσίαση τόσο του ρεαλιστικού όσο και του προσεγγιστικού μοντέλου, θα παρατεθεί αριθμητικό παράδειγμα με τα ίδια αριθμητικά δεδομένα του αντίστοιχου παραδείγματος 2.2 της παραγράφου 2.4.3. Ωστόσο, στο παράδειγμα αυτό δεν θα σταθούμε μόνο στον υπολογισμό των  $q(j)$  και των CBP από τις παραπάνω σχέσεις αλλά θα επεκταθούμε και σε μερική ανάλυση των αντίστοιχων εξισώσεων σφαιρικής ισορροπίας ώστε πρώτον να καταδειχθούν τα

---

ακριβή σημεία στα οποία λαμβάνει χώρα η προσέγγιση του προς μελέτη ελαστικού μοντέλου με το αντίστοιχο αναλυτικό μοντέλο, δεύτερον να δειχθεί αριθμητικά πως πρόκειται για αρκετά καλή προσέγγιση και τέλος τρίτον να γίνει αντιληπτή η μεγάλη βελτίωση της απόδοσης του συστήματος εν συγκρίσει με την απόδοση του μοντέλου των Kaufman-Roberts.

### 3. Αριθμητικό παράδειγμα 3.2

Με βάση τα δεδομένα του παραδείγματος 2.1 θεωρούμε ένα σύστημα το οποίο εξυπηρετεί δύο υπηρεσίες οι κλήσεις των οποίων έχουν βασική απαίτηση πόρων  $b_1=1$  και  $b_2=2$  αντίστοιχα, χαρακτηρίζονται από στατιστικά τυχαίας κίνησης με  $\lambda_1=1$ ,  $\mu_1=1$  και  $\lambda_2=1$ ,  $\mu_2=1$  αντίστοιχα και η χωρητικότητα του συστήματος είναι  $C=3$ . Επιπλέον θεωρούμε πως το σύστημα διεκπεραιώνει ελαστική κίνηση με  $T=5$ . Με βάση την ανάλυση τόσο του κεφαλαίου 2 όσο και του παρόντος πλέον η συνθήκη περιορισμού είναι  $j=n_1+2n_2 \geq T \rightarrow n_1+2n_2 \geq 5$  μόνο που για  $j > C$  πρέπει ταυτόχρονα να ικανοποιείται και η σχέση (3.1) όπου για το παράδειγμα γίνεται :

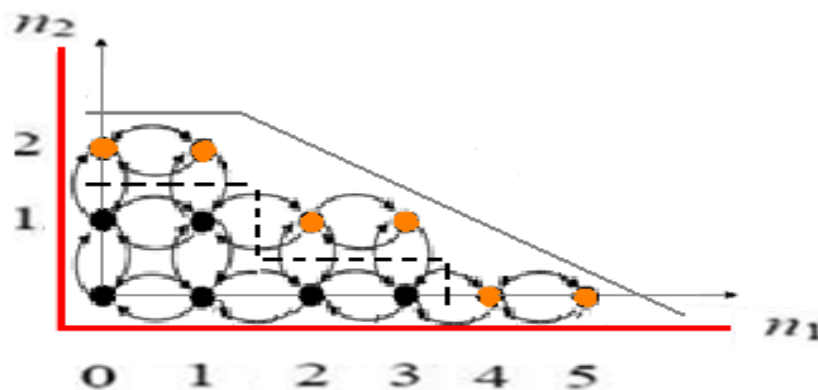
$$n_1 * b'_1 + n_2 * b'_2 = 3 \quad (3.29)$$

Θέλοντας να προχωρήσουμε στις εξισώσεις τοπικής ισορροπίας πρέπει να τονισθεί πως τα σημεία τα οποία χρήζουν προσοχής αφορούν τις καταστάσεις  $(n_1, n_2)$  στις οποίες ισχύει  $C < j \leq T$ . Το παραπάνω σχόλιο καθίσταται προφανές καθότι για  $j \leq C$  δεν υπάρχει συμπίεση εύρους ζώνης των κλήσεων οπότε οι αντίστοιχες εξισώσεις ισορροπίας του μοντέλου του Κουκουλίδη είναι ίδιες με τις αντίστοιχες εξισώσεις του ρεαλιστικού μοντέλου. Επιπροσθέτως, οι εξισώσεις αυτές συμπίπτουν με τις αντίστοιχες του μοντέλου των Kaufman-Roberts. Επομένως η μελέτη του συστήματος του παραδείγματος ανάγεται στην εξαγωγή των εξισώσεων ισορροπίας για τις καταστάσεις όπου εφαρμόζεται η ελαστική θεωρία. Στον παρακάτω πίνακα όλων των δυνατών καταστάσεων, φαίνονται οι εν λόγω καταστάσεις με γκρι χρώμα όπου και θα αποκαλούνται κρίσιμα σημεία:

j	$n_1$	$n_2$
0	0	0
2	0	1
4>C	0	2
1	1	0
3	1	1
5>C	1	2
2	2	0
4>C	2	1
3	3	0
5>C	3	1
4>C	4	0
5>C	5	0

Πίνακας 3.2 Δυνατές τιμές  $n$  και  $j$  για σύστημα πολυδιάστατης κίνησης με  $C=3$  και  $T=5$

Οι εξισώσεις σφαιρικής ισορροπίας για το σύστημα αυτό περιλαμβάνει όλους του δυνατούς συνδυασμούς μεταξύ γειτονικών καταστάσεων. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι καταστάσεις του παραδείγματος όπου με πορτοκαλί χρώμα απεικονίζονται οι κρίσιμες :

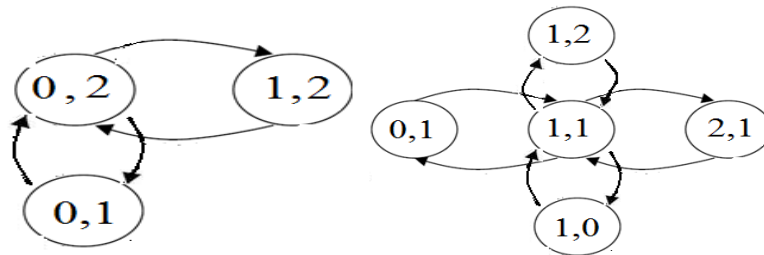


Σχήμα 3.4 Σύνολο  $\Omega$  για σύστημα με  $b_1=1$ ,  $b_2=2$ ,  $C=3$  και  $T=5$

Είναι σημαντικό να τονισθούν η λογική επιλογής των καταστάσεων  $(n_1, n_2)$  και ο τρόπος που κατασκευάζεται ένα διάγραμμα μετάβασης καταστάσεων. Σύμφωνα με αυτά ξεκινάμε την Μαρκοβιανή ανάλυση έχοντας ως σημείο αναφοράς την πρώτη κατάσταση  $(n_1, n_2)$  του πίνακα 3.1 (η οποία είναι η 0,0) και την συνδέουμε αμφίδρομα με όλες τις γειτονικές της. Ακολούθως, καταγράφουμε τις εξισώσεις ισορροπίας και εφόσον οι καταστάσεις  $(n_1, n_2)$  ή οι γειτονικές της αποτελούν κρίσιμες υπολογίζουμε τις αντίστοιχες τιμές  $\Phi(i)$  και  $x(\mathbf{n})$ . Ολοκληρώνοντας την διαδικασία με την εύρεση



της τελικής έκφρασης της εξίσωσης σφαιρικής ισορροπίας συνεχίζουμε με όμοιο τρόπο παίρνοντας ως σημείο αναφοράς τη δεύτερη κατά σειρά κατάσταση του πίνακα 3.1 κ.ο.κ . Η τήρηση της παραπάνω σειράς επιλογής των καταστάσεων αναφοράς είναι πολύ σημαντική για την εύρεση των απαιτούμενων παραμέτρων  $\Phi(i)$  και  $x(n)$  στις κρίσιμες καταστάσεις καθώς οι ορισμοί αυτών είναι αναδρομικές σχέσεις. Λόγω της χρονοβόρας και επίπονης διαδικασίας της καταγραφής όλων των δυνατών εξισώσεων θα αναλυθούν δύο διαγράμματα μετάβασης καταστάσεων από τα οποία εξάγονται πλήρως τα απαραίτητα συμπεράσματα για το μοντέλο που εξετάζεται. Τα εν λόγω διαγράμματα απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα όπου στο αριστερό ως σημείο αναφοράς έχει επιλεγεί η κατάσταση (0,2) (δηλαδή η κατάσταση κατά την οποία στο σύστημα εξυπηρετούνται 0 κλήσεις της πρώτης κατηγορίας και δύο κλήσεις της δεύτερης κατηγορίας) ενώ στο δεξιό έχει επιλεγεί η κατάσταση (1,1):



Σχήμα 3.5 Διαγράμματα μετάβασης καταστάσεων παραδείγματος 3.2

Στις παραπάνω περιπτώσεις είναι προφανής η συμμετοχή κρίσιμων καταστάσεων στην καταγραφή των εξισώσεων σφαιρικής ισορροπίας που όπως αναφέρθηκε παραπάνω οφείλονται στην επίδραση της ελαστικής θεωρίας.

Εξετάζοντας πρώτα το αριστερό σχήμα και ακολουθώντας τη λογική του σχήματος (3.3) η προκύπτουσα εξίσωση είναι η ακόλουθη :

$$\mu_1 * \Phi_1(1,2) * P(1,2) + \lambda_2 * P(0,1) = [\lambda_1 + 2 * \Phi_2(0,2)] * P(0,2) \quad (3.30)$$

Από την (3.16) όμως προκύπτει πως :

$$x(1,2) = \frac{1}{c} * [(1 * 1 * x(0,2) + 2 * 2 * x(1,1))] = \frac{16}{9} \quad (3.31)$$

Είναι σημαντικό να τονισθεί πως για την εύρεση της τιμής της (3.31) χρησιμοποιήθηκε η γνώση της  $x(0,2)=4/3$  την οποία και υπολογίζουμε ακολουθώντας

την διαδικασία καταγραφής της εξίσωσης τοπικής ισορροπίας θεωρώντας ως κατάσταση αναφοράς την  $(n_1=0, n_2=1)$ . Επιπλέον, όπως προκύπτει από τον ορισμό της (3.16), το  $x(1,1)=1$  καθότι στην κατάσταση  $(1,1)$  ισχύει πως  $j \leq C$ .

Συνδυάζοντας τώρα τις (3.10) και (3.31) καθώς και την τιμή της  $x(0,2)$  προκύπτουν :

$$\Phi_1(1,2) = \frac{x(0,2)}{x(1,2)} = \frac{4/3}{16/9} = 3/4 \quad (3.32)$$

και αντίστοιχα :

$$\Phi_2(0,2) = \frac{x(0,1)}{x(0,2)} = 3/4 \quad (3.33)$$

Η τελική μορφή επομένως της εξίσωσης ισορροπίας του συγκεκριμένου διαγράμματος μετάβασης είναι :

$$\frac{3}{4} * P(1,2) + P(0,1) - 2.5 * P(0,2) = 0 \quad (3.34)$$

Ερμηνεύοντας τα παραπάνω, το αποτέλεσμα του παράγοντα  $\Phi_1(1,2)$  σημαίνει πως στην κατάσταση  $(1,2)$ , η οποία και αποτελεί κρίσιμο σημείο (πίνακας 3.1), η τιμή του συμπεσμένου εύρους ζώνης για τις κλήσεις της πρώτης κατηγορίας είναι  $b_1' = \frac{3}{4} * b_1 = 0.75$ . Ωστόσο η συμπίεση του αντίστοιχου  $b_2$  δεν προκύπτει από τον ίδιο παράγοντα μείωσης  $3/4$ . Σύμφωνα με το μοντέλο του Κουκουλίδη η συμπεσμένη τιμή του  $b_2$  είναι η τιμή του παράγοντα  $\Phi_2(1,2)$  που όπως θα δούμε κατά την ανάλυση του δεξιού διαγράμματος του σχήματος 3.2 είναι διαφορετικός του  $\Phi_1(1,2)$ . Σε αυτό ακριβώς το σημείο φαίνεται και η προσέγγιση που γίνεται από το αναλυτικό μοντέλο εν συγκρίσει με το ελαστικό. Σύμφωνα λοιπόν με τη συλλογιστική του ελαστικού μοντέλου όπως αυτή παρατίθεται στην παράγραφο 3.1, εφόσον το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση  $(1,2)$  τότε  $j=5$  και επομένως ο **κοινός** παράγοντας μείωσης εύρους ζώνης όλων των κλήσεων είναι ίσος με  $r=C/j=3/5$ . Επομένως τα συμπεσμένα εύρη ζώνης των δύο κατηγοριών είναι  $b_1' = \frac{3}{5} * b_1 = 0.6$  και  $b_2' = \frac{3}{5} * b_2 = 1.2$  αντίστοιχα. Με βάση τα παραπάνω η αντίστοιχη εξίσωση σφαιρικής ισορροπίας του ρεαλιστικού μοντέλου είναι :

$$0.6 * P(1,2) + P(0,1) - 2.5 * P(0,2) = 0 \quad (3.35)$$

Προχωρώντας στην μελέτη του δεύτερου διαγράμματος με όμοιο τρόπο υπολογίζονται οι παράμετροι  $x(2,1) = \frac{4}{3}$ ,  $\Phi_1(2,1) = \frac{3}{4}$  αλλά και  $\Phi_2(1,2) = \frac{9}{16} \neq \Phi_1(1,2)$  η οποία και αποδεικνύει την διαφορετική πολιτική την οποία ακολουθεί η μέθοδος του Κουκουλίδη στη συμπίεση εύρους ζώνης των κλήσεων των δύο κατηγοριών. Τελικώς η σφαιρική ισορροπία εκφράζεται από την παρακάτω σχέση :

$$P(0,1) + 1.5 * P(2,1) + \frac{18}{16} * P(1,2) + P(1,0) - 4P(1,1) = 0 \quad (3.36)$$

Όσον αφορά το ελαστικό μοντέλο, εφόσον η κατάσταση-σημείο αναφοράς που εξετάζεται είναι η (2,1) τότε  $j=4$  και  $r=C/j=3/4=0.75$ . Επομένως τα αντίστοιχα μειωμένα εύρη ζώνης είναι  $b_1' = 0.75$  και  $b_2' = 1.5$ . Επιπλέον κατά την προηγούμενη ανάλυση υπολογίστηκαν και τα  $b_1'$ ,  $b_2'$  για την κατάσταση (1,2). Συνδυάζοντας τα παραπάνω η αντίστοιχη σφαιρική ισορροπία του ελαστικού μοντέλου είναι :

$$P(0,1) + 1.5 * P(2,1) + 1.2 * P(1,2) + P(1,0) - 4P(1,1) = 0 \quad (3.37)$$

Συμπερασματικά από τις σχέσεις (3.34), (3.35), (3.36) και (3.37) είναι προφανής τόσο η προσέγγιση που λαμβάνει χώρα όσο όμως και η ομοιότητα των σχέσεων που εν μέρει υποδηλώνει και την καλή ποιότητα της προσέγγισης αυτής. Θέλοντας λοιπόν να δείξουμε την μικρή απόκλιση μεταξύ των αποτελεσμάτων του αναλυτικού και του ελαστικού μοντέλων υπολογίζουμε τις CBPs που προκύπτουν για το καθένα ως εξής :

- Υπολογίζουμε για το μοντέλο του Κουκουλίδη τα  $q(j)$  με τη χρήση της σχέσης (3.10) και έπειτα τις CBPs κάθε κατηγορίας κίνησης από την (3.25). Ο υπολογισμός αυτός έγινε με τη χρήση της προγραμματιστικής γλώσσας Matlab της οποίας ο αντίστοιχος κώδικας (KRR.m) παρατίθεται στο παράρτημα. Το αποτέλεσμα είναι το ακόλουθο :

$$P_{b_1} = 0.17005 \approx 17.005\% \quad \text{και} \quad P_{b_2} = 0.3604 \approx 36.04\%$$

- Για το ελαστικό μοντέλο από τις εξισώσεις σφαιρικής ισορροπίας τελικά προκύπτουν οι κάτωθι πιθανότητες μονίμου κατάστασης :

$$\begin{aligned} P(0,0) &= 0.1360, & P(0,1) &= 0.1332, & P(0,2) &= 0.0829, & P(1,0) &= 0.1388, \\ P(1,1) &= 0.1393, & P(1,2) &= 0.1235, & P(2,0) &= 0.0705, & P(2,1) &= 0.0914, \\ P(3,0) &= 0.0249, & P(3,1) &= 0.0485, & P(4,0) &= 0.0083, & P(5,0) &= 0.0028. \end{aligned}$$

---

Με βάση τα παραπάνω οι αντίστοιχες CBPs του ελαστικού μοντέλου είναι :

$$P_{b_1} = P(1,2) + P(3,1) + P(5,0) = 0.1748 \approx 17.48\% \quad \text{και}$$

$$P_{b_2} = P(0,2) + P(2,1) + P(4,0) = 0.3574 \approx 35.74\%$$

Έχοντας πλέον υπολογίσει τις πιθανότητες απώλειας κάθε κατηγορίας για τα παραπάνω μοντέλα εξάγεται το συμπέρασμα ότι ο τύπος του Κουκουλίδη προσεγγίζει αρκετά καλά το μοντέλο που θέλουμε να προσομοιώσουμε. Επιπλέον, συγκρίνοντας τις παραπάνω τιμές των πιθανοτήτων με αυτές του παραδείγματος 2.4.3.2.1, γίνεται αμέσως αντιληπτή η βελτίωση της απόδοσης την οποία υφίσταται ακόμα και ένα τόσο μικρό σύστημα όπως αυτό, όταν εφαρμόζεται η ελαστική θεωρία.

---

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

## Υπολογιστική ανάλυση

### 1. Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο όχι μόνο αναλύθηκαν οι συλλογιστικές τόσο της αναλυτικής μεθόδου του Κουκουλίδη όσο και του συστήματος που θέλουμε να προσομοιώσουμε αλλά επιπλέον υπολογίστηκαν και οι αντίστοιχες CBPs για συστήματα πολυδιάστατης κίνησης που διεκπεραιώνουν ελαστική κίνηση. Η ανάλυση αυτή μας οδήγησε στο συμπέρασμα πως το μοντέλο που προτάθηκε από τον Κουκουλίδη προσεγγίζει σε αρκετά ικανοποιητικό βαθμό το αντίστοιχο ελαστικό. Έχοντας λοιπόν ως βάση τα ανωτέρω, είμαστε πλέον σε θέση να δώσουμε ένα περισσότερο πολύπλοκο αριθμητικό παράδειγμα. Στα αποτελέσματα του παραδείγματος αυτού καταδεικνύονται οι ομοιότητες των προηγούμενων μοντέλων, που αποκλίνουν αλλά και η διαφορά που προκύπτει στην απόδοση του συστήματος εν συγκρίσει με το αντίστοιχο μη ελαστικό ακριβές μοντέλο των Kaufman-Roberts. Προς χάριν των παραπάνω, για τους υπολογισμούς των αναλυτικών μοντέλων Kaufman-Roberts και του Κουκουλίδη, έγινε χρήση της γλώσσας προγραμματισμού Matlab ενώ για το ελαστικό μοντέλο χρησιμοποιήθηκε το πρόγραμμα προσομοίωσης Simsript II.5 [9]. Αξίζει να τονίσουμε πως για τα μοντέλα Kaufman-Roberts και Κουκουλίδη οι υπολογισμοί έγιναν με τη χρήση του ίδιου πηγαίου κώδικα καθότι όπως αποδείχθηκε στο 3<sup>ο</sup> κεφάλαιο η φόρμουλα του δευτέρου ανάγεται στην πρώτη όταν οι κατειλημμένοι εξυπηρετητές δεν ξεπερνούν ή είναι το πολύ ίσοι με την συνολική χωρητικότητα  $C$  του συστήματος.

### 2. Μοντελοποίηση του συστήματος-Αποτελέσματα

Θεωρούμε ένα δίκτυο στο οποίο ισχύουν τα εξής :

- Οι διαθέσιμοι πόροι του είναι  $C=32$ .
- Η κίνηση στο δίκτυο αποτελείται από δύο κατηγορίες υπηρεσιών με τυχαία στατιστικά χαρακτηριστικά για τις οποίες ισχύουν οι σχέσεις  $\lambda_2=2*\lambda_1$  και  $\mu_2=2*\mu_1=1$  δηλαδή με ίδιο προσφερόμενο φορτίο κίνησης σε κάθε υπηρεσία.

- Οι απαιτήσεις σε πόρους κάθε υπηρεσίας είναι  $b_1=4$  και  $b_2=1$  αντίστοιχα.
- Το σύστημα διεκπεραιώνει ελαστική κίνηση με μέγιστη τιμή θεωρητικής χωρητικότητας  $T$ .

Η αριθμητική ανάλυση που ακολουθεί εξετάζει τις εξής έξι περιπτώσεις θεωρητικής χωρητικότητας :

1.  $T=32$  ,δηλαδή όταν το σύστημα δεν διεκπεραιώνει ελαστική κίνηση
2.  $T=40$
3.  $T=50$
4.  $T=60$
5.  $T=70$
6.  $T=80$

Όπως αναφέρθηκε στο κεφαλαίο 3, ένα σύστημα δεν μπορεί να χρησιμοποιεί αυθαίρετα την πολιτική συμπίεσης εύρους ζώνης καθότι μετά από κάποιο όριο η βελτίωση στην απόδοση του δεν παρουσιάζει ιδιαίτερες μεταβολές σε αντίθεση με τον συνεχώς αυξανόμενο ρυθμό του χρόνου εξυπηρέτησης ο οποίος και προφανώς επιδρά αρνητικά σε αυτό. Η επιλογή επομένως των παραπάνω περιπτώσεων του  $T$  γίνεται για να δειχθεί ο περιορισμός αυτός με αριθμητικά αποτελέσματα. Επιπροσθέτως, στο ίδιο κεφάλαιο παρουσιάστηκαν και επισημάνθηκαν τα κύρια σημεία τα οποία αποδεικνύουν το γεγονός πως το αναλυτικό μοντέλο του Κουκουλίδη αποτελεί προσέγγιση του ελαστικού μοντέλου. Για να δειχθούν λοιπόν οι αποκλίσεις στα αριθμητικά αποτελέσματα των δύο μοντέλων, μελετήθηκαν για κάθε μία από τις περιπτώσεις (4.1) πέντε περιπτώσεις προσφερόμενου φορτίου κίνησης ( $\alpha_i=\lambda_i/\mu_i$ ) σε κάθε κατηγορία με 1)  $\alpha_1=\alpha_2=4$ , 2)  $\alpha_1=\alpha_2=8$ , 3)  $\alpha_1=\alpha_2=12$ , 4)  $\alpha_1=\alpha_2=16$  και 5)  $\alpha_1=\alpha_2=20$  όπου θεωρήσαμε πως η παράμετρος που μεταβάλλεται είναι ο ρυθμός άφιξης των κλήσεων ενώ ο ρυθμός εξυπηρέτησης τους παραμένει σταθερός. Σημειώνεται πως το γεγονός ότι έχουμε το ίδιο προσφερόμενο φορτίο κίνησης σε κάθε κατηγορία προφανώς δεν περιορίζει την αριθμητική μελέτη του συστήματος.

Όπως έχει αναφερθεί, κύριο μέλημα μας είναι ο υπολογισμός της πιθανότητας απώλειας κλήσης ( $PB(i)$ ,  $i=1,2$ ) που προκύπτει για κάθε μοντέλο με σκοπό τη σύγκριση αυτών για την εξαγωγή των απαραίτητων συμπερασμάτων. Ωστόσο, για να υπάρχει ολοκληρωμένη εικόνα της συμπεριφοράς του συστήματος ώστε τα εξαγόμενα συμπεράσματα να είναι ασφαλέστερα, στην υπολογιστική ανάλυση εισήχθησαν και τρεις ακόμα παράμετροι προς σύγκριση. Οι δύο πρώτες αφορούν το μέσο χρόνο εξυπηρέτησης των κλήσεων και τον μέσο αριθμό των κλήσεων κάθε

---

κατηγορίας που εξυπηρετούνται στο σύστημα. Οι μαθηματικοί τύποι που τις διέπουν αλλά και ο λόγος υπολογισμού αυτών αναφέρθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο. Η τελευταία, αφορά τον μέσο αριθμό κατειλημμένων εξυπηρετητών για τον υπολογισμό της οποίας χρησιμοποιήθηκε η κάτωθι μαθηματική έκφραση προκύπτουσα άμεσα από τις ιδιότητες του φορτίου κίνησης :

$$E(j) = \sum_{j=0}^T j * q(j) \quad (4.1)$$

Προφανώς τα παραπάνω αφορούν τους υπολογισμούς για το αναλυτικό μοντέλο όπου τα αριθμητικά αποτελέσματα των δύο πρώτων παραμέτρων εξήχθησαν με τη βοήθεια της προγραμματιστικής γλώσσας fortran και μου διατέθηκαν από τον κ. Μοσχολιό, ενώ τα αποτελέσματα της τρίτης παραμέτρου προέκυψαν από την χρήση της γλώσσας προγραμματισμού Matlab της οποίας ο πηγαίος κώδικας παρουσιάζεται στο παράρτημα. Όσον αφορά το ελαστικό μοντέλο, τα αντίστοιχα αριθμητικά αποτελέσματα προέκυψαν με χρήση της μεθόδου της δειγματοληψίας στο πρόγραμμα προσομοίωσης και ο οποίος πηγαίος κώδικας αναλύεται ομοίως στο παράρτημα.

Με βάση τα ανωτέρω μπορούμε να αρχίσουμε την παράθεση των αποτελεσμάτων της υπολογιστικής ανάλυσης, τα οποία αφορούν την εύρεση των κάτωθι παραμέτρων :

1. CBPs κάθε κατηγορίας οι οποίες συμβολίζονται ως PB(1) και PB(2) αντίστοιχα.
2. μέσου χρόνου εξυπηρέτησης των κλήσεων κάθε κατηγορίας σε λεπτά που συμβολίζονται ως D(1) και D(2) αντίστοιχα.
3. μέσου αριθμού κλήσεων κάθε κατηγορίας στο σύστημα που συμβολίζονται ως E(n<sub>1</sub>) και E(n<sub>2</sub>) αντίστοιχα.
4. μέσου αριθμού κατειλημμένων εξυπηρετητών που συμβολίζεται ως E(j).

Τα αριθμητικά αποτελέσματα της προσομοίωσης τα οποία παρατίθενται στους παρακάτω πίνακες, αποτελούν το μέσο όρο των τιμών που εξήχθησαν από πέντε επαναλήψεις.

1. Περίπτωση  $T=32$

ΦΟΡΤΙΟ ΚΙΝΗΣΗΣ		ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ	ΑΝΑΛΥΤΙΚΟ
		SIMSCRIPT II.5	KAUFMAN-ROBERTS
<b><u><math>\alpha_1=\alpha_2=4</math></u></b>  $\lambda(1)=2, \lambda(2)=4$	PB(1)	0.0830580	0.0829080
	PB(2)	0.0167235	0.0166270
	D(1)	1.9997538	2.0000000
	D(2)	1.0005758	1.0000000
	E(n <sub>1</sub> )	3.6692440	3.6683694
	E(n <sub>2</sub> )	3.9318380	3.9334933
	E(j)	18.6088160	18.6070000
<b><u><math>\alpha_1=\alpha_2=8</math></u></b>  $\lambda(1)=4, \lambda(2)=8$	PB(1)	0.4023689	0.4019680
	PB(2)	0.1101912	0.1096080
	D(1)	2.0015332	2.0000000
	D(2)	1.0004628	1.0000000
	E(n <sub>1</sub> )	4.7866960	4.7842568
	E(n <sub>2</sub> )	7.1158520	7.1231377
	E(j)	26.2626340	26.2602000
<b><u><math>\alpha_1=\alpha_2=12</math></u></b>  $\lambda(1)=6, \lambda(2)=12$	PB(1)	0.6072479	0.6070230
	PB(2)	0.1980814	0.1963670
	D(1)	2.0047120	2.0000000
	D(2)	0.9996970	1.0000000
	E(n <sub>1</sub> )	4.7261980	4.7157293
	E(n <sub>2</sub> )	9.6133180	9.6436007
	E(j)	28.5181180	28.5065000
<b><u><math>\alpha_1=\alpha_2=16</math></u></b>  $\lambda(1)=8, \lambda(2)=16$	PB(1)	0.7243698	0.7238780
	PB(2)	0.2648549	0.2631440
	D(1)	2.0072772	2.0000000
	D(2)	1.0006466	1.0000000
	E(n <sub>1</sub> )	4.4275820	4.4179517
	E(n <sub>2</sub> )	11.7653680	11.7896984
	E(j)	29.4757000	29.4615000
<b><u><math>\alpha_1=\alpha_2=20</math></u></b>  $\lambda(1)=10, \lambda(2)=20$	PB(1)	0.7963490	0.7961570
	PB(2)	0.3166886	0.3161250
	D(1)	2.0044260	2.0000000
	D(2)	1.0000198	1.0000000
	E(n <sub>1</sub> )	4.0832780	4.0768566
	E(n <sub>2</sub> )	13.6548980	13.6774957
	E(j)	29.9880060	29.9849000

Πίνακας 4.1 Υπολογιστική ανάλυση συστήματος με  $T=32$



Από τον παραπάνω πίνακα φαίνεται η αμελητέα απόκλιση στα αποτελέσματα της προσομοίωσης με τα αντίστοιχα της αναλυτικής μεθόδου για την περίπτωση μη εφαρμογής ελαστικής θεωρίας στο σύστημα κάτι που προφανώς περιμένουμε να συμβεί καθώς δεν λαμβάνουν χώρα αυξομειώσεις του εύρους ζώνης των κλήσεων και επομένως οι υπολογισμοί δεν έχουν καμία πολυπλοκότητα. Στην συνέχεια της ανάλυσης ο πίνακας 4.1 θα αποτελεί τον πίνακα αναφοράς με τον οποίο θα συγκριθούν τα αποτελέσματα που εξάγονται από την μελέτη των υπολοίπων περιπτώσεων. Αυτό που αξίζει να σημειωθεί είναι πως οι αποκλίσεις οφείλονται στην προσεγγιστική φύση της προσομοίωσης, δηλαδή στο γεγονός ότι χρησιμοποιεί προσεγγιστικές αριθμητικές μεθόδους (π.χ. μέθοδοι δημιουργίας ψευδό-τυχαίων αριθμών) στο αντίστοιχο πρόγραμμα για να εισάγει την έννοια της τυχαίας κίνησης.

## 2. Περίπτωση T=40

ΦΟΡΤΙΟ ΚΙΝΗΣΗΣ		ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ	ΑΝΑΛΥΤΙΚΟ
		SIMSCRIPT Π.5	KOUKOULIDIS
<b><u><math>\alpha_1=\alpha_2=4</math></u></b>  $\lambda(1)=2, \lambda(2)=4$	PB(1)	0.0265163	0.0262050
	PB(2)	0.0057146	0.0052940
	D(1)	2.0300992	2.0335576
	D(2)	1.0098428	1.0050330
	E(n <sub>1</sub> )	3.9543420	3.9605377
	E(n <sub>2</sub> )	4.0126660	3.9988489
	E(j)	19.5559940	19.5595000
<b><u><math>\alpha_1=\alpha_2=8</math></u></b>  $\lambda(1)=4, \lambda(2)=8$	PB(1)	0.3103081	0.3099360
	PB(2)	0.0892997	0.0849870
	D(1)	2.1876778	2.2182230
	D(2)	1.0817102	1.0332223
	E(n <sub>1</sub> )	6.0385880	6.1228595
	E(n <sub>2</sub> )	7.8738020	7.5632907
	E(j)	29.3727220	29.4021000
<b><u><math>\alpha_1=\alpha_2=12</math></u></b>  $\lambda(1)=6, \lambda(2)=12$	PB(1)	0.5512919	0.5524030
	PB(2)	0.1878823	0.1799410
	D(1)	2.2905350	2.3600010
	D(2)	1.1362562	1.0561297
	E(n <sub>1</sub> )	6.1688520	6.3379775
	E(n <sub>2</sub> )	11.0639260	10.3930662
	E(j)	31.3172000	31.3254000

<b><u><math>\alpha_1=\alpha_2=16</math></u></b>	<b>PB(1)</b>	0.6889913	0.6904770
	<b>PB(2)</b>	0.2605749	0.2529140
	<b>D(1)</b>	2.3452122	2.4546847
	<b>D(2)</b>	1.1648982	1.0707901
	<b>E(n<sub>1</sub>)</b>	5.8379720	6.0782603
	<b>E(n<sub>2</sub>)</b>	13.7731720	12.7995538
	<b>E(j)</b>	31.7637260	31.7629000
<b><u><math>\alpha_1=\alpha_2=20</math></u></b>	<b>PB(1)</b>	0.7723301	0.7738350
	<b>PB(2)</b>	0.3174405	0.3097180
	<b>D(1)</b>	2.3775714	2.5267031
	<b>D(2)</b>	1.1829692	1.0817511
	<b>E(n<sub>1</sub>)</b>	5.4149960	5.7145093
	<b>E(n<sub>2</sub>)</b>	16.1399760	14.9342578
	<b>E(j)</b>	31.8967680	31.8988000

*Πίνακας 4.2 Υπολογιστική ανάλυση συστήματος με  $T=40$*

Παρατηρώντας τον πίνακα 4.2 εξάγονται δύο συμπεράσματα. Το πρώτο προκύπτει από τη σύγκριση του πίνακα 4.2 με τον 4.1 και αφορά το μέγεθος της βελτίωσης της απόδοσης του συστήματος σε συνάρτηση με την ανεκτή αύξηση του μέσου χρόνου εξυπηρέτησης. Από τα αποτελέσματα της σύγκρισης αυτής λοιπόν καθίσταται η εφαρμογή της ελαστικής θεωρίας με  $T=40$  ιδιαίτερα ικανοποιητική. Ωστόσο, είναι σημαντικό να αναφερθεί πως σε ώρες αιχμής, η φωνή δεν μπορεί να υποστεί συμπίεση εύρους ζώνης. Επομένως όταν λέμε για συμπίεση εύρους ζώνης θα εννοούμε ότι σε αυτήν θα υπόκεινται μόνο οι κατηγορίες ελαστικής κίνησης.

Το δεύτερο εξαγόμενο συμπέρασμα αφορά τις αποκλίσεις της προσομοίωσης με τα αποτελέσματα από το αναλυτικό μοντέλο. Αυτό που παρατηρείται είναι πως οι CBPs δεν παρουσιάζουν ιδιαίτερες μεταβολές ακόμα και για φορτίο κίνησης  $\alpha=20$  γεγονός που αποδεικνύει πως το μοντέλο του Κουκουλίδη προσεγγίζει ιδιαίτερωσ ικανοποιητικά το ελαστικό μοντέλο. Παρατηρώντας τώρα τις τιμές των  $E(1)$  και  $E(2)$  των δύο μοντέλων φαίνεται πως οι αποκλίσεις γίνονται πιο εμφανής όσο μεγαλώνει το  $\alpha$  και μάλιστα η διαφορά είναι περισσότερο εμφανής για τις κλήσεις της δεύτερης κατηγορίας. Όσον αφορά το πρώτο είναι, όπως έχει αναφερθεί, αναμενόμενο. Για το δεύτερο, το γεγονός της πιο εμφανούς διαφοράς στις κλήσεις της δεύτερης κατηγορίας οφείλεται στα δεδομένα που έχουμε δώσει όπου η βασική απαίτηση εύρους ζώνης για τις κλήσεις αυτές είναι  $b_2=1$ . Αυτό εξηγείται καθώς η λίγο

διαφορετική πολιτική κατανομής των πόρων από τις δύο μεθόδους επηρεάζει ευκολότερα τον μέσο αριθμό των κλήσεων του συστήματος που έχουν μικρές απαιτήσεις σε πόρους που όπως είναι προφανές είναι και ευκολότερο κατά την εξοικονόμηση εύρους ζώνης να γίνει δεκτή μία τέτοια κλήση.

### 3. Περίπτωσης $T=50,60,70,80$

ΦΟΡΤΙΟ ΚΙΝΗΣΗΣ		ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ	ΑΝΑΛΥΤΙΚΟ
		SIMSCRIPT Π.5	ΚΟΥΚΟΥΛΙΔΙΣ
<b>T=50</b>			
<b><u><math>\alpha_1=\alpha_2=4</math></u></b>  $\lambda(1)=2, \lambda(2)=4$	PB(1)	0.0070765	0.0066490
	PB(2)	0.0015496	0.0013360
	D(1)	2.0659060	2.0717500
	D(2)	1.0206750	1.0086915
	E(n <sub>1</sub> )	4.1044600	4.1159492
	E(n <sub>2</sub> )	4.0727120	4.0293776
	E(j)	19.8854380	19.8883000
<b><u><math>\alpha_1=\alpha_2=8</math></u></b>  $\lambda(1)=4, \lambda(2)=8$	PB(1)	0.2687587	0.2675760
	PB(2)	0.0786511	0.0737690
	D(1)	2.5947082	2.7059214
	D(2)	1.2715630	1.0968933
	E(n <sub>1</sub> )	7.5928140	7.9275252
	E(n <sub>2</sub> )	9.3655960	8.1278165
	E(j)	30.7916760	30.8474000
<b><u><math>\alpha_1=\alpha_2=12</math></u></b>  $\lambda(1)=6, \lambda(2)=12$	PB(1)	0.5406001	0.5411470
	PB(2)	0.1831683	0.1766820
	D(1)	2.8586736	3.0915825
	D(2)	1.4152896	1.1507744
	E(n <sub>1</sub> )	7.8837040	8.5114872
	E(n <sub>2</sub> )	13.8620940	11.3694417
	E(j)	31.8987900	31.9048000
<b><u><math>\alpha_1=\alpha_2=16</math></u></b>  $\lambda(1)=8, \lambda(2)=16$	PB(1)	0.6854923	0.6872070
	PB(2)	0.2586651	0.2519830
	D(1)	2.9443062	3.2916840
	D(2)	1.4665732	1.1773488
	E(n <sub>1</sub> )	7.4108900	8.2369388
	E(n <sub>2</sub> )	17.3845900	14.0908330
	E(j)	31.9868480	31.9871000
<b><u><math>\alpha_1=\alpha_2=20</math></u></b>	PB(1)	0.7714676	0.7726890

$\lambda(1)=10, \lambda(2)=20$	PB(2)	0.3162801	0.3093700
	D(1)	2.9949008	3.4360866
	D(2)	1.4918188	1.1965008
	E(n <sub>1</sub> )	6.8469960	7.8106182
	E(n <sub>2</sub> )	20.3883580	16.5267774
	E(j)	31.9973060	31.9975000
<b>T=60</b>			
<u><math>\alpha 1=\alpha 2=4</math></u>  $\lambda(1)=2, \lambda(2)=4$	PB(1)	0.0019397	0.0017130
	PB(2)	0.0003996	0.0003480
	D(1)	2.0829462	2.0890566
	D(2)	1.0260434	1.0093661
	E(n <sub>1</sub> )	4.1597760	4.1709545
	E(n <sub>2</sub> )	4.0986900	4.0360595
	E(j)	19.9709880	19.9712000
<u><math>\alpha 1=\alpha 2=8</math></u>  $\lambda(1)=4, \lambda(2)=8$	PB(1)	0.2514840	0.2500620
	PB(2)	0.0731700	0.0689110
	D(1)	3.0819628	3.2947830
	D(2)	1.5076946	1.1721765
	E(n <sub>1</sub> )	9.2327880	9.8835290
	E(n <sub>2</sub> )	11.1707460	8.7312056
	E(j)	31.3998200	31.4467000
<u><math>\alpha 1=\alpha 2=12</math></u>  $\lambda(1)=6, \lambda(2)=12$	PB(1)	0.5386179	0.5395450
	PB(2)	0.1818413	0.1762930
	D(1)	3.4655360	3.8887122
	D(2)	1.7215360	1.2511984
	E(n <sub>1</sub> )	9.5968400	10.7434604
	E(n <sub>2</sub> )	16.8866960	12.3674516
	E(j)	31.9832220	31.9863000
<u><math>\alpha 1=\alpha 2=16</math></u>  $\lambda(1)=8, \lambda(2)=16$	PB(1)	0.6860392	0.6869920
	PB(2)	0.2580977	0.2520770
	D(1)	3.5729568	4.1576207
	D(2)	1.7807148	1.2859728
	E(n <sub>1</sub> )	8.9777600	10.4109569
	E(n <sub>2</sub> )	21.1229940	15.3889316
	E(j)	31.9992660	31.9993000
<u><math>\alpha 1=\alpha 2=20</math></u>  $\lambda(1)=10, \lambda(2)=20$	PB(1)	0.7714972	0.7726280
	PB(2)	0.3155534	0.3094930
	D(1)	3.6198844	4.3592944
	D(2)	1.8036340	1.3121793
	E(n <sub>1</sub> )	8.2749200	9.9118360
	E(n <sub>2</sub> )	24.6708480	18.1213794

	<b>E(j)</b>	31.9999560	31.9999000
<b>T=70</b>			
<b><u><math>\alpha_1=\alpha_2=4</math></u></b>  $\lambda(1)=2, \lambda(2)=4$	<b>PB(1)</b>	0.0005474	0.0004450
	<b>PB(2)</b>	0.0001236	0.0000900
	<b>D(1)</b>	2.0900680	2.0966057
	<b>D(2)</b>	1.0282372	1.0110935
	<b>E(n<sub>1</sub>)</b>	4.1798600	4.1913437
	<b>E(n<sub>2</sub>)</b>	4.1086580	4.0440122
	<b>E(j)</b>	19.9955540	19.9925000
<b><u><math>\alpha_1=\alpha_2=8</math></u></b>  $\lambda(1)=4, \lambda(2)=8$	<b>PB(1)</b>	0.2433165	0.2419380
	<b>PB(2)</b>	0.0703409	0.0666230
	<b>D(1)</b>	3.6165070	3.9442670
	<b>D(2)</b>	1.7747976	1.2545824
	<b>E(n<sub>1</sub>)</b>	10.9507780	11.9599953
	<b>E(n<sub>2</sub>)</b>	13.1887300	9.3679833
	<b>E(j)</b>	31.6903320	31.7250000
<b><u><math>\alpha_1=\alpha_2=12</math></u></b>  $\lambda(1)=6, \lambda(2)=12$	<b>PB(1)</b>	0.5383694	0.5393440
	<b>PB(2)</b>	0.1817847	0.1761200
	<b>D(1)</b>	4.0892942	4.6992958
	<b>D(2)</b>	2.0321116	1.3525151
	<b>E(n<sub>1</sub>)</b>	11.3307460	12.9885432
	<b>E(n<sub>2</sub>)</b>	19.9362840	13.3717203
	<b>E(j)</b>	31.9976200	31.9980000
<b><u><math>\alpha_1=\alpha_2=16</math></u></b>  $\lambda(1)=8, \lambda(2)=16$	<b>PB(1)</b>	0.6866448	0.6869960
	<b>PB(2)</b>	0.2569302	0.2520170
	<b>D(1)</b>	4.2043730	5.0262576
	<b>D(2)</b>	2.0919940	1.3944654
	<b>E(n<sub>1</sub>)</b>	10.5432840	12.5858937
	<b>E(n<sub>2</sub>)</b>	24.8527760	16.6885868
	<b>E(j)</b>	31.9999280	32.0000000
<b><u><math>\alpha_1=\alpha_2=20</math></u></b>  $\lambda(1)=10, \lambda(2)=20$	<b>PB(1)</b>	0.7716112	0.7726320
	<b>PB(2)</b>	0.3140502	0.3094720
	<b>D(1)</b>	4.2395376	5.2834924
	<b>D(2)</b>	2.1175928	1.4276616
	<b>E(n<sub>1</sub>)</b>	9.6854760	12.0129717
	<b>E(n<sub>2</sub>)</b>	29.0308100	19.7168026
	<b>E(j)</b>	32.0000000	32.0000000
<b>T=80</b>			
<b><u><math>\alpha_1=\alpha_2=4</math></u></b>  $\lambda(1)=2, \lambda(2)=4$	<b>PB(1)</b>	0.0001507	0.0001160
	<b>PB(2)</b>	0.0000292	0.0000230
	<b>D(1)</b>	2.0927284	2.0992165
	<b>D(2)</b>	1.0290528	1.0114198

	<b>E(n<sub>1</sub>)</b>	4.1868060	4.1979475
	<b>E(n<sub>2</sub>)</b>	4.1122840	4.0455842
	<b>E(j)</b>	20.0029740	19.9981000
<b><u>α1=α2=8</u></b>  λ(1)=4 , λ(2)=8	<b>PB(1)</b>	0.2388878	0.2379480
	<b>PB(2)</b>	0.0691842	0.0655750
	<b>D(1)</b>	4.1848544	4.6336839
	<b>D(2)</b>	2.0579118	1.3417303
	<b>E(n<sub>1</sub>)</b>	12.7426600	14.1244237
	<b>E(n<sub>2</sub>)</b>	15.3103240	10.0299756
	<b>E(j)</b>	31.8359320	31.8611000
<b><u>α1=α2=12</u></b>  λ(1)=6 , λ(2)=12	<b>PB(1)</b>	0.5389910	0.5393030
	<b>PB(2)</b>	0.1811639	0.1761440
	<b>D(1)</b>	4.7183034	5.5121724
	<b>D(2)</b>	2.3482018	1.4542007
	<b>E(n<sub>1</sub>)</b>	13.0554880	15.2366378
	<b>E(n<sub>2</sub>)</b>	23.0546520	14.3766282
	<b>E(j)</b>	31.9996860	31.9997000
<b><u>α1=α2=16</u></b>  λ(1)=8 , λ(2)=16	<b>PB(1)</b>	0.6861448	0.6869950
	<b>PB(2)</b>	0.2568928	0.2520210
	<b>D(1)</b>	4.8226228	5.8948756
	<b>D(2)</b>	2.4051938	1.5030537
	<b>E(n<sub>1</sub>)</b>	12.1131560	14.7610161
	<b>E(n<sub>2</sub>)</b>	28.5735320	17.9880381
	<b>E(j)</b>	32.0000000	32.0000000
<b><u>α1=α2=20</u></b>  λ(1)=10 , λ(2)=20	<b>PB(1)</b>	0.7723699	0.7726330
	<b>PB(2)</b>	0.3130423	0.3094690
	<b>D(1)</b>	4.8750212	6.2076295
	<b>D(2)</b>	2.4309964	1.5431743
	<b>E(n<sub>1</sub>)</b>	11.1007540	14.1141228
	<b>E(n<sub>2</sub>)</b>	33.3711040	21.3121818
	<b>E(j)</b>	32.0000000	32.0000000

Πίνακας 4.3 Υπολογιστική ανάλυση συστήματος με T=50,60,70,80

Κλείνοντας την παρουσίαση των αριθμητικών αποτελεσμάτων, ο παραπάνω πίνακας απεικονίζει όλα τα αποτελέσματα συγκεντρωτικά για τις περιπτώσεις T=50,60,70,80. Από την παρατήρηση λοιπόν αυτού, το σημαντικότερο συμπέρασμα που προκύπτει είναι πως ενώ η απόδοση του συστήματος για μικρά φορτία κίνησης βελτιώνεται διαρκώς χωρίς η αύξηση στο χρόνο εξυπηρέτησης να έχει ιδιαίτερα αρνητική επίδραση, στα μεγαλύτερα φορτία η βελτίωση τείνει να σταθεροποιηθεί και δεν μεταβάλλεται από περεταίρω αύξηση του T σε αντίθεση με το μέσο χρόνο

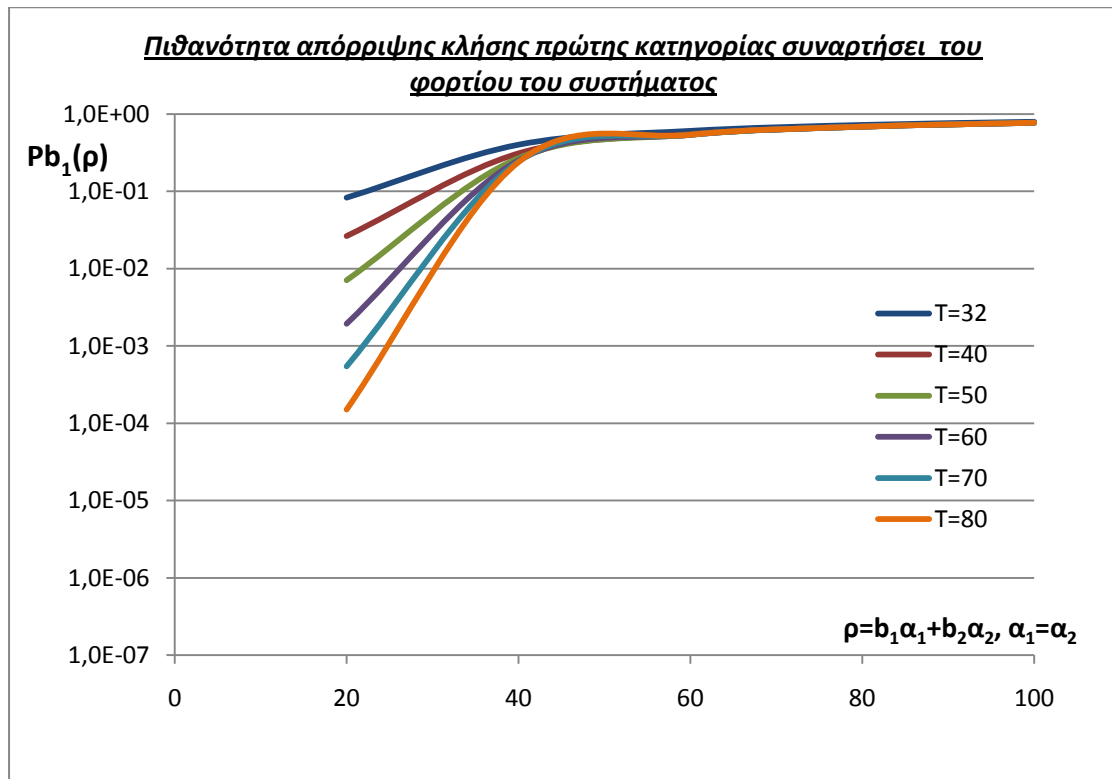
---

εξυπηρέτησης που αυξάνεται απαγορευτικά. Συγκεκριμένα, για φορτίο κίνησης  $\alpha=20$ , η μέγιστη δυνατή βελτίωση της απόδοσης του συστήματος προκύπτει για την περίπτωση  $T=40$  καθώς οι τιμές των CBPs αυτής συμπίπτουν σχεδόν απόλυτα (ακρίβεια τουλάχιστον δύο δεκαδικών ψηφίων) με τις αντίστοιχες των  $T=50,60,70,80$  με αποτέλεσμα η επίδραση των υπόλοιπων περιπτώσεων στο σύστημα να είναι μόνο αρνητική λόγω της συνεχής αύξησης του χρόνου εξυπηρέτησης. Αυτό είναι λογικό για το συγκεκριμένο παράδειγμα αρκεί να αναλογιστούμε πως η μεταβολή του φορτίου κίνησης οφείλεται καθαρά σε αύξηση μόνο του ρυθμού άφιξης των κλήσεων που καθιστά δυσκολότερη τη διαχείριση αυτών από το συγκεκριμένο σύστημα. Επιπροσθέτως, συμπεραίνουμε πως οι αποκλίσεις ανάμεσα στα δύο μοντέλα αυξάνονται αρκετά για μεγάλα φορτία κίνησης, καθώς γίνεται συχνότερα η εφαρμογή του μηχανισμού συμπίεσης που είναι διαφορετικός για τα δύο ελαστικά μοντέλα, ενώ αποκλίνουν ικανοποιητικά για τα μικρότερα. Επομένως για τα μεγάλα φορτία κίνησης τα προκύπτοντα αριθμητικά δεδομένα του συστήματος που προσομοιώνουμε δεν καθίστανται αξιόπιστα προς εξαγωγή ασφαλούς συμπεράσματος για την συμπεριφορά του.

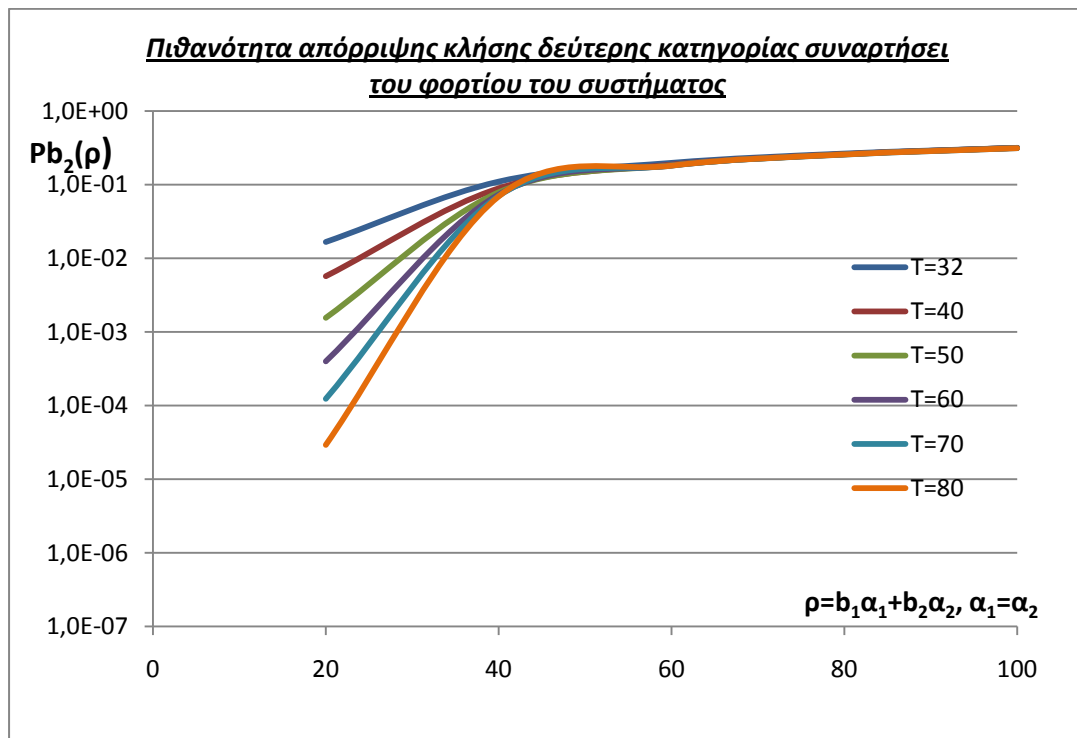
Εν κατακλείδι, η χρήση ελαστικής θεωρίας από ένα σύστημα πολυδιάστατης κίνησης για την διαχείριση της κίνησης σε ώρες αιχμής προς βελτίωση της απόδοσης του, κρίνεται αρκετά ικανοποιητική αρκεί η επιλογή του ελάχιστου παράγοντα συμπίεσης του εύρους ζώνης των κλήσεων  $r_{\min} = \frac{c}{T}$  να μην επιφέρει υπερβολική αύξηση του χρόνου εξυπηρέτησης. Με άλλα λόγια, η εφαρμογή της με σκοπό την βελτιστοποίηση του GoS να μην υποσκελίζει την ποιότητα παροχής υπηρεσιών.

Θέλοντας να ολοκληρώσουμε την απεικόνιση της αριθμητικής ανάλυσης η οποία έλαβε χώρα κατά την εκπόνηση της εργασίας αυτής, ακολούθως παραθέτονται τα διαγράμματα των παραμέτρων που υπολογίστηκαν, συναρτήσει του φορτίου του συστήματος που ορίζεται ως  $\rho = \alpha_1 * b_1 + \alpha_2 * b_2$  και τα οποία διαγράμματα είναι παρόμοια με τα αντίστοιχα που παράγονται από το μοντέλο του Κουκουλίδη.

4. Διαγράμματα παραμέτρων για το ελαστικό μοντέλο

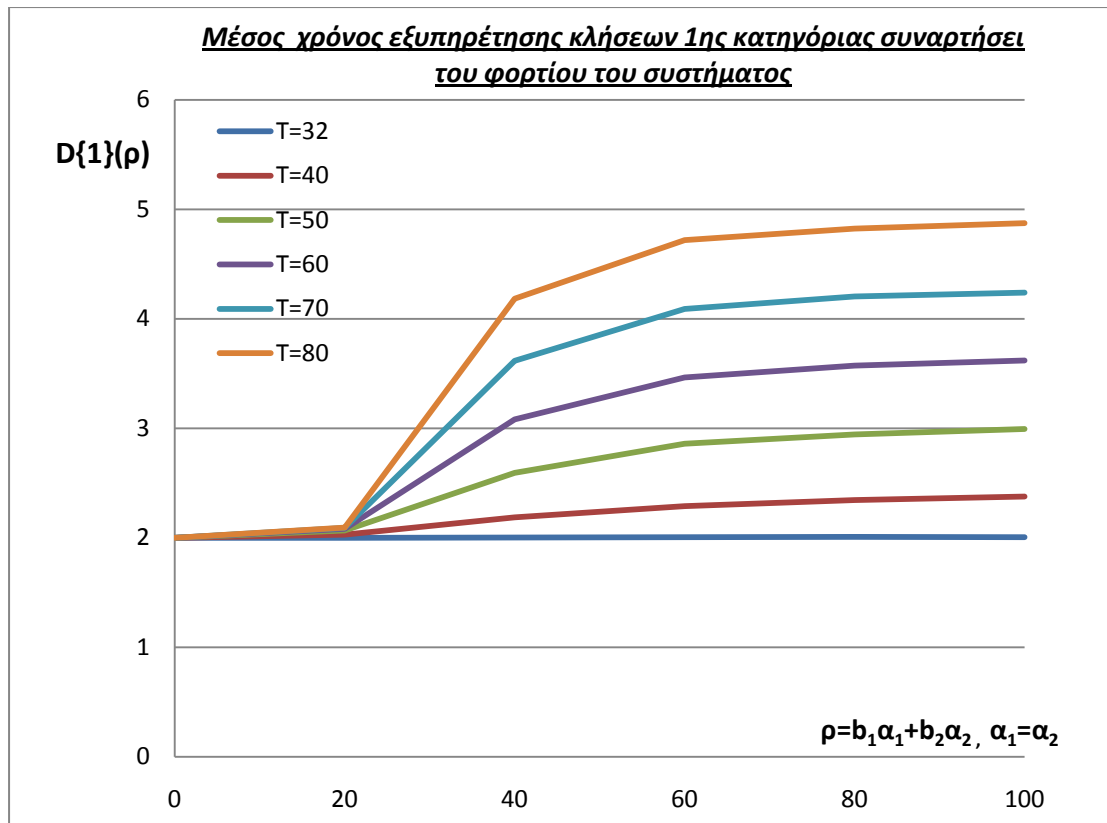


Σχήμα 4.1 Επίδραση του φορτίου κίνησης στην  $CBP_1$  για τα διάφορα  $T$ .

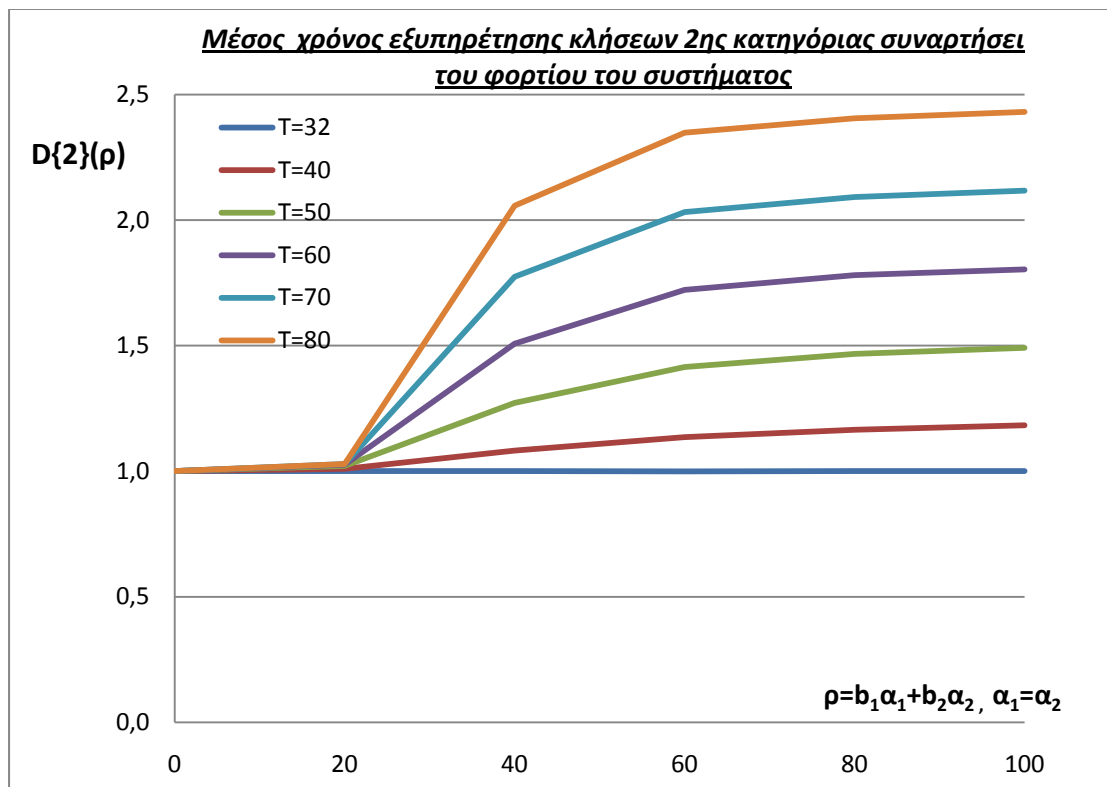


Σχήμα 4.2 Επίδραση του φορτίου κίνησης στην  $CBP_2$  για τα διάφορα  $T$ .

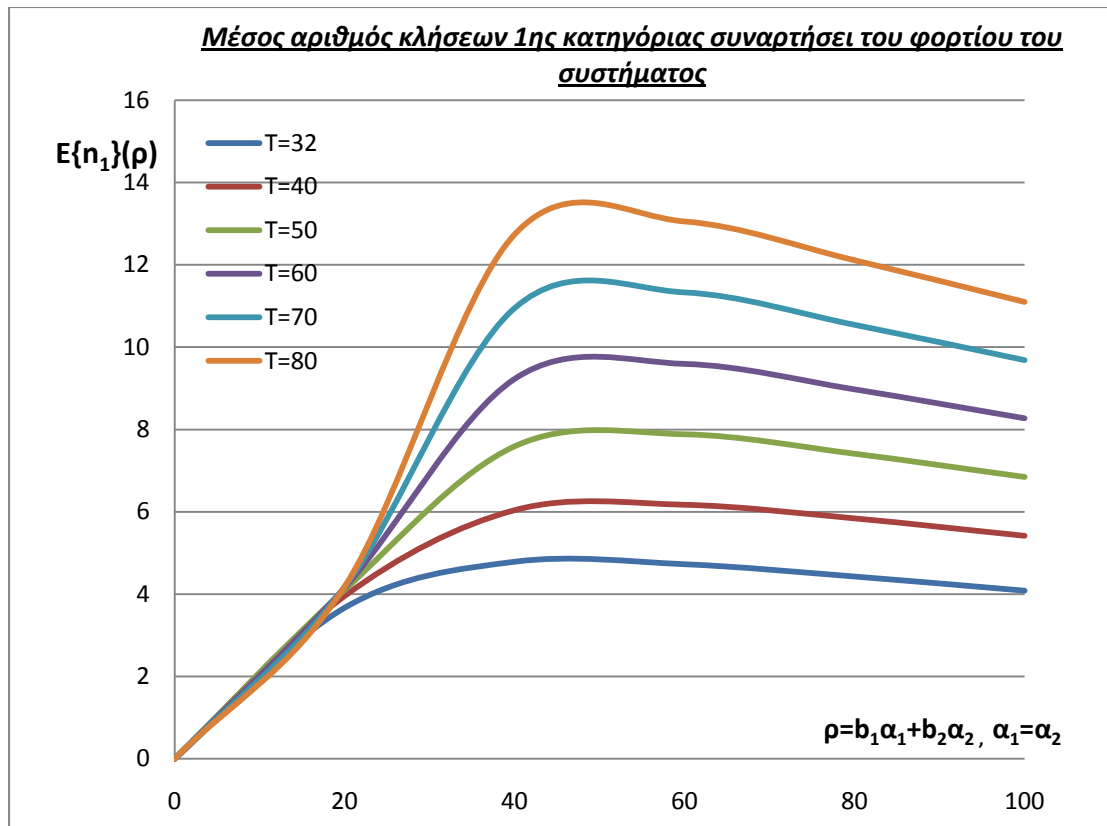




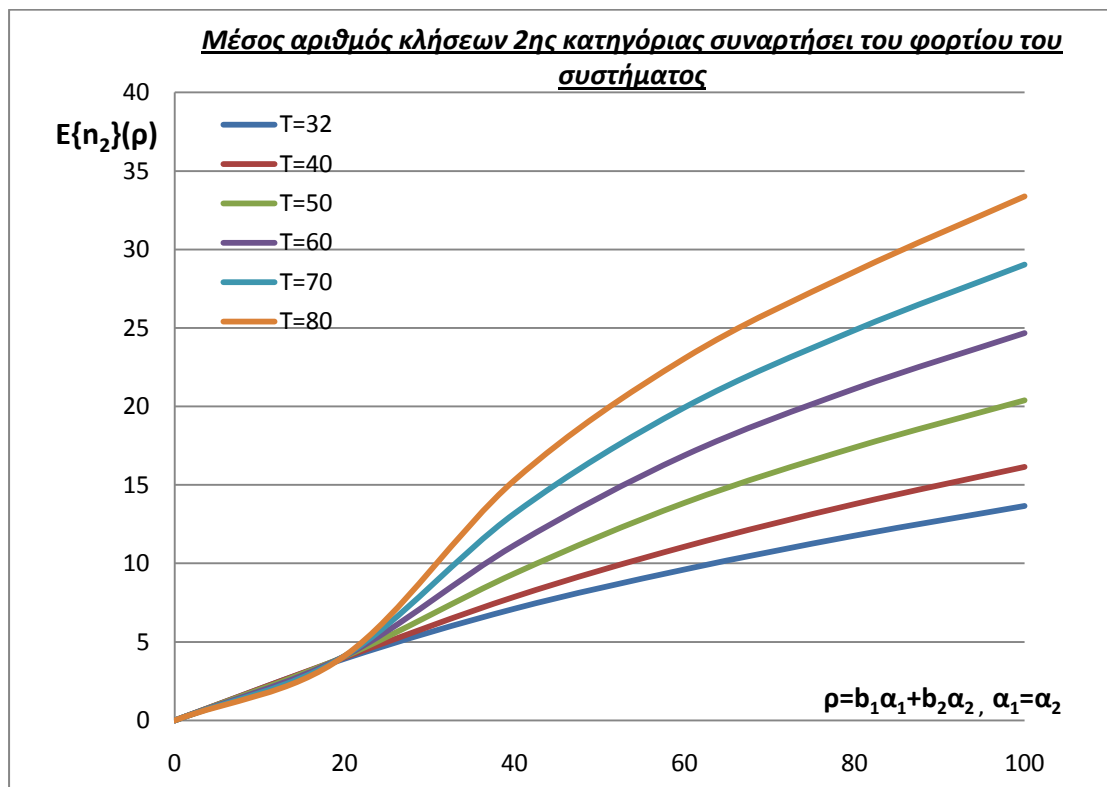
**Σχήμα 4.3** Επίδραση του φορτίου κίνησης στο μέσο χρόνο εξυπηρέτησης των κλήσεων της πρώτης κατηγορίας για τα διάφορα  $T$ .



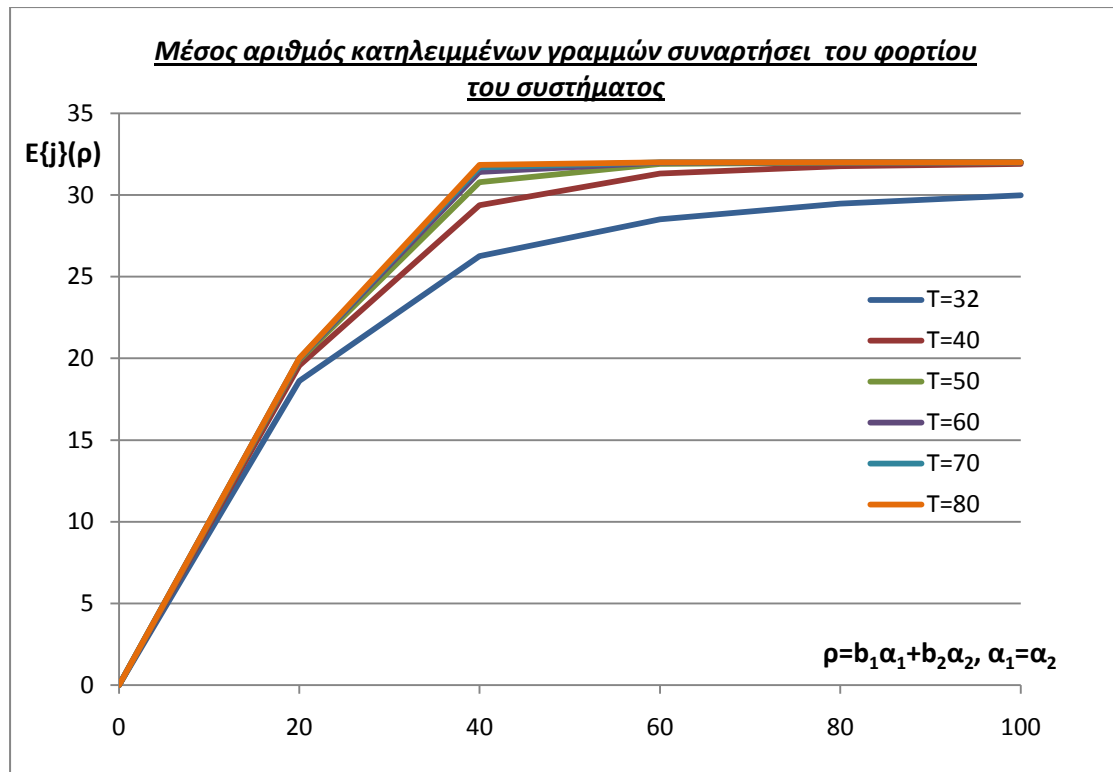
**Σχήμα 4.4** Επίδραση του φορτίου κίνησης στο μέσο χρόνο εξυπηρέτησης των κλήσεων της δεύτερης κατηγορίας για τα διάφορα  $T$ .



**Σχήμα 4.5** Επίδραση του φορτίου κίνησης στο μέσο αριθμό των κλήσεων της πρώτης κατηγορίας που υπάρχουν στο σύστημα για τα διάφορα  $T$ .



**Σχήμα 4.6** Επίδραση του φορτίου κίνησης στο μέσο αριθμό των κλήσεων της δεύτερης κατηγορίας που υπάρχουν στο σύστημα για τα διάφορα  $T$ .



*Σχήμα 4.7 Επίδραση του φορτίου κίνησης στο μέσο αριθμό κατειλημμένων εξυπηρετητών για τα διάφορα T.*

---

## ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Η παρούσα εργασία αποτελεί μια απόπειρα ανάλυσης των συστημάτων απωλειών που εξυπηρετούν ελαστική κίνηση. Αρχικά αναφέρθηκαν οι βασικές αρχές της Θεωρίας Τηλεπικοινωνιακής Κίνησης και τα διαδεδομένα μοντέλα για μονοδιάστατη και πολυδιάστατη κίνηση. Εν συνεχεία, λόγω τόσο των περιορισμένων πόρων των υπηρεσιών όσο και των αυξημένων απαιτήσεων των συνδρομητών στη σύγχρονη εποχή, έγινε μελέτη της εφαρμογής ενός ελαστικού τηλεπικοινωνιακού μοντέλου σε συστήματα μονοδιάστατης και πολυδιάστατης κίνησης και αποδείχθηκε η βελτίωση που υφίστανται τα συστήματα αυτά όσον αφορά την απόδοση τους, με την εξαγωγή του GoS.

Συγκεκριμένα, παρουσιάστηκε η συλλογιστική του ελαστικού μοντέλου για την μείωση του GoS, δηλαδή της συμπίεσης του εύρους ζώνης των κλήσεων με ταυτόχρονη αύξηση του χρόνου εξυπηρέτησης τους ώστε να διατηρείται πάντα σταθερό το γινόμενο (εύρος ζώνης) x (χρόνος εξυπηρέτησης). Δόθηκε επίσης ιδιαίτερη σημασία στο μέγεθος της συμπίεσης που υπόκεινται οι κλήσεις ώστε η εφαρμογή της ελαστικής θεωρίας να επιδρά μόνο ωφέλιμα στο σύστημα. Εν συνεχεία, αφού εξηγήθηκε η αιτία για την οποία το ελαστικό μοντέλο δεν μπορεί να εκφραστεί από αναδρομική σχέση, μελετήθηκε ο αναδρομικός τύπος του Κουκουλίδη ο οποίος αποδείχθηκε πως προσεγγίζει σε αρκετά ικανοποιητικό βαθμό το ελαστικό μοντέλο για τα συστήματα που εξυπηρετούν ελαστική κίνηση. Τέλος, μέσα από τα αποτελέσματα της υπολογιστικής ανάλυσης έγιναν σαφή τόσο το μέγεθος της βελτίωσης στην απόδοση των συστημάτων απωλειών από την εφαρμογή της ελαστικής θεωρίας όσο και το όριο συμπίεσης του εύρους ζώνης ανάλογα με την προσφερόμενη κίνηση.

Εν κατακλείδι, η εφαρμογή της ελαστικής θεωρίας στις τηλεπικοινωνίες ως ιδέα μπορεί να συνδυαστεί με άλλες επεκτάσεις της Θεωρίας Τηλεπικοινωνιακής Κίνησης, όπως π.χ. η εναλλακτική δρομολόγηση, τεχνικές δέσμευσης εύρους ζώνης (bandwidth/trunk reservation) κλπ. Σε κάθε περίπτωση το αντικείμενο είναι ιδιαίτερα ευρύ και ενδιαφέρον, ενώ παράλληλα η εξέλιξη του αναμένεται να βελτιώσει τις παρεχόμενες υπηρεσίες στους πολυάριθμους τελικούς χρήστες, που τελικά είναι και το ζητούμενο της επιστήμης.



---

# **ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ**

---

# ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

## Πηγαίος κώδικας της προσομοίωσης του ελαστικού μοντέλου

# Ορίζουμε τις διαδικασίες της προσομοίωσης και τις μεταβλητές

PREAMBLE

processes include klsh , timer , and generator

every generator has a gen.num

every klsh has a call.num , an unloading , a finished.time , an arrival.time and a bw

# Το stm είναι συντομογραφία του συστήματος, δηλαδή κάθε κλήση ανήκει στο σύστημα

and may belong to the stm

the system owns the stm

define samples as integer variable

define call.num and gen.num as integer variables

define bw as a real variable

define number as an integer variable

define sum\_of\_calls as an integer, 1-dimensional array

define mit as a double, 1-dimensional array

define mst as a double, 1-dimensional array

define typical\_bw as a real, 1-dimensional array

define unloading as double variable

define classes , actual\_used\_capacity , trunks , occupied\_trunks and max\_trunks as real variables

define accepted\_calls as an integer, 1-dimensional array

define blocked\_calls as integer, 1-dimensional array

define cis as an integer, 1-dimensional array

define summary as a real, 1-dimensional array

define NB as an integer variable

define serv.time , band.new and band.old as real variables

define i , calls and transit as integer variables

define capacity and new\_capacity as real variables

define stream1 and stream2 as integer variables

define flag as an integer variable

end

MAIN

print 1 line thus

----- ELASTIC MODEL -----

# Ορίζουμε το αρχείο από το οποίο το πρόγραμμα θα λαμβάνει τις μεταβλητές

open unit 1 for input, file name is "input1.txt"

use unit 1 for input

read classes,calls,transit,stream1,stream2,trunks,max\_trunks

reserve summary(\*) as classes

reserve mit(\*) as classes

reserve mst(\*) as classes

reserve sum\_of\_calls(\*) as classes

reserve typical\_bw(\*) as classes

reserve accepted\_calls(\*) as classes

reserve blocked\_calls(\*) as classes

reserve cis(\*) as classes

---

# Ορίζονται αρχικές τιμές για τον αριθμό των δειγμάτων του μετρητή (δειγματοληψία), για τον αριθμό των κατειλημμένων εξυπηρετητών και για τον αριθμό των κλήσεων κάθε κατηγορίας που προκύπτει από το άθροισμα των κλήσεων κάθε κατηγορίας σε κάθε μέτρηση.

```
let samples = 0
let occupied_trunks = 0
for j = 1 to classes
do
sum_of_calls(j) = 0
loop
```

# Ορίζονται ως αρχικές τιμές για τους πόρους C και την θεωρητική χωρητικότητα T του συστήματος αυτές που καθορίζονται στην είσοδο.

```
let capacity=trunks
let new_capacity=max_trunks
```

# Διαβάζονται οι τιμές από το αρχείο εισόδου για το ρυθμό άφιξης, το μέσο χρόνο εξυπηρέτησης και την αρχική (υψηλή) απαίτηση εύρους ζώνης των κλήσεων κάθε κατηγορίας και εκκινούν η διαδικασίες γέννησης κλήσεων κάθε κατηγορίας.

```
for j = 1 to classes
do
read mit(j),mst(j) and typical_bw(j)
activate a generator(j) now
loop
close unit 1
```

# Εκκινεί η διαδικασία δειγματοληψίας

```
activate a timer now
start simulation
```

# Ορίζουμε το αρχείο εξόδου (output.txt) στο οποίο θα εκτυπώνονται τα αποτελέσματα της προσομοίωσης.

```
open unit 2 for output, file name is "output.txt"
use unit 2 for output
```

# Ορίζεται το πηλίκο που δίνει την συνολική πιθανότητα απώλειας των κλήσεων κάθε κατηγορίας και εκτυπώνονται στο αρχείο εξόδου.

```
for j = 1 to classes
do
if j=1
print 2 lines with j , blocked_calls(j)/(blocked_calls(j) + accepted_calls(j)) and
100*blocked_calls(j)/(blocked_calls(j) + accepted_calls(j)) thus
Blocking Probability for the *st category's calls is *.*****(***.***%)
```

```
else
print 1 line with j , blocked_calls(j)/(blocked_calls(j) + accepted_calls(j)) and
100*blocked_calls(j)/(blocked_calls(j) + accepted_calls(j)) thus
Blocking Probability for the *nd category's calls is *.*****(***.***%)
endif
loop
skip 1 line
```

# Για κάθε κατηγορία κλήσεων ορίζεται και εκτυπώνεται ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης από την προσομοίωση, εκτυπώνεται ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης από το αρχείο εισόδου και ορίζεται και εκτυπώνεται η ποσοστιαία μεταβολή που



---

εκφράζει την αύξηση του χρόνου εξυπηρέτησης λόγω εφαρμογής της ελαστικής θεωρίας.

```
for j = 1 to classes
do
if j = 1
print 9 lines with j , summary(j)/accepted_calls(j) , j , 1/mst(j) , j ,
((summary(j)/accepted_calls(j))-(1/mst(j)))*100 thus
```

```
-----
Simulation's mean service time (*st Category) = ***.*****
Theory's mean service time (*st Category) = ***.**
```

```
---SIMULATION'S DELAY (*st category's calls)---
```

We have \*\*\*.\*\*\*\*\*% mean percentage increase of service time due to the use of elastic theory

```
-----
else
print 9 lines with j , summary(j)/accepted_calls(j) , j , 1/mst(j) , j ,
((summary(j)/accepted_calls(j))-(1/mst(j)))*100 thus
```

```
-----
Simulation's mean service time (*nd Category) = ***.*****
Theory's mean service time (*nd Category) = ***.**
```

```
---SIMULATION'S DELAY (*nd category's calls)---
```

So we have \*\*\*.\*\*\*\*\*% mean percentage increase of service time due to the use of elastic theory

```
-----
endif
loop
skip 1 line
```

# Ορίζεται και εκτυπώνεται το πηλίκο που δίνει το μέσο αριθμό των κλήσεων κάθε κατηγορίας που εξυπηρετούνται από το σύστημα.

```
for j = 1 to classes
do
if j = 1
print 4 lines with j , j , sum_of_calls(j)/samples thus
Average number of *st category's calls in system :
```

```
E(*) = ***.*****
```

```
else
print 4 lines with j , j , sum_of_calls(j)/samples thus
Average number of *nd category's calls in system :
```

```
E(*) = ***.*****
```

```
endif
loop
```

# Ορίζεται και εκτυπώνεται ο μέσος αριθμός των κατειλημμένων εξυπηρετητών στο σύστημα.

```
print 3 lines with occupied_trunks/samples thus
Average occupied trunks in system :
```

```
E(j) = ***.*****
```

---

```

skip 1 line
# Ορίζονται και εκτυπώνονται η συνολική διάρκεια της προσομοίωσης και ο αριθμός
των δειγμάτων.
print 2 lines with time.v*hours.v and samples thus
SIMULATION TIME = ****.**** HOURS
SAMPLES = ****

close unit 2
skip 1 line
print 3 lines thus
#####
PRESS ENTER TO EXIT...
#####
read as /
end

# Περιγράφεται η διαδικασία γέννησης κλήσεων, από 1 μέχρι τον αριθμό που έχουμε
θέσει στην είσοδο.
process generator(number)

for i = 1 to calls
do
activate a klsh(number) now
# οι κλήσεις καταφθάνουν με ρυθμό  $\lambda_i$  όπου  $i=1, \dots, K$  οι κατηγορίες κίνησης
wait exponential.f(1/mit(number),stream2) minutes
loop
end

# Περιγράφεται η διαδικασία εξυπηρέτησης κλήσεων. Αν υπάρχουν πόροι
εξυπηρετούνται με την αρχική απαίτηση τους σε εύρος ζώνης, αλλιώς ενεργοποιείται
η διαδικασία συμπίεσης προκύπτουσα από τη θεωρία ελαστικότητας.
process klsh(number)

define this.call as an integer variable
let this.call = klsh
let bw(this.call) = typical_bw(number)
let unloading(this.call) = exponential.f(1/mst(number),stream1)
let flag=0

if capacity >= actual_used_capacity + bw(this.call)

if i > transit
add 1 to accepted_calls(number)
endif

file this.call in the stm
add 1 to cis(number)

subtract bw(this.call) from trunks
add bw(this.call) to actual_used_capacity
let arrival.time(this.call) = time.v

```

---

---

```

work unloading(this.call) minutes
let finished.time(this.call) = time.v
# Υπολογίζεται ο χρόνος που απαιτήθηκε για την εξυπηρέτηση της κλήσης. Το
αποτέλεσμα πολλαπλασιάζεται με το 1440 για την μετατροπή του σε λεπτά καθώς
στην Simscript η default μονάδα μέτρησης είναι οι ώρες.
let serv.time = (finished.time(this.call)-arrival.time(this.call))*1440
if i>transit
add serv.time to summary(number)
endif
# Εάν μετά την εξυπηρέτηση της κλήσης το σύστημα βρίσκεται ακόμα σε κατάσταση
συμπίεσης, καλείται η διαδικασία leaving στην οποία εκτελούνται οι ενέργειες
μοιράσματος του εύρους ζώνης που καταλάμβανε η κλήση που αφήνει το σύστημα
και της μείωσης του χρόνου εξυπηρέτησης στις υπόλοιπες κλήσεις που
εξυπηρετούνται στο σύστημα όπως ορίζεται από την ελαστική θεωρία.
if actual_used_capacity >= capacity or bw(this.call) < typical_bw(number)
add bw(this.call) to trunks
subtract bw(this.call) from actual_used_capacity
call leaving given this.call
let flag = 1
# Το σύστημα δεν εξυπηρετεί ή σταματάει να εξυπηρετεί ελαστική κίνηση.
Επομένως η κλήση το αφήνει και οι υπόλοιπες κλήσεις που εξυπηρετούνται ή
παραμένουν ανεπηρέαστες (εφόσον δεν έχουν υποστεί συμπίεση) ή επαναφέρεται η
αρχική τους απαίτηση σε εύρος ζώνης με ταυτόχρονη μείωση του χρόνου
εξυπηρέτησης τους.
else
add bw(this.call) to trunks
subtract bw(this.call) from actual_used_capacity
remove this.call from the stm
subtract 1 from cis(number)
let flag = 0
endif
always
# Δίνεται αρχική τιμή για το NB που εκφράζει το άθροισμα  $j = \sum_{i=1}^k n_i * b_i$  (δηλαδή
τον αριθμό των κατειλημμένων εξυπηρετητών).
let NB = 0
for j = 1 to classes
do
NB = NB + cis(j)*typical_bw(j)
loop

if new_capacity > capacity
if flag = 0
# Ενεργοποιείται η διαδικασία συμπίεσης κατά την άφιξη της νέας κλήσης με το
κάλεσμα της ρουτίνας arriving στην οποία εκτελούνται οι διαδικασίες συμπίεσης
εύρους ζώνης και αύξησης του χρόνου εξυπηρέτησης της νέας κλήσης και των
κλήσεων που εξυπηρετούνται όπως προβλέπει η ελαστική θεωρία.
if actual_used_capacity + bw(this.call) > capacity and new_capacity >= NB + bw(this.call)

if i > transit
add 1 to accepted_calls(number)
endif
call arriving given this.call
file this.call in the stm

```

---

---

```
add 1 to cis(number)
subtract bw(this.call) from trunks

add bw(this.call) to actual_used_capacity
let arrival.time(this.call) = time.v
work unloading(this.call) minutes
let finished.time(this.call) = time.v
let serv.time = (finished.time(this.call)-arrival.time(this.call))*1440
if i>transit
  add serv.time to summary(number)
endif
```

# Εάν μετά την εξυπηρέτηση της κλήσης το σύστημα βρίσκεται ακόμα σε κατάσταση συμπίεσης, καλείται η διαδικασία leaving στην οποία εκτελούνται οι ενέργειες μοιράσματος του εύρους ζώνης που καταλάμβανε η κλήση που αφήνει το σύστημα και της μείωσης του χρόνου εξυπηρέτησης στις υπόλοιπες κλήσεις που εξυπηρετούνται στο σύστημα όπως ορίζεται από την ελαστική θεωρία.

```
if actual_used_capacity >= capacity or bw(this.call) < typical_bw(number)
```

```
add bw(this.call) to trunks
subtract bw(this.call) from actual_used_capacity
call leaving given this.call
```

# Το σύστημα δεν εξυπηρετεί ή σταματάει να εξυπηρετεί ελαστική κίνηση. Επομένως η κλήση αφήνει το σύστημα και οι υπόλοιπες κλήσεις που εξυπηρετούνται ή παραμένουν ανεπηρέαστες (εφόσον δεν έχουν υποστεί συμπίεση) ή επαναφέρεται η αρχική τους απαίτηση σε εύρος ζώνης με ταυτόχρονη μείωση του χρόνου εξυπηρέτησης τους.

```
else
  add bw(this.call) to trunks
  subtract bw(this.call) from actual_used_capacity
  remove this.call from the stm
  subtract 1 from cis(number)
endif
endif
```

```
endif
endif
```

# Κατά την άφιξη της νέας κλήσης, οι κλήσεις που εξυπηρετούνται στο σύστημα έχουν υποστεί την μέγιστη ανεκτή συμπίεση στο εύρος ζώνης. Επομένως η νέα κλήση δεν μπορεί να εξυπηρετηθεί με συνέπεια να απορριφθεί από το σύστημα.

```
if new_capacity < NB + bw(this.call)
  if i > transit
    add 1 to blocked_calls(number)
  endif
endif
```

```
end
```

# Περιγράφεται η διαδικασία δειγματοληψίας (μετρητής).

```
process TIMER
until i>=calls
do
if i > transit
for j = 1 to classes
do
sum_of_calls(j) = sum_of_calls(j) + cis(j)
```

---

```
loop
let occupied_trunks = occupied_trunks + capacity - trunks
add 1 to samples
endif
wait 0.5 minutes
loop
end
```

**# Περιγράφεται η διαδικασία της ρουτίνας arriving.**

```
routine arriving given new.call
```

```
define num as an integer variable
define new.call as an integer variable
define factor as a double variable
let num = call.num(new.call)
```

```
let NB = 0
for j = 1 to classes
do
NB = NB + cis(j)*typical_bw(j)
loop
```

**# Εκτελείται η διαδικασία συμπίεσης της νέας κλήσης.**

```
let factor = capacity/(NB + bw(new.call))
let unloading(new.call)=unloading(new.call)*bw(new.call)
let bw(new.call) = typical_bw(num)*factor
let unloading(new.call)=unloading(new.call)/bw(new.call)
```

**# Εκτελείται η διαδικασία συμπίεσης των κλήσεων που εξυπηρετούνται.**

```
for each klsh on stm
do
interrupt klsh
let band.old = bw(klsh)
let bw(klsh) = typical_bw(call.num(klsh))*factor
let band.new = bw(klsh)
let time.a(klsh) = time.a(klsh)*(band.old/band.new)
add (band.old-band.new) to trunks
resume klsh
subtract (band.old-band.new) from actual_used_capacity
loop
```

```
end
```

**# Περιγράφεται η διαδικασία της ρουτίνας leaving.**

```
routine leaving given leaving.call
```

```
define num as an integer variable
define leaving.call as an integer variable
define factor2 as a double variable
let num = call.num(leaving.call)
```

```
remove leaving.call from the stm
subtract 1 from cis(num)
```

```
let NB = 0
```

---

```

for j = 1 to classes
do
  NB = NB + cis(j)*typical_bw(j)
loop

# Μετά την απομάκρυνση της εξυπηρετηθείσας κλήσης εκτελείται η διαδικασία από-
# συμπίεσης των υπολοίπων κλήσεων του συστήματος στην περίπτωση κατά την οποία
# το σύστημα συνεχίζει να εξυπηρετεί ελαστική κίνηση.
  let factor2 = capacity/NB

  if NB >= capacity
  for each klsh on stm
  do
  interrupt klsh
  let band.old = bw(klsh)
  let bw(klsh) = factor2*typical_bw(call.num(klsh))
  let band.new = bw(klsh)
  let time.a(klsh) = time.a(klsh)*(band.old/band.new)
  subtract (band.new - band.old) from trunks
  resume klsh
  add (band.new - band.old) to actual_used_capacity
  loop

# Μετά την απομάκρυνση της εξυπηρετηθείσας κλήσης εκτελείται η διαδικασία από-
# συμπίεσης των υπολοίπων κλήσεων του συστήματος στην περίπτωση κατά την οποία
# το σύστημα δεν εξυπηρετεί ελαστική κίνηση (στις κλήσεις δίνεται η αρχική τους
# απαίτηση σε εύρος ζώνης).
  else
  for each klsh on stm
  do
  interrupt klsh
  let band.old = bw(klsh)
  let bw(klsh) = typical_bw(call.num(klsh))
  let band.new = bw(klsh)
  let time.a(klsh) = time.a(klsh)*(band.old/band.new)
  subtract (band.new - band.old) from trunks
  resume klsh
  add (band.new - band.old) to actual_used_capacity
  loop

  endif
end

```

---

Παρατηρήσεις : Στον παραπάνω πηγαίο κώδικα οι μεταβλητές που έχουν δοθεί εκφράζουν κατά σειρά :

- **bw** : Εκφράζει το εύρος ζώνης που καταλαμβάνουν οι κλήσεις προς εξυπηρέτηση τους
- **number** : Εκφράζει τον αριθμό της κατηγορίας κίνησης στην οποία ανήκει η κάθε κλήση.
- **sum\_of\_calls** : Εκφράζει τον αριθμό των κλήσεων κάθε κατηγορίας που προκύπτει από το άθροισμα των κλήσεων κάθε κατηγορίας σε κάθε μέτρηση κατά τη δειγματοληψία.
- **mit** : Εκφράζει το μέσο ρυθμό άφιξης των κλήσεων κάθε κατηγορίας λ.
- **mst** : Εκφράζει το ρυθμό εξυπηρέτησης των κλήσεων κάθε κατηγορίας στην μονάδα του χρόνου μ.
- **typical\_bw** : Εκφράζει την αρχική (υψηλή) απαίτηση εύρους ζώνης των κλήσεων για κάθε κατηγορία.
- **unloading** : Εκφράζει το χρόνο εξυπηρέτησης των κλήσεων.
- **classes** : Εκφράζει τον αριθμό των κατηγοριών κίνησης.
- **actual\_used\_capacity** : Εκφράζει την στιγμιαία τιμή των κατειλημμένων εξυπηρετητών στο σύστημα κάθε φορά που καταφθάνει ή φεύγει μία κλήση.
- **accepted\_calls** : Εκφράζει τον συνολικό αριθμό των δεκτών κλήσεων κάθε κατηγορίας στο σύστημα.
- **blocked\_calls** : Εκφράζει τον συνολικό αριθμό των αποκλεισμένων κλήσεων κάθε κατηγορίας από το σύστημα.
- **cis** : Εκφράζει τον στιγμιαίο αριθμό των κλήσεων κάθε κατηγορίας που εξυπηρετούνται από το σύστημα.
- **summary** : Χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του μέσου χρόνου εξυπηρέτησης του ελαστικού συστήματος.
- **band.new και band.old** : Χρησιμοποιούνται στις ρουτίνες για να δηλώνουν την τιμή του εύρους ζώνης πριν και μετά τη συμπίεση.
- **transit** : Εκφράζει τον αριθμό των κλήσεων που δεν λαμβάνονται υπόψη κατά την εξαγωγή των αποτελεσμάτων καθώς θεωρούμε πως μετά από αυτό τον αριθμό κλήσεων το σύστημα βρίσκεται σε σταθερή κατάσταση.

Επιπροσθέτως τονίζεται πως κάθε κατηγορία κίνησης έχει τις δικές τις τιμές για τις μεταβλητές `summary`, `mit`, `mst`, `sum_of_calls`, `blocked_calls`, `accepted_calls`, `cis` και `typical_bw`, με τη χρήση της εντολής «`reserve ...(*) to classes`». Για παράδειγμα αν υποθέσουμε πως εξυπηρετούνται δύο κατηγορίες κίνησης, οπότε `classes=2`, τότε θα υπάρχουν δύο τιμές αρχικής απαίτησης εύρους ζώνης ως `typical_bw(1)` και `typical_bw(2)`.

---

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

### Πηγαίος κώδικας υλοποίησης της φόρμουλας του Κουκουλίδη (KRK.m)

```
%Δηλώνεται ο αριθμός των δεκαδικών ψηφίων των αποτελεσμάτων.
format short
%Ορίζονται τα εξής:
%Πραγματική χωρητικότητα του συστήματος.
C = 32;
%Θεωρητική τιμή της χωρητικότητας για εφαρμογή του μοντέλου ελαστικότητας.
T = 50;
%Ο αριθμός των κατηγοριών κλήσεων k.
k = 2;
%Οι βασικές απαιτήσεις εύρους ζώνης για κάθε κατηγορία κλήσεων b(i)
b=[4 1] ;
%Ο ρυθμός άφιξης των κλήσεων κάθε κατηγορίας λ(i)
lamda=[10 20] ;
%Ο ρυθμός εξυπηρέτησης των κλήσεων κάθε κατηγορίας στην μονάδα του χρόνου
%μ(i)
m=[0.5 1];
%Ακολουθώς, πρέπει να βρεθούν τα q(j), για j=1,2,...,T
%Επειδή q(j)=0 για j<0, προφανώς μας ενδιαφέρουν κάθε φορά τα j που είναι
%μεγαλύτερα από το εκάστοτε b(i)
%Επειδή τα q(j) είναι κοινά για όλες τις κατηγορίες κλήσεων, θα δημιουργηθεί ένας
%πίνακας, διάστασης 1xT για να εισαχθούν εκεί οι τιμές που θα υπολογίζονται.
q=ones(1,T);
%Επίσης ορίζεται ένας πίνακας y με τις τιμές των εκάστοτε q(j-b(i))
y=zeros(T,K);
%Τέλος δημιουργούνται ένας πίνακας με το φορτίο κίνησης των κλήσεων για κάθε
%κατηγορία, ένας πίνακα B με τα blocking probabilities, ένας πίνακας F με τα μη
%κανονικοποιημένα αθροίσματα q καθώς και ένας πίνακας W για τα εκάστοτε
%T-b(i)+1.
a=zeros(1,K);
B=zeros(1,K);
F=zeros(1,K);
W=zeros(1,K);
%Χρησιμοποιείται ο ορισμός του φορτίου κίνησης.
for i=1:K
    a(i)=lamda(i)/m(i);
end
%Υπολογίζονται πρώτα τα q(j) για 0 ≤ j ≤ C καθώς βασιζόμενοι στον αναδρομικό
τύπο του %Κουκουλίδη ο τύπος διαφοροποιείται για j > C.
    for j=1:C
%Ορίζεται ως s το άθροισμα του αναδρομικού τύπου του Κουκουλίδη και του δίνεται
%αρχική τιμή.
        s=0;
        for i=1:K
            if j < b(i) , y(j,i)=0;
```



```

elseif j-b(i)== 0 , y(j,i)=1;
else
y(j,i)=q(j-b(i));
end
s=s+a(i)*b(i)*y(j,i);
end
q(j)=(j^(-1))*s;
end
%Υπολογίζονται τα q(j) για C + 1 ≤ j ≤ T .
for j=(C+1):T
s=0;
for i=1:K
if j < b(i), y(j,i)=0;
elseif j-b(i)== 0, y(j,i)=1;
else
y(j,i)=q(j-b(i));
end
s=s+a(i)*b(i)*y(j,i);
end
q(j)=(C^(-1))*s;
end
%Υπολογίζεται ο συντελεστής κανονικοποίησης των q
G=1+sum(q);
%Υπολογίζεται το κάτω όριο του αθροίσματος για την πιθανότητα απώλειας
for i=1:K
W(i)=T-b(i)+1;
end
%Υπολογίζεται ο αριθμητής του τύπου για την πιθανότητα απώλειας.
for i=1:K
for j=W(i):T
F(i)=F(i)+q(j);
end
end
%Υπολογίζεται η πιθανότητα απώλειας κλήσης κάθε κατηγορίας.
for i=1:K
B(i)=F(i)/G;
end
%Υπολογίζεται με τη χρήση του ορισμού της μέσης τιμής ο μέσος αριθμός των
%κατελιημμένων εξυπηρετητών. Ο ορισμός αυτός για το μοντέλο του Κουκουλίδη
έχει %μαθηματική έκφραση  $E(j) = \sum_{j=0}^C j * q(j) + \sum_{j=C+1}^T C * q(j)$  .
ss1=0;
for j=1:C
ss1=ss1+j*q(1,j);
end
ss2=0;
for j=C+1:T
ss2=ss2+C*q(1,j);
end
%Εκτυπώνεται η πιθανότητα απώλειας κλήσης κάθε κατηγορίας.
B;
fprintf ('Blocking Elastic = %1.6f\n',B)
%Ορίζεται και εκτυπώνεται ο μέσος αριθμός των κατελιημμένων εξυπηρετητών όπου
%η διαίρεση με το συντελεστή κανονικοποίησης οφείλεται στο γεγονός πως στους

```

---

**%παραπάνω υπολογισμούς των αθροισμάτων ss1 και ss2 χρησιμοποιούνται μη  
%κανονικοποιημένα q.**  
Occupied\_Trunks = (ss1+ss2)/G

*Παρατήρηση* : Η διαίρεση των q με τον συντελεστή κανονικοποίησης είναι απαραίτητη για την εξαγωγή των σωστών αποτελεσμάτων. Εφόσον ο αναδρομικός τύπος υπολογισμού των q περιέχει άθροισμα, το τελικό αποτέλεσμα προφανώς δίνει αριθμό σαφώς πολύ μεγαλύτερο της μονάδας. Ωστόσο, τα q εκφράζουν πιθανότητα και ως γνωστόν η τιμή τους πρέπει να κυμαίνεται από 0 έως 1. Για να λυθεί επομένως το πρόβλημα αυτό, τα q διαιρούνται με τον συντελεστή κανονικοποίησης.

---

## **ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

1. Μ. Λογοθέτης, Θεωρία Τηλεπικοινωνιακής Κινήσεως και Εφαρμογές, Εκδόσεις Παπασωτηρίου, 2001
2. J. Kaufman, Blocking in a shared resource environment, IEEE Transactions on Communications, vol. 29, No. 10, 1981, pp. 1474–1481.
3. J. Roberts, A service system with heterogeneous user requirements—application to multi-service telecommunications systems. In G. Pujolle (Ed.), Proceedings of performance of data communications systems and their applications, 1981, (pp. 423–431). Amsterdam: North Holland.
4. Villy B. Iversen, Teletraffic Engineering and Network Planning, Jan. 2010 (available at: <http://oldwww.com.dtu.dk/education/34340/telenook.pdf>)
5. Frank P. Kelly, Reversibility and Stochastic Networks, Wiley, Chichester, 1979, reprinted 1987, 1994, ISBN : 0471276014.
6. Ι. Δ. Μοσχολιός, Σημειώσεις Μεταπτυχιακού Μαθήματος «Προχωρημένα Θέματα Δικτύων», Τμήμα Επιστήμης & Τεχνολογίας Τηλεπικοινωνιών, Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου, Ακαδημαϊκό Έτος 2009-2010.
7. V. Koukoulidis, "A Characterization of Reversible Markov Processes with Applications to Shared-Resource Environments", PhD Thesis, Concordia University, Montreal, Canada, April 1993.
8. G. Stamatelos and V. Koukoulidis, "Reservation Based Bandwidth Allocation in a Radio ATM Network", IEEE/ACM Trans. Networking, vol. 5, June 1997, pp.420-428.
9. <http://www.simsript.com/>