



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΛΟΠΟΝΝΗΣΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ
ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«Προηγμένα Τηλεπικοινωνιακά Συστήματα και Δίκτυα»

Πτυχιακή εργασία

με θέμα:

Μελέτη και Υλοποίηση Παλμών για Μηδενισμό της
Διασυμβολικής Παρεμβολής

του μεταπτυχιακού φοιτητή **Κυριάκο Δ. Γαζουλέα**

Επιβλέπων: Επίκ. Καθηγητής Νικόλαος Χ. Σαγιάς

Τρίπολη, Ιούνιος 2011

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Με το πέρας της πτυχιακής μου εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω τους ακόλουθους:

Τον επιβλέποντα καθηγητή μου **κ. Νικόλαο Χ. Σαγιά** για την καθοδήγηση και τη στήριξη που μου παρείχε κατά τη διάρκεια της εργασίας αυτής, καθώς η εμπειρία και οι γνώσεις του ήταν πολύτιμες.

Τον φίλο **Ευστάθιο Καγιά** για την πολύτιμη βοήθειά του για την εξαγωγή των αριθμητικών αποτελεσμάτων και των διαγραμμάτων της εργασίας αυτής σε περιβάλλον Matlab.

Τον φίλο **Μιχάλη Μπατιστάτο** για τις χρήσιμες συμβουλές του καθ'όλη τη διάρκεια της εργασίας αυτής.

Την συνάδελφο μαθηματικό **Ιωάννα Λαμπροπούλου** για την πολύτιμη βοήθεια που μου πρόσφερε κατά τη συγγραφή της εργασίας αυτής σε ηλεκτρονική μορφή.

Επιπλέον **τους Γονείς μου** για την διαρκή συμπαράσταση και αγάπη τους όλο αυτό το διάστημα.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η πτυχιακή εργασία αποσκοπεί στην ανάπτυξη νέων φίλτρων για τη δημιουργία παλμών μηδενισμού της διασυμβολικής παρεμβολής, με χαρακτηριστικά ενδεχομένως καλύτερα από τον κλασικό παλμό Nyquist (raised cosine), σε ασύρματα κανάλια περιορισμένου εύρους ζώνης. Η πτυχιακή εργασία περιλαμβάνει δύο φάσεις: Κατά την πρώτη φάση διερευνάται η διεθνής βιβλιογραφία και κατηγοριοποιούνται τα υπάρχοντα φίλτρα και γίνεται μελέτη της δομής των καναλιών περιορισμένου εύρους ζώνης και των προβλημάτων που προκύπτουν από τη διασυμβολική παρεμβολή. Κατά τη δεύτερη και κύρια φάση γίνεται κατασκευή νέων φίλτρων για τη δημιουργία παλμών μηδενισμού της διασυμβολικής παρεμβολής και γίνεται αριθμητικός υπολογισμός της πιθανότητας σφάλματος υπό την παρουσία jitter. Οι νέοι αυτοί παλμοί που κατασκευάστηκαν παρουσιάζουν βελτιωμένη πιθανότητα σφάλματος σε σχέση με την πιθανότητα σφάλματος του Nyquist παλμού. Η μελέτη και ανάπτυξη των φίλτρων αυτών γίνεται στο γραφικό περιβάλλον Matlab.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εισαγωγικές Έννοιες	8
1.1 Εισαγωγή στις ψηφιακές επικοινωνίες.....	8
1.2 Αναγκαιότητα των φίλτρων	9
1.3 Ιδανικά φίλτρα.....	11
1.3.1 Ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο	11
1.3.2 Ιδανικό υψιπερατό φίλτρο	11
1.3.3 Ιδανικό ζωνοπερατό φίλτρο	12
1.3.4 Ιδανικό ζωνοφρακτικό φίλτρο.....	12
1.4 Τα πραγματικά φίλτρα	13
1.5 Το πρόβλημα της διασυμβολικής παρεμβολής	13
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2.....	16
Κανάλια Περιορισμένου Εύρους Ζώνης.....	16
2.1 Εισαγωγή.....	16
2.2 Μετάδοση σήματος σε κανάλι περιορισμένου εύρους ζώνης.....	16
2.3 Διάγραμμα οφθαλμού.....	20
2.4 Θεώρημα-συνθήκες Nyquist	21
2.4.1 Απόδειξη της συνθήκης Nyquist.....	21
2.4.2 Πρώτη περίπτωση για τη συνθήκη του Nyquist.....	23
2.4.3 Δεύτερη περίπτωση για τη συνθήκη του Nyquist	23
2.4.4 Τρίτη περίπτωση για τη συνθήκη του Nyquist	24
2.5 Παλμοί Sinc.....	25
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3.....	27
Γνωστά Φίλτρα Αντιμετώπισης της Διαβολικής Παρεμβολής	27
3.1 Το φίλτρο ανυψωμένου συνημιτόνου ή raised cosine (RC)	27
3.1.1 Προσδιορισμός παραμέτρου a , τάξη διαμόρφωσης M σε ένα σύστημα M-PAM και ρυθμού μετάδοσης συμβόλων R_s , σύμφωνα με το [5].....	29
3.1.2 Υπολογισμός SNR και πιθανότητα σφάλματος σε M -PAM σύστημα, σύμφωνα με το [5]..	29
3.2 Root raised cosine filter (rrc).....	31
3.3 Gaussian filter.....	33
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4.....	35
Φαινόμενο Jitter και Παλμοί με Επιδόσεις Καλύτερες από τον Παλμό Nyquist.....	35
4.1 Εισαγωγή.....	35

Αυτό που μας ενδιαφέρει πάρα πολύ στα φίλτρα είναι το πώς συμπεριφέρονται σ'ένα πραγματικό σύστημα.....	35
4.2 Τι εννοούμε με τον όρο jitter.....	35
4.3 Μέτρηση της πιθανότητας σφάλματος υπό την επίδραση jitter.....	36
4.4 Διάγραμμα οφθαλμού και μέθοδος κατασκευής του	37
4.5 Raised cosine (Nyquist pulse) και μέτρηση της πιθανότητας σφάλματος υπό την επίδραση jitter	38
4.6 Παλμός [2] που εμφανίζει βελτιωμένη πιθανότητα σφάλματος σε σχέση με τον Nyquist παλμό, υπό την παρουσία jitter.	39
4.7 Παλμοί [3] που εμφανίζουν βελτιωμένη πιθανότητα σφάλματος σε σχέση με τον Nyquist παλμό, υπό την παρουσία jitter.	40
4.8 Παλμοί [4] που εμφανίζουν βελτιωμένη πιθανότητα σφάλματος σε σχέση με τον Nyquist παλμό, υπό την παρουσία jitter.	41
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5.....	43
Προτεινόμενοι Παλμοί	43
5.1 Πρώτος νέος παλμός (1 st new pulse).....	43
5.1.1 Εισαγωγή.....	43
5.1.2 Γεωμετρική κατασκευή πρώτου νέου παλμού (1 st new pulse).....	43
5.1.3 Υπολογισμός συνάρτησης μεταφοράς	46
5.1.4 Υπολογισμός κρουστικής απόκρισης.....	47
5.1.5 Υπολογισμός πιθανότητας σφάλματος υπό την επίδραση jitter.....	50
5.1.6 Συγκριτικά αποτελέσματα πιθανότητας σφάλματος με αυτά του Nyquist παλμού.....	51
5.1.7 Συνοπτικά διαγράμματα στο πεδίο των συχνοτήτων και του χρόνου καθώς και διαγράμματα οφθαλμού.....	52
5.1.8 Συνοπτικά διαγράμματα πιθανότητας σφάλματος σε σύγκριση με τον Nyquist παλμό	54
5.2 Κατασκευή δεύτερου νέου παλμού	56
5.2.1 Εισαγωγή.....	56
5.2.2 Παρουσίαση της μεθόδου κατασκευής	56
5.2.3 Γεωμετρική κατασκευή δεύτερου νέου παλμού.....	61
5.2.4 Υπολογισμός απαιτούμενων στοιχείων για την εύρεση της συνάρτησης μεταφοράς	63
5.2.5 Συνάρτηση μεταφοράς και ενδεικτικά διαγράμματα	67
5.2.6 Ενδεικτικά διαγράμματα κρουστικής απόκρισης.....	68
5.2.7 Παρατηρήσεις.....	69
5.2.8 Υπολογισμός πιθανότητας σφάλματος υπό την επίδραση jitter.....	70

5.2.9 Σταθεροποίηση της παραμέτρου c_1 και δημιουργία βέλτιστου νέου παλμού	72
5.2.10 Υπολογισμός πιθανότητας σφάλματος του παλμού και ενδεικτικά διαγράμματα.....	74
της συνάρτησης μεταφοράς, της κρουστικής απόκρισης και οφθαλμού	74
5.2.11 Συνοπτικά διαγράμματα πιθανότητας σφάλματος σε σύγκριση με τον Nyquist παλμό	77
5.2.12 Παρατηρήσεις για τον τελικό δεύτερο παλμό	78
5.3 Κατασκευή τρίτου νέου παλμού	79
5.3.1 Εισαγωγή.....	79
5.3.2 Γεωμετρική κατασκευή.....	80
5.3.3 Υπολογισμός συντελεστών	81
5.3.4 Συνάρτηση μεταφοράς	84
5.3.5 Υπολογισμός πιθανότητας σφάλματος υπό την επίδραση jitter.....	85
5.3.6 Ενδεικτικά διαγράμματα συνάρτησης μεταφοράς και κρουστικής απόκρισης	88
5.3.7 Παρατηρήσεις.....	89
5.3.8 Υπολογισμός του βέλτιστου παλμού.....	89
5.3.9 Βέλτιστη συνάρτηση μεταφοράς του νέου παλμού	91
5.3.10 Υπολογισμός πιθανότητας σφάλματος υπό την επίδραση jitter	91
5.3.11 Ενδεικτικά διαγράμματα συνάρτησης μεταφοράς και κρουστικής απόκρισης καθώς και διαγράμματα οφθαλμού.....	92
5.3.12 Συνοπτικά διαγράμματα πιθανότητας σφάλματος σε σύγκριση με τον Nyquist παλμό	94
5.4 Κατασκευή τέταρτου νέου παλμού	98
5.4.1 Εισαγωγή.....	98
5.4.2 Γεωμετρική κατασκευή νέου παλμού	98
5.4.3 Υπολογισμός συντελεστών	99
5.4.3 Υπολογισμός συντελεστών	100
5.4.4 Συνάρτηση μεταφοράς	106
5.4.5 Ενδεικτικά διαγράμματα συνάρτησης μεταφοράς και κρουστικής απόκρισης	106
5.4.6 Παρατηρήσεις.....	107
5.4.7 Υπολογισμός πιθανότητας σφάλματος υπό την επίδραση jitter.....	108
5.4.8 Βέλτιστη συνάρτηση μεταφοράς του νέου παλμού	111
5.4.9 Πιθανότητα σφάλματος βέλτιστου παλμού υπό την επίδραση jitter.....	113
5.4.10 Ενδεικτικά διαγράμματα συνάρτησης μεταφοράς, συνάρτησης κρουστικής απόκρισης καθώς και διαγράμματα οφθαλμού	113
5.4.11 Συνοπτικά διαγράμματα πιθανότητας σφάλματος σε σύγκριση με τον Nyquist παλμό ...	115
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6.....	119

Γενικά Συμπεράσματα και Μελλοντικοί Στόχοι.....	119
6.1 Γενικά συμπεράσματα.....	119
6.2 Μελλοντικοί στόχοι.....	122
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1	123
Διαγράμματα βέλτιστης λύσης για τον δεύτερο νέο παλμό.....	123
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2	128
Διαγράμματα επιλογής βέλτιστων τιμών για τις παραμέτρους C_1 και P_1 για τον τρίτο νέο παλμό	128
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 3	142
Διαγράμματα επιλογής βέλτιστων τιμών για τις παραμέτρους C_2 και P_2 για τον τέταρτο νέο παλμό.....	142
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 4.....	155
Διαγράμματα πιθανότητας σφάλματος για όλους τους νέους παλμούς που κατασκευάσαμε	155
ΑΝΑΦΟΡΕΣ	168

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγικές Έννοιες

1.1 Εισαγωγή στις ψηφιακές επικοινωνίες

Μια από τις βασικές ανάγκες του ανθρώπου είναι η ανταλλαγή πληροφοριών με τον υπόλοιπο κόσμο. Τα δεδομένα της σύγχρονης εποχής επιβάλλουν την πρόσβαση του ανθρώπου σε ένα πλήθος από αξιόπιστα, αποδοτικά, ασφαλή και οικονομικά μέσα επικοινωνίας, τα οποία μπορούν να αναπαραστήσουν την πληροφορία με διάφορους τρόπους. Χαρακτηριστικά παραδείγματα μέσων επικοινωνίας είναι η τηλεόραση, το τηλέφωνο, το διαδίκτυο κ.α.

Η μεταβιβαζόμενη πληροφορία δημιουργείται από μια πηγή πληροφορίας, μεταφέρεται μέσω ενός καναλιού επικοινωνίας και καταλήγει σε έναν ή περισσότερους προορισμούς. Στο παράδειγμα της τηλεόρασης έχουμε μεταβίβαση της πληροφορίας ταυτόχρονα σε πολλούς δέκτες. Το σύστημα λήψης εικόνας και ήχου αποτελεί την πηγή πληροφορίας και η συσκευή τηλεόρασης αποτελεί τον πιθανό προορισμό. Στην επικοινωνία με το τηλέφωνο γίνεται μια αμφίδρομη επικοινωνία σημείου με σημείο. Τα μικρόφωνα των τηλεφωνικών συσκευών αποτελούν τις πηγές πληροφορίας, ενώ τα ακουστικά των απέναντι συσκευών αποτελούν τους αντίστοιχους προορισμούς. Τέλος στο διαδίκτυο την πηγή αλλά και τον προορισμό της πληροφορίας συνήθως την αποτελούν τα υπολογιστικά συστήματα.

Ως ψηφιακή πηγή πληροφορίας ορίζουμε την πηγή η οποία συνθέτει την πληροφορία της από ένα πεπερασμένο σύνολο συστατικών μηνυμάτων. Για παράδειγμα, ο ηλεκτρονικός υπολογιστής είναι μια ψηφιακή πηγή πληροφορίας, καθώς μπορεί να αναπαριστά οποιαδήποτε σύνθετη μορφή δεδομένων σε δυαδική μορφή, δηλαδή ως ακολουθία από 0 και 1. Στην ειδική αυτή περίπτωση, η πληροφορία αναπαρίσταται σε δυαδική μορφή, δηλαδή δημιουργείται από μια δυαδική πηγή πληροφορίας. Γενικότερα αν η μεταβλητή αναπαράστασης της πληροφορίας μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή από ένα συνεχές σύνολο, τότε θα λέμε ότι η πληροφορία δημιουργείται από μια αναλογική πηγή. Μια τυπική αναλογική πηγή πληροφορίας είναι το μικρόφωνο, αφού η τάση εξόδου που περιγράφει το μεταδιδόμενο ήχο μπορεί να πάρει τιμές από ένα συνεχές σύνολο τιμών.

Ένα ψηφιακό σύστημα επικοινωνίας μεταβιβάζει την πληροφορία από μια ψηφιακή πηγή στους προορισμούς της, ενώ ένα αναλογικό σύστημα επικοινωνίας μεταβιβάζει την πληροφορία από μια αναλογική πηγή στους προορισμούς της. Τα σύγχρονα ψηφιακά επικοινωνιακά συστήματα

εμφανίζουν τα ακόλουθα συντριπτικά πλεονεκτήματα έναντι των αντίστοιχων αναλογικών συστημάτων:

- είναι πιο αξιόπιστα, αφού παρουσιάζουν μεγαλύτερη ανοχή στην παρουσία θορύβου και χρησιμοποιούν εξελιγμένες τεχνικές εντοπισμού και αντιμετώπισης σφαλμάτων,
- είναι πιο αποδοτικά, γιατί μπορούν να μεταβιβάσουν πολύ μεγαλύτερο όγκο πληροφορίας ανά χρονική μονάδα,
- είναι πιο ασφαλή, καθώς μπορούν να εκμεταλλευτούν πλήρως τα σύγχρονα συστήματα κρυπτογραφίας και τέλος,
- είναι πιο οικονομικά, γιατί, αφενός, χρησιμοποιούν πιο αποδοτικές τεχνικές διαμοιρασμού επικοινωνιακών πόρων και αφετέρου, αφαιρούν την περιττή πληροφορία και συμπιέζουν τη μεταβιβαζόμενη κυκλοφορία, υιοθετώντας σύγχρονα συστήματα κωδικοποίησης.

Ως συνέπεια των παραπάνω πλεονεκτημάτων, τα ψηφιακά συστήματα επικοινωνίας

γίνονται όλο και πιο δημοφιλή. Όλο και περισσότερες αναλογικές πηγές ψηφιοποιούνται πριν από τη μετάδοσή τους και επαναδομούνται στον προορισμό τους στην αρχική αναλογική τους μορφή, επιτρέποντας έτσι την αξιόπιστη, αποδοτική, ασφαλή και οικονομική μεταβίβαση της πληροφορίας τους από ψηφιακό σύστημα επικοινωνίας. Σαν παράδειγμα αναφέρουμε τα αναλογικά συστήματα επικοινωνίας στα τηλεφωνικά δίκτυα τα οποία θα έχουν πλήρως αντικατασταθεί από αντίστοιχα ψηφιακά συστήματα στις αρχές του 21ου αιώνα.

1.2 Αναγκαιότητα των φίλτρων

Έχουμε λοιπόν ανάγκη για συνεχή βελτίωση των ψηφιακών συστημάτων επικοινωνίας. Η βελτίωση αυτή αφορά σε πολλούς τομείς αλλά εμείς θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα της διασυμβολικής παρεμβολής και τους κυριότερους τρόπους επίλυσης μέχρι σήμερα. Στη συνέχεια θα προτείνουμε τρόπους αντιμετώπισης του προβλήματος.

Η πληροφορία που μεταδίδουμε μέσω ενός ψηφιακού συστήματος όπως είναι γνωστό περνά από κάποια στάδια πριν φτάσει στον τελικό αποδέκτη. Μέσω ψηφιακών φίλτρων οι παλμοί της πληροφορίας φιλτράρονται καθώς η πληροφορία διαδίδεται από τον πομπό στον δέκτη και αυτό γίνεται γιατί από την ανάλυση Fourier γνωρίζουμε ότι το εύρος ζώνης ενός ιδανικού ορθογωνικού παλμού είναι άπειρο. Όμως δεν είναι άπειρο και το εύρος ζώνης των διάφορων τηλεπικοινωνιακών

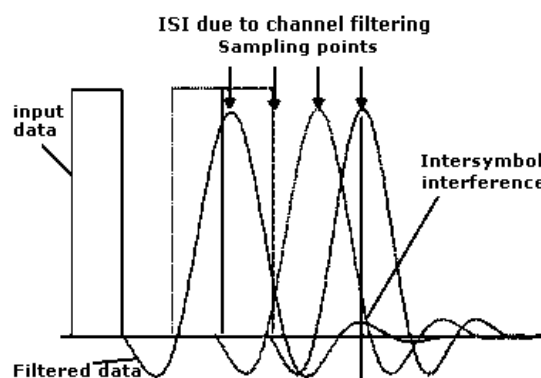
διατάξεων καθώς και των μέσων μετάδοσής τους. Έτσι λοιπόν η διέλευση των παλμών μας από κάποιο φίλτρο είναι απαραίτητη ώστε να μπορεί να μεταδοθεί η πληροφορία κάτω από τις εκάστοτε συνθήκες ανάλογα με το εύρος ζώνης του καναλιού που διαθέτουμε. Το αποτέλεσμα όμως αυτού του φιλτραρίσματος είναι η διασπορά των συμβόλων που χρησιμοποιούνται για την μετάδοση δεδομένων και αυτό μας δημιουργεί προβλήματα.



Διάγραμμα 1

Έτσι λοιπόν σύμφωνα με το [8] από την μία χρησιμοποιώντας τα φίλτρα μορφοποιούμε τους παλμούς, όπως φαίνεται στο διάγραμμα 1, για να τους μεταδώσουμε από την άλλη όμως δημιουργούνται σφάλματα που πρέπει να αντιμετωπιστούν ώστε να έχουμε υψηλή ποιότητα στην μετάδοση της πληροφορίας.

Η διασπορά λόγω του πεπερασμένου εύρους ζώνης είτε του μέσου διάδοσης είτε των διατάξεων του πομπού και του δέκτη των διαδοχικών συμβόλων έχει ως αποτέλεσμα την επικάλυψη μέρους του ενός με τα γειτονικά του προκαλώντας έτσι το λεγόμενο πρόβλημα της διασυμβολικής παρεμβολής όπως φαίνεται στο διάγραμμα 2:



Διάγραμμα 2

Ας δούμε όμως πρώτα τι είναι τα φίλτρα, σε ποιες κατηγορίες τα κατατάσσουμε καθώς και τα χαρακτηριστικά τους.

1.3 Ιδανικά φίλτρα

Ως ιδανικά φίλτρα χαρακτηρίζονται τα φίλτρα εκείνα που επιτρέπουν την αυτούσια διέλευση μέρους του φάσματος του σήματος εισόδου που βρίσκεται σε μία προκαθορισμένη περιοχή συχνοτήτων, ενώ αντίθετα μηδενίζουν το υπόλοιπο φάσμα που βρίσκεται εκτός της περιοχής. Η περιοχή των συχνοτήτων, τις οποίες επιτρέπει το φίλτρο να περάσουν, ονομάζεται ζώνη διέλευσης, ενώ η περιοχή συχνοτήτων, στις οποίες απαγορεύεται η διέλευση, ονομάζεται ζώνη αποκοπής.

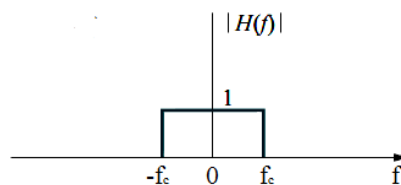
Σύμφωνα με το [6] οι πιο συχνοί τύποι ιδανικών φίλτρων παρουσιάζονται αμέσως μετά:

1.3.1 Ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο

Το ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο (low pass filter - LPF) επιτρέπει τη διέλευση χαμηλών συχνοτήτων ενώ αποκόπτει τις υψηλές. Συγκεκριμένα, προσδιορίζεται από την ακόλουθη σχέση:

$$|H(f)| = \begin{cases} 1 & |f| < f_c \\ 0 & |f| > f_c \end{cases}$$

Η απόκριση συχνότητας ενός βαθυπερατού φίλτρου φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα 3:



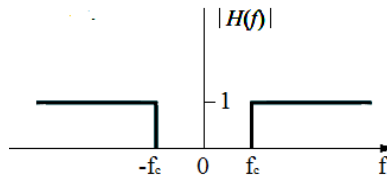
Διάγραμμα 3

1.3.2 Ιδανικό υψιπερατό φίλτρο

Ένα ιδανικό υψιπερατό φίλτρο (high pass filter - HPF) προσδιορίζεται από την ακόλουθη σχέση:

$$|H(f)| = \begin{cases} 0 & |f| < f_c \\ 1 & |f| > f_c \end{cases}$$

και η απόκριση συχνότητας φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα 4:



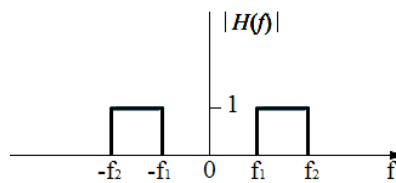
Διάγραμμα 4

1.3.3 Ιδανικό ζωνοπερατό φίλτρο

Ένα ιδανικό ζωνοπερατό φίλτρο (bandpass filter - BPF) προσδιορίζεται από την ακόλουθη σχέση:

$$|H(f)| = \begin{cases} 1 & f_1 < |f| < f_2 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

και η απόκριση συχνότητας φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα 5:



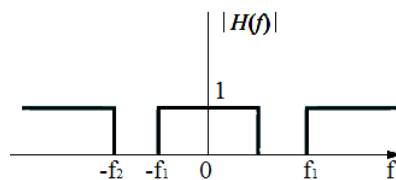
Διάγραμμα 5

1.3.4 Ιδανικό ζωνοφρακτικό φίλτρο

Ένα ιδανικό ζωνοφρακτικό φίλτρο (band stop filter – BSF) προσδιορίζεται από την ακόλουθη σχέση:

$$|H(f)| = \begin{cases} 0 & f_1 < |f| < f_2 \\ 1 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

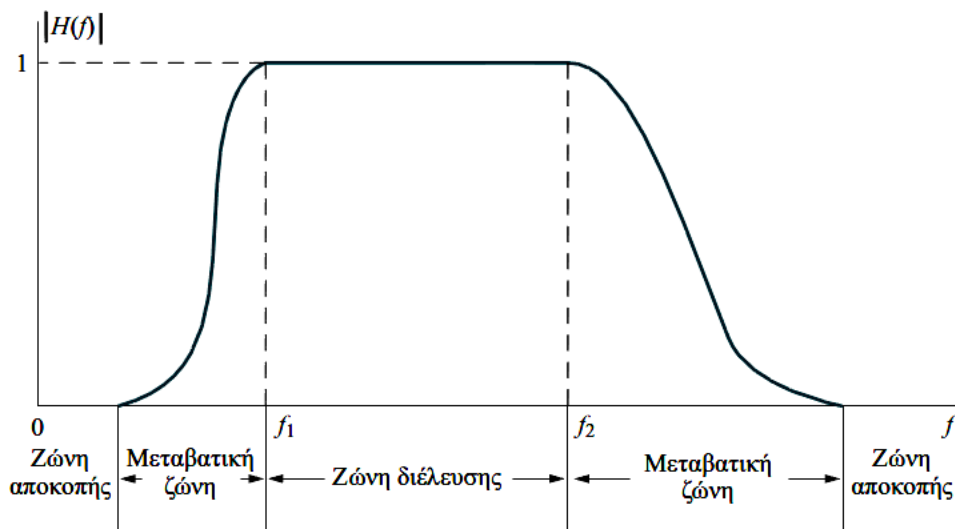
και η απόκρισή του φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα 6:



Διάγραμμα 6

1.4 Τα πραγματικά φίλτρα

Στην πραγματικότητα όμως τα ιδανικά φίλτρα δεν μπορούν να υλοποιηθούν στην πράξη, γι' αυτό και αναφέρονται συχνά ως μη πραγματοποιήσιμα φίλτρα. Συγκεκριμένα η οξεία αποκοπή που εμφανίζουν τα ιδανικά φίλτρα δεν είναι εφικτή. Τα πραγματικά φίλτρα που χρησιμοποιούμε εμφανίζουν μία μεταβατική ζώνη μεταξύ της ζώνης διέλευσης και της ζώνης αποκοπής, στη οποία η απόκριση του φίλτρου μειώνεται σταδιακά μέχρι το μηδενισμό της. Έτσι η απόκριση ενός πραγματικού φίλτρου έχει μορφή όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα 7:



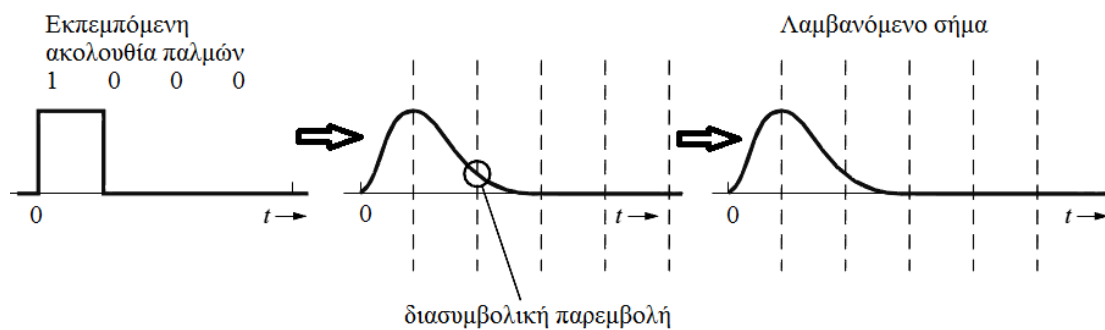
Διάγραμμα 7

1.5 Το πρόβλημα της διασυμβολικής παρεμβολής

Ας εξετάσουμε όμως αναλυτικότερα το φαινόμενο της διασυμβολικής παρεμβολής, καθώς το πρόβλημα αυτό είναι σε θέση να υποβαθμίσει σοβαρά την ικανότητα του ανιχνευτή δεδομένων στο δέκτη να διαχωρίσει το τρέχον σύμβολο από τα γειτονικά του λόγω της διασποράς της ενέργειας αυτών. Έτσι, ακόμη και στην περίπτωση που δεν έχουμε θόρυβο σε ένα κανάλι επικοινωνίας, η διασυμβολική παρεμβολή μπορεί να οδηγήσει στην λανθασμένη ανίχνευση συμβόλων, έχοντας ως αποτέλεσμα τον **αναπόφευκτο ρυθμό σφαλμάτων (irreducible error rate)**.

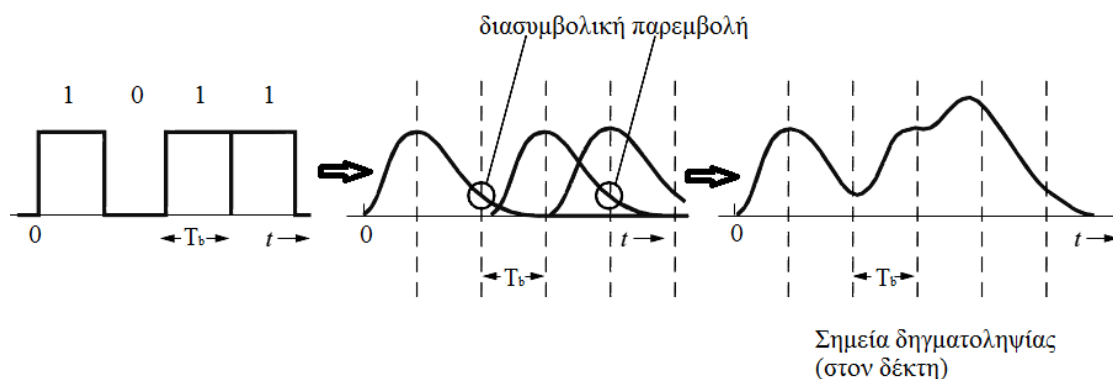
Το πρόβλημα της διασυμβολικής παρεμβολής δημιουργείται όταν απλώνονται οι παλμοί. Η εξάπλωση των παλμών κατά την μετάδοσή τους διαμέσου ενός καναλιού με πεπερασμένο εύρος ζώνης συχνοτήτων προκαλεί την αλληλοεπικάλυψη των γειτονικών παλμών, η οποία ονομάζεται διασυμβολική παρεμβολή (intersymbol interference – ISI) και όπως είπαμε προκαλεί σφάλματα κατά την μετάδοση της πληροφορίας.

Αν παρατηρήσουμε το παρακάτω διάγραμμα 8 για on/off διαμόρφωση θα δούμε ότι εκεί ένας θετικός παλμός διάρκειας T_b αποστέλλεται προς μετάδοση διαμέσου ενός καναλιού επικοινωνίας, το οποίο αποκόπτει τις υψηλές συχνότητες του σήματος. Ο εκπεμπόμενος παλμός απλώνεται χρονικά κατά την μετάδοσή του και καλύπτει μέρος των χρονικών διαστημάτων που αντιστοιχούν στους γειτονικούς παλμούς. Στο σχήμα αυτό με διακεκομμένες γραμμές έχουμε συμβολίσει την χρονική στιγμή όπου ο δέκτης λαμβάνει δείγματα του σήματος για να προσδιορίσει την τιμή του αντίστοιχου ψηφίου. Φυσικά, αυτές οι διακεκομμένες γραμμές απέχουν μεταξύ τους χρόνο ίσο με T_b .



Διάγραμμα 8

Ας δούμε τώρα τι θα συμβεί αν βάλουμε παλμούς σαν τον παραπάνω στην σειρά και έχουμε και το πρόβλημα της διασυμβολικής παρεμβολής. Όπως φαίνεται από το παρακάτω διάγραμμα 9 όπου αποστέλλουμε την ακολουθία παλμών 1011. Η τιμή που εξάγει ο δέκτης από το λαμβανόμενο σήμα τη δεύτερη χρονική στιγμή δειγματοληψίας και η οποία αντιστοιχεί στο δυαδικό ψηφίο 0, δεν είναι μηδενική. Αυτή η ύπαρξη μη μηδενικής τάσης δυσκολεύει την ορθή επιλογή μεταξύ των δυαδικών ψηφίων και μπορεί να οδηγήσει σε εσφαλμένη ανάγνωση.



Διάγραμμα 9

Θα θέλαμε λοιπόν να διαμορφώσουμε κατάλληλα τους εκπεμπόμενους παλμούς έτσι ώστε αυτοί να παρουσιάζουν όσο πιο μικρή διασυμβολική παρεμβολή γίνεται και να ελέγξουμε έτσι την αρνητική επίδραση που έχει αυτή στην ποιότητα και την αξιοπιστία της μετάδοσης.

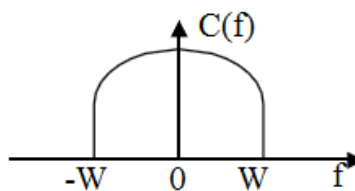
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Κανάλια Περιορισμένου Εύρους Ζώνης

2.1 Εισαγωγή

Τι εννοούμε με τον όρο ‘‘Κανάλια περιορισμένου εύρους ζώνης’’ ;

Παρατηρούμε το παρακάτω διάγραμμα 10:



Διάγραμμα 10

Σύμφωνα με το [6], [7] τέτοιου είδους κανάλια χαρακτηρίζονται ως γραμμικά χρονικά αναλλοίωτα συστήματα με κρουστική απόκριση $c(t)$, $t \in \mathfrak{R}$ και απόκριση συχνότητας που δίνεται από τον τύπο:

$$C(f) := \int_{-\infty}^{+\infty} c(t)e^{-j2\pi ft} dt = |C(f)|e^{j\theta(f)}$$

Τα κανάλια θα ονομάζονται περιορισμένου εύρους ζώνης, όταν:

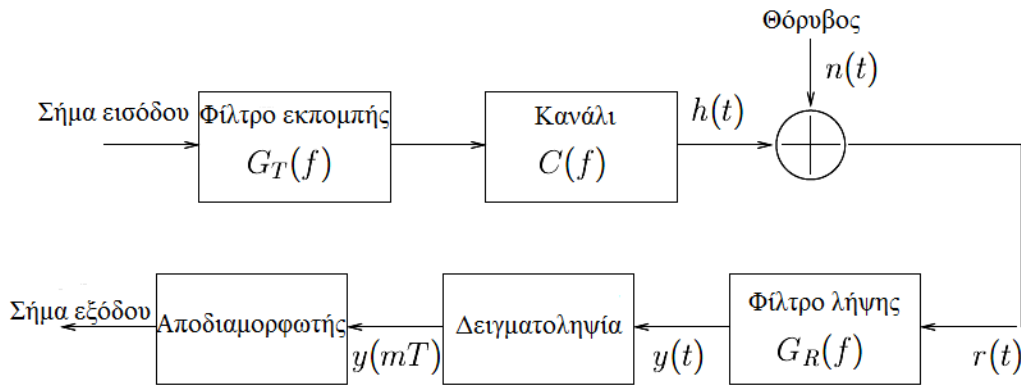
$$C(f) = \begin{cases} C(f) & |f| \leq W \\ 0 & |f| > W \end{cases}$$

2.2 Μετάδοση σήματος σε κανάλι περιορισμένου εύρους ζώνης

Έστω τώρα ότι μεταδίδουμε σήμα $g_T(t)$, $t \in \mathfrak{R}$, μέσα από κανάλι περιορισμένου εύρους ζώνης W όπως μπορούμε να δούμε στο παρακάτω διάγραμμα 11, δηλαδή αφού διαμορφώσουμε τα bits (0 ή 1) σε θετικούς ή αρνητικούς παλμούς, αντίστοιχα, τότε οι παλμοί αυτοί μορφοποιούνται από το φίλτρο εκπομπής. Το κανάλι μοντελοποιείται ως χαμηλοπερατό φίλτρο εύρους ζώνης W , το κανάλι δρα παραμορφωτικά στους εκπεμπόμενους παλμούς, μετά στο σήμα προστίθεται θόρυβος AWGN, το ενθόρυβο σήμα διέρχεται μέσα από το φίλτρο λήψης όπου δειγματοληπτείται και στη συνέχεια

με βάση τις δειγματοληπτημένες τιμές ο ανιχνευτής αποφαινεται για το ποιο σύμβολο εκπέμφθηκε. Τέλος ο αποδιαμορφωτής μετατρέπει το σύμβολο στα αρχικά bits (0 ή 1).

Αλλά ας δούμε πιο αναλυτικά, σύμφωνα με το [6], το παρακάτω διάγραμμα και στη συνέχεια θα δούμε αναλυτικά τι συμβαίνει στο κανάλι περιορισμένου εύρους ζώνης και θορύβου AWGN.



Διάγραμμα 11

Τότε η χρονική απόκριση του καναλιού $h(t)$ δίνεται από τη συνέλιξη του $c(t)$ με το $g_T(t)$:

$$h(t) := (c * g_T)(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} c(\tau)g_T(t-\tau)d\tau, \quad \forall t \in \mathfrak{R} \text{ ή ισοδύναμα στο πεδίο συχνοτήτων:}$$

$$H(f) = C(f)G_T(f), \quad \forall f \in \mathfrak{R}$$

Υποθέτουμε τώρα ότι το φίλτρο $g_R(t)$ είναι προσαρμοσμένο (matched) στο σήμα $h(t)$, ή με άλλα λόγια: $g_R(t) := h(t_0 - t)$, $\forall t \in \mathfrak{R}$ και $G_R(f) = H^*(f)e^{-j2\pi f t_0}$, $\forall f \in \mathfrak{R}$ όπου το σύμβολο * δηλώνει το συζυγή ενός μιγαδικού αριθμού, και η παράμετρος t_0 εισάγεται από το σχεδιαστή ώστε το φίλτρο g_R να είναι φυσικώς υλοποιήσιμο. Όμως για να προσαρμόσουμε το φίλτρο g_R στο h πρέπει να γνωρίζουμε την κρουστική απόκριση του καναλιού $c(t)$. Άρα θα πρέπει να την μετρήσω.

Το ερώτημα τώρα είναι πόσο είναι το SNR στην έξοδο του φίλτρου g_R ;

Το σήμα στην έξοδο του φίλτρου g_R θα είναι:

$$y(t) = g_R(t) * (h(t) + n(t)) = (g_R * h)(t) + (g_R * n)(t) =: y_S(t) + y_n(t), \quad \text{είναι φανερό δηλαδή ότι ο μετασχηματισμός Fourier του } y_S \text{ γίνεται } F[y_S](f) = Y_S(f) = G_R(f)H(f) \text{ και το οποίο γίνεται τελικά } Y_S(f) = |H(f)|^2 e^{-j2\pi f t_0}$$

Έστω τώρα ότι δειγματοληπτούμε το σήμα $y_s(t)$ σε χρονικές στιγμές που εκφράζονται ως ακέραια πολλαπλάσια του T_b , δηλαδή $\{mT : m=0,1,2,\dots\}$ (δε θα ασχοληθούμε με το σενάριο όπου ο δειγματολήπτης κάνει λάθος στις χρονικές στιγμές δειγματοληψίας λόγω σφαλμάτων χρονισμού). Θυμόμαστε ότι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier μας οδηγεί στο εξής αποτέλεσμα για το y_s :

$$y_s(t) = F^{-1}[Y_s](t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y_s(f) e^{j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 e^{-j2\pi t_0 f} e^{j2\pi ft} df, \text{ τότε έχουμε το εξής αποτέλεσμα}$$

$$\text{αν θέσουμε } t_0 := T_b : y_s(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df = \int_{-B_w}^{+B_w} |H(f)|^2 df =: \varepsilon_h \quad (1)$$

Η συνιστώσα θορύβου στην έξοδο του φίλτρου g_R , δηλαδή το σήμα $y_n = g_R * n$ έχει φασματική πυκνότητα ισχύος:

$$S_{y_n}(f) = \frac{N_0}{2} |H(f)|^2, \quad \forall f \in \mathfrak{R}.$$

$$\text{Άρα η ισχύς του } y_n \text{ γίνεται: } P_{y_n} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{y_n}(f) df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \int_{-B_w}^{+B_w} |H(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \varepsilon_h.$$

Άρα το SNR στην έξοδο του προσαρμοσμένου φίλτρου γίνεται:

$$SNR = \frac{P_{y_s}}{P_{y_n}} = \frac{y_s^2(T)}{P_{y_n}} = \frac{\varepsilon_h^2}{\frac{N_0}{2} \varepsilon_h} = \frac{2\varepsilon_h}{N_0} = \frac{2}{N_0} \int_{-B_w}^{+B_w} |H(f)|^2 df = \frac{2}{N_0} \int_{-B_w}^{+B_w} |C(f)|^2 |G_T(f)|^2 df.$$

Επομένως για να μεγιστοποιήσουμε το SNR στην έξοδο του προσαρμοσμένου φίλτρου, για την ειδική περίπτωση του ιδεατού καναλιού θα πρέπει να θέσουμε $W \rightarrow \infty$, έτσι ώστε να μεγιστοποιήσουμε την ενέργεια του σήματος που περνά μέσα από το κανάλι. Κάτι τέτοιο όμως είναι αδύνατο. Επομένως ο μόνος τρόπος είναι να σχεδιάσουμε τον παλμό g_T ώστε η απόκριση συχνότητας $C(f)$ να περιλαμβάνεται ολόκληρη μέσα στο εύρος συχνοτήτων $[-B_w, B_w]$. Από την θεωρία του μετασχηματισμού Fourier γνωρίζουμε ότι για να γίνει αυτό δυνατό θα πρέπει ο παλμός g_T να εκτείνεται εκτός του χρονικού διαστήματος $[0, T]$. Αυτό είναι που δημιουργεί την διασυμβολική παρεμβολή που αναφέραμε πιο πάνω.

Το σήμα που εισέρχεται πια στο κανάλι μας είναι το: $u(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g_T(t - nT)$, όπου για παράδειγμα έχουμε την μετάδοση της ακολουθίας πλατών a_n για ένα σήμα PAM. Άρα το σήμα στην είσοδο του φίλτρου g_R θα είναι:

$$\begin{aligned} r(t) &= (c * u)(t) + n(t) = c(t) * \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g_T(t - nT) \right) + n(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (c * g_T)(t - nT) + n(t) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n h(t - nT) + n(t), \text{ όπου } h(t) = (c * g_T)(t), \quad \forall t \in \mathfrak{R}. \end{aligned}$$

Το σήμα στην έξοδο του φίλτρου g_R θα είναι:

$$\begin{aligned} y(t) &= (g_R * r)(t) = g_R(t) * \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n h(t - nT) + n(t) \right) = g_R(t) * \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n h(t - nT) \right) + g_R(t) * n(t) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g_R(t) * h(t - nT) + g_R(t) * n(t) =: \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x(t - nT) + v(t). \text{ όπου:} \end{aligned}$$

$$x(t) = g_R(t) * h(t) = g_R(t) * c(t) * g_T(t), \quad \forall t \in \mathfrak{R}, \text{ ή ισοδύναμα στο πεδίο συχνοτήτων,}$$

$$X(f) = G_R(f)G_T(f)C(f), \quad \forall f \in \mathfrak{R}.$$

Ο δειγματολήπτης τώρα εξάγει τις εξής τιμές:

$$y(mT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x(mT - nT) + v(mT) =: \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x_{m-n} + v_m = a_m x_0 + \sum_{n \neq m} a_n x_{m-n} + v_m, \quad (2.1)$$

όπου ο όρος $\sum_{n \neq m} a_n x_{m-n}$ είναι η διασυμβολική παρεμβολή (ISI), a_m το m -ωστό σύμβολο και v_m

είναι ο φιλτραρισμένος θόρυβος.

$$\text{Ο όρος } x_0 \text{ είναι: } x_0 = x(0T) = x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f 0} df = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} G_R(f)G_T(f)C(f) df =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H^*(f) e^{-j2\pi_0 f} H(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 e^{-j2\pi_0 f} df = \int_{-\infty}^{+\infty} |C(f)|^2 |G_T(f)|^2 e^{-j2\pi_0 f} df =$$

$$= \int_{-W}^{+W} |C(f)|^2 |G_T(f)|^2 e^{-j2\pi_0 f} df.$$

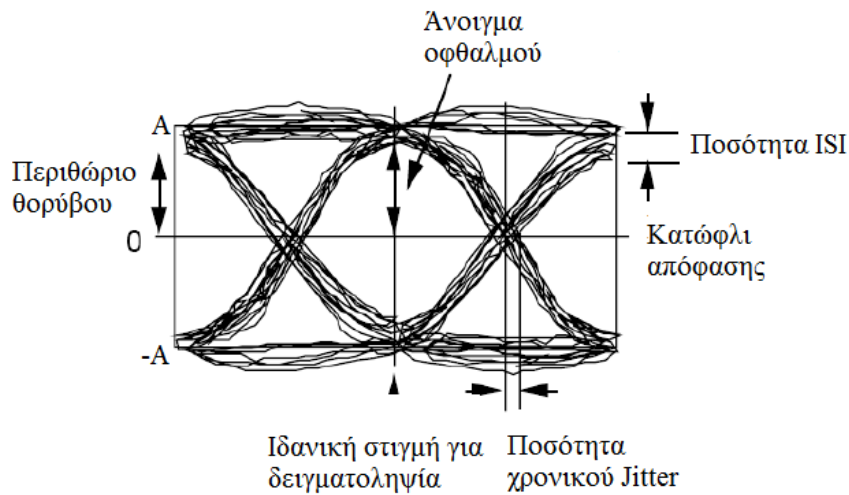
Πώς μπορούμε όμως να έχουμε μια καλή εποπτεία για την ποιότητα της ζεύξης μας και την μετάδοση της πληροφορίας;

2.3 Διάγραμμα οφθαλμού

Το διάγραμμα οφθαλμού όπως φαίνεται πιο κάτω στο διάγραμμα 12 είναι μια εποπτική μέθοδος διάγνωσης προβλημάτων σε συστήματα μετάδοσης δεδομένων. Το διάγραμμα οφθαλμού προκύπτει όταν συνδέσουμε έναν παλμογράφο στο σημείο εκείνο του δέκτη όπου τα δεδομένα έχουν φιλτραριστεί και αποδιαμορφωθεί αλλά δεν έχουν αναγνωριστεί και μετατραπεί σε δυαδικά ψηφία. Ο παλμογράφος σκανδαλίζεται επαναληπτικά σε κάθε περίοδο συμβόλου ή σε καθορισμένο πολλαπλάσιο της περιόδου του συμβόλου, ανακτώντας το σήμα χρονισμού συμβόλων από τη λαμβανόμενη κυματομορφή. Βασιζόμενοι στην αδράνεια οπτικής απεικόνισης του παλμογράφου, το αποτέλεσμα είναι η υπέρθεση μιας επικαλυπτόμενης ακολουθίας συμβολικών καταστάσεων που οδηγεί στη σύνθεση του διαγράμματος οφθαλμού. Τα διαγράμματα οφθαλμού αποτελούν ένα εξαιρετικό διαγνωστικό εργαλείο για την ανίχνευση αιτιών υποβάθμισης της ποιότητας μιας τηλεπικοινωνιακής ζεύξης καθώς μπορούμε να εξάγουμε χρήσιμες παρατηρήσεις όπως:

- Η καλύτερη χρονική στιγμή για τη δειγματοληψία του σήματός μας που αυτή είναι όταν το άνοιγμα οφθαλμού είναι το μεγαλύτερο δυνατό.
- Το μέγιστο της παραμόρφωσης υποδειχεται από το κατακόρυφο εύρος των δύο κλάδων της δειγματολήπτησης.
- Η ευαισθησία του συστήματος στο σφάλμα χρονισμού φαίνεται από την ταχύτητα με την οποία κλείνει ο οφθαλμός καθώς μεταβάλλεται η χρονική στιγμή δειγματοληψίας.
- Το περιθώριο θορύβου ή η ανοσία στον θόρυβο είναι ανάλογη προς το πλάτος ανοίγματος του οφθαλμού.
- Ο χρόνος δειγματοληψίας βρίσκεται στο μέσο μεταξύ των σημείων μηδενισμού, αν η πληροφορία του ρολογιού παράγεται από τους μηδενισμούς, τότε το ποσό παραμόρφωσης των μηδενισμών δίνει το ποσό του Jitter δηλαδή της μεταβολής του ρυθμού του ρολογιού.

Σύμφωνα με το [5] έχουμε το παρακάτω διάγραμμα 12:



Διάγραμμα 12

2.4 Θεώρημα-συνθήκες Nyquist

Για να εξαλειφθεί η διασυμβολική παρεμβολή στο σήμα της σχέσης (2.1) και σύμφωνα με το [6]

$y_m = a_m x(0T_b) + \sum_{n \neq m} a_n x((m-n)T_b) + v_m$, είναι ικανό και αναγκαίο το $x(t)$ να ικανοποιεί τη συνθήκη:

$$x(nT_b) = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ 0 & , n \neq 0 \end{cases} \text{ ή ισοδύναμα την ακόλουθη συνθήκη Nyquist:}$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} X\left(f + \frac{m}{T_b}\right) = T_b. \quad (2.2)$$

2.4.1 Απόδειξη της συνθήκης Nyquist

Σύμφωνα με το [6], από την θεωρία του μετασχηματισμού Fourier έχουμε πως το σήμα μας στο

$$\text{πεδίο του χρόνου δίνεται από τη σχέση } x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \quad (2.3)$$

$$\text{και άρα } x(nT_b) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f n T_b} df. \quad (2.4)$$

Εφαρμόζουμε το ακόλουθο τέχνασμα. Τμηματοποιούμε το διάστημα

$(-\infty, +\infty) = \bigcup_{m=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{2m-1}{2T_b}, \frac{2m+1}{2T_b} \right)$. Έτσι με αυτόν τον τρόπο έχουμε από τη σχέση (2.4) ότι

$$x(nT_b) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{\frac{2m-1}{2T_b}}^{\frac{2m+1}{2T_b}} X(f) e^{j2\pi f n T_b} df = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{\frac{-1}{2T_b}}^{\frac{1}{2T_b}} X\left(f' + \frac{m}{T_b}\right) e^{j2\pi f' n T_b} df' = , \quad (f' := f - \frac{m}{T_b})$$

$$=: \int_{\frac{-1}{2T_b}}^{\frac{1}{2T_b}} \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} X\left(f + \frac{m}{T_b}\right) \right) e^{j2\pi f n T_b} df = (\text{για } f = f')$$

$$=: \int_{\frac{-1}{2T_b}}^{\frac{1}{2T_b}} Z(f) e^{j2\pi f n T_b} df , \quad (2.5)$$

$$\text{με } Z(f) := \sum_{m=-\infty}^{+\infty} X\left(f + \frac{m}{T_b}\right)$$

Το $Z(f)$ είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο $1/T_b$ και επομένως από την θεωρία των σειρών

$$\text{Fourier έχουμε: } Z(f) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} z_n e^{j2\pi n f T_b} , \quad (2.6)$$

$$\text{με } z_n = T_b \int_{\frac{-1}{2T_b}}^{\frac{1}{2T_b}} Z(f) e^{j2\pi n f T_b} df \quad (2.7)$$

$$\text{και από τις (2.5) και (2.7) έχουμε: } x(nT_b) = \frac{z_n}{T_b} .$$

Επομένως η αναγκαία και ικανή συνθήκη του θεωρήματος γίνεται ως εξής:

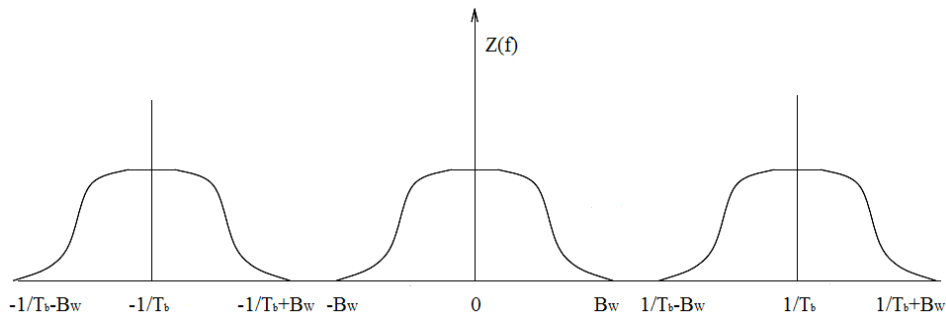
$$z_n = \begin{cases} T_b & , n = 0 \\ 0 & , n \neq 0 \end{cases} \quad \text{και από τη σχέση (3) η συνθήκη αυτή μεταφράζεται ισοδύναμα σε}$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} X\left(f + \frac{m}{T_b}\right) = Z(f) = T_b .$$

2.4.2 Πρώτη περίπτωση για τη συνθήκη του Nyquist

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.2) και το [6] έχουμε:

- Αν $\frac{1}{T_b} > 2B_w$, τότε έχουμε το παρακάτω διάγραμμα 13:



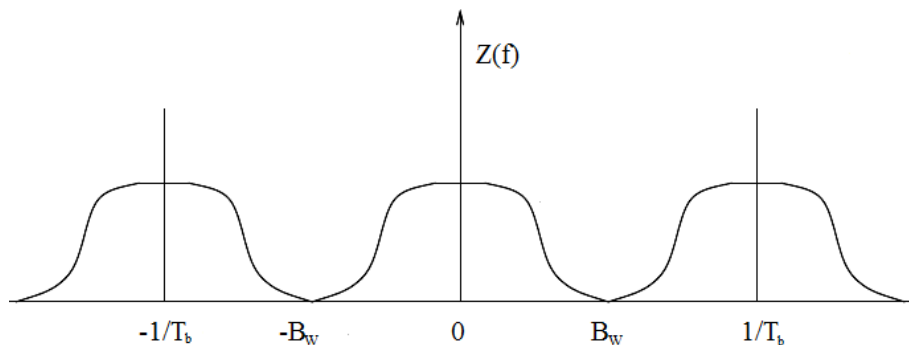
Διάγραμμα 13

Δηλαδή όπως παρατηρούμε, καθώς οι παλμοί είναι αρκετά απομακρυσμένοι μεταξύ τους δεν είναι δυνατό να βρεθεί $X(f)$ έτσι ώστε να έχουμε εξουδετέρωση της διασυμβολικής παρεμβολής (ISI).

2.4.3 Δεύτερη περίπτωση για τη συνθήκη του Nyquist

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.2) και το [6] έχουμε:

- Αν $\frac{1}{T_b} = 2B_w$, τότε έχουμε το παρακάτω διάγραμμα 14:



Διάγραμμα 14

Στην περίπτωση αυτή η μόνη δυνατή λύση για το $X(f)$ είναι η:

$$X(f) := \begin{cases} T_b & , |f| \leq B_w \\ 0 & , |f| > B_w \end{cases} \quad (2.8)$$

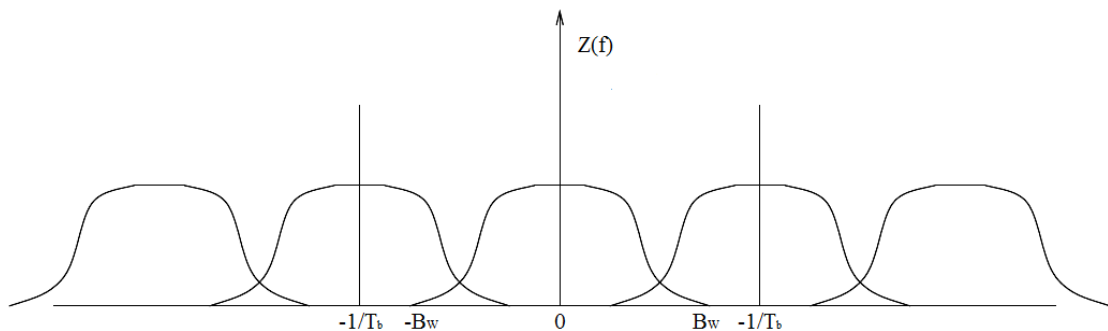
ή ισοδύναμα υπολογίζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier της σχέσης (2.8) για να

μεταφερθούμε στο πεδίο του χρόνου έχουμε πως $x(t) = F^{-1}[X](t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T_b}\right) := \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{T_b}\right)}{\frac{\pi t}{T_b}}$, $t \in \mathfrak{R}$.

2.4.4 Τρίτη περίπτωση για τη συνθήκη του Nyquist

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.2) και το [6] έχουμε:

- Αν $\frac{1}{T_b} < 2B_w$, τότε έχουμε το παρακάτω διάγραμμα 15 :



Διάγραμμα 15

Στην περίπτωση αυτή υπάρχουν πολλές λύσεις για το $X(f)$ έτσι ώστε:

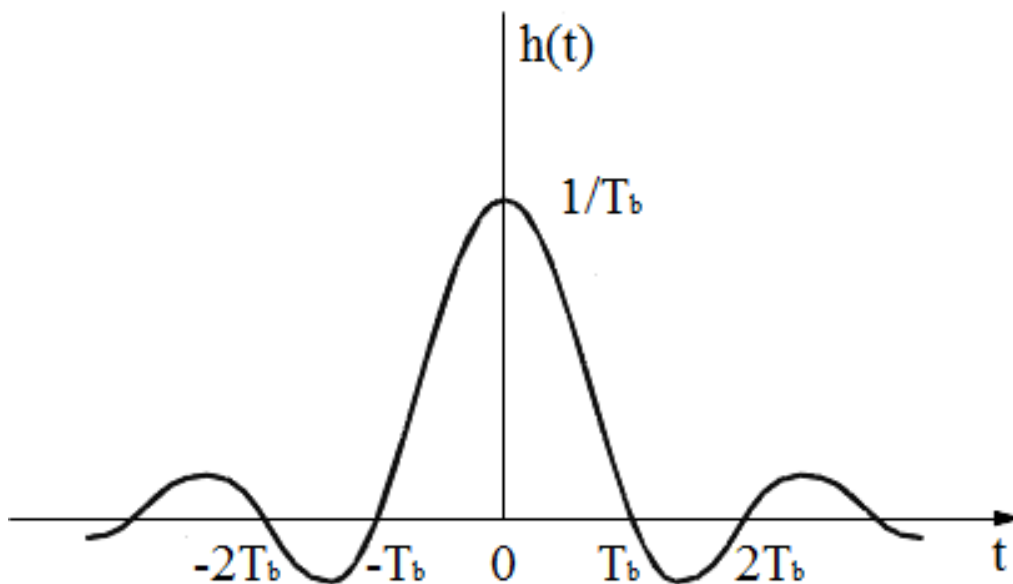
$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} X\left(f + \frac{m}{T_b}\right) = T_b, \text{ όπου θα γίνει λόγος στο επόμενο κεφάλαιο 3 της εργασίας.}$$

2.5 Παλμοί Sinc

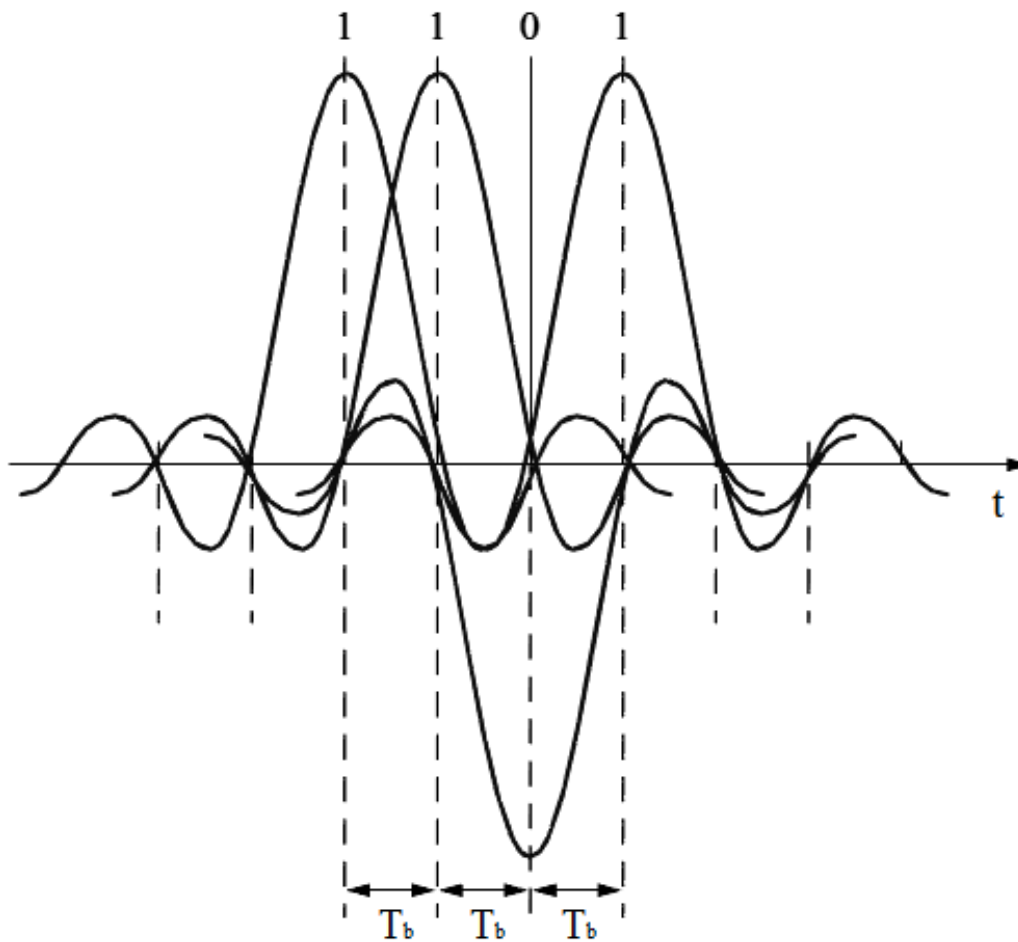
Αυτό που καταφέρνουμε λοιπόν με την συνθήκη του Nyquist είναι να περιορίζουμε πρακτικά τη διασυμβολική παρεμβολή (να μηδενίζουμε θεωρητικά) σε τέτοιο βαθμό ώστε να μην υποβαθμίζει την ποιότητα της ζεύξης αναφορικά στον παρατηρούμενο ρυθμό εμφάνισης σφαλμάτων

διαμορφώνοντας την ακολουθία των bit σε παλμούς sinc που δημιουργούμε αν περάσουμε έναν κρουστικό παλμό από ένα ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο. Έτσι τις χρονικές στιγμές της δειγματοληψίας του λαμβανόμενου σήματος δεν υπάρχει αλληλοεπικάλυψη των γειτονικών παλμών καθώς μια σημαντική ιδιότητα των παλμών sinc είναι ότι αυτό διέρχεται από το μηδέν σε όλες τις χρονικές στιγμές που είναι πολλαπλάσιες της περιόδου T_b , εκτός από την χρονική στιγμή μηδέν όπως μπορούμε να δούμε από τα παρακάτω διαγράμματα 16 και 17, για την συνάρτηση

$$h(t) = \frac{1}{T_b} \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T_b}\right).$$



Διάγραμμα 16



Διάγραμμα 17

Να τονίσουμε ότι σε πρακτικά συστήματα επικοινωνιών, όπως για παράδειγμα σε ένα κλασικό τηλεφωνικό κανάλι, η επίτευξη συνάρτησης μεταφοράς κατά Nyquist είναι αρκετά δύσκολη. Γι αυτό το λόγο χρησιμοποιούνται προσαρμοζόμενοι ισοσταθμητές (adaptive equalizers) ώστε να εξομαλύνουν την συνάρτηση μεταφοράς του καναλιού και να επιτυγχάνεται συνάρτηση μεταφοράς κατά Nyquist.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Γνωστά Φίλτρα Αντιμετώπισης της Διαβολικής Παρεμβολής

3.1 Το φίλτρο ανυψωμένου συνημιτόνου ή raised cosine (RC)

Σύμφωνα με τα [5], [6], [7], μία λύση για την περίπτωση όπου $\frac{1}{T_b} < 2B_w$ αποτελεί το ανυψωμένο συνημίτονο (raised cosine-RC).

Το φάσμα πλάτους ή αλλιώς η συνάρτηση μεταφοράς του φίλτρου raised cosine (RC) δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$S(f) = \begin{cases} T_b & 0 \leq |f| \leq \frac{1-a}{2T_b} \\ T_b \cos^2 \left[\frac{\pi T_b}{2a} \left(|f| - \frac{1-a}{2T_b} \right) \right] & \frac{1-a}{2T_b} \leq |f| \leq \frac{1+a}{2T_b} \\ 0 & |f| \geq \frac{1+a}{2T_b} \end{cases} \quad (3.1)$$

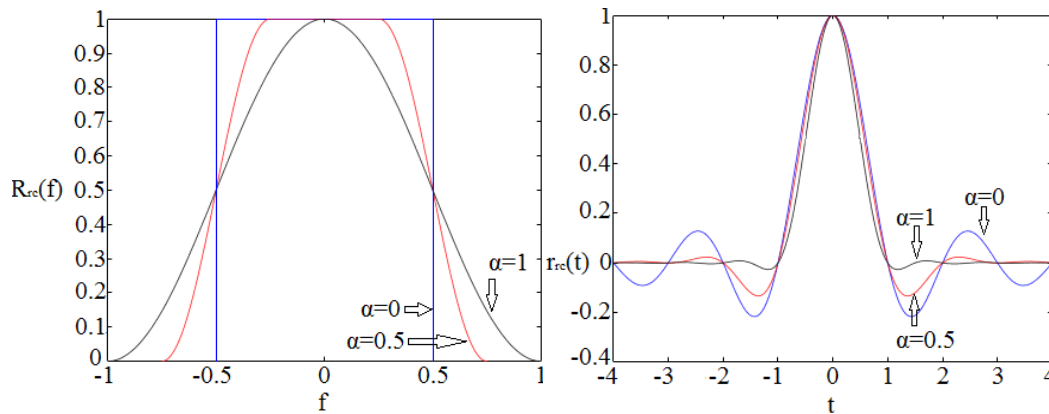
ενώ η μορφή του στο πεδίο του χρόνου είναι, δηλαδή η κρουστική απόκριση του φίλτρου δίνεται από την σχέση:

$$s(t) = \operatorname{sinc} \left(\frac{t}{T_b} \right) \frac{\cos \left(\frac{\pi a t}{T_b} \right)}{1 - \left(\frac{2a t}{T_b} \right)^2} \quad (3.2)$$

Χαρακτηριστικό του παραπάνω φίλτρου είναι η παράμετρος a ή αλλιώς roll-off factor και ισχύει ότι $0 \leq a \leq 1$. Η παράμετρος a χαρακτηρίζει το πλεονάζων εύρος ζώνης (excess bandwidth) του φίλτρου πέραν της συχνότητας Nyquist. Να τονίσουμε ότι η παράμετρος a προτιμάται να μην παίρνει τιμές κοντά στο 0 αλλά ούτε και κοντά στο 1 καθώς στην πρώτη περίπτωση ενώ χρησιμοποιούμε μικρό επιπρόσθετο εύρος ζώνης παρατηρείται μεγάλη εξάπλωση των παλμών στο πεδίο του χρόνου και οπότε αυξάνεται η πιθανότητα σφάλματος ενώ στην δεύτερη περίπτωση δεν παρατηρείται μεγάλη εξάπλωση των παλμών στο πεδίο του χρόνου άρα έχω μικρή πιθανότητα

σφάλματος, αλλά χρησιμοποιώ και αρκετά μεγάλο εύρος ζώνης που είναι απαγορευτικό. Άρα προτιμάμε γενικά για την παράμετρο α τιμές που βρίσκονται κοντά στο 0.5.

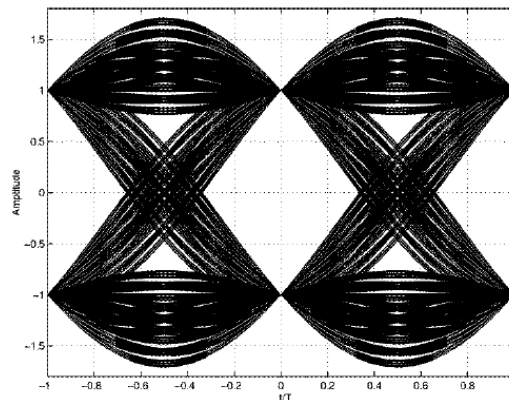
Μπορούμε να δούμε παρακάτω τα διαγράμματα 18 και 19 για το raised cosine στο πεδίο των συχνοτήτων και στο πεδίο του χρόνου αντίστοιχα για $T_b = 1$:



Διάγραμμα 18

Διάγραμμα 19

Ενδεικτικά παραθέτουμε και το διάγραμμα οφθαλμού για roll-off factor $a = 0.35$:



Διάγραμμα 20

Παρατηρούμε στο διάγραμμα 18 (διάγραμμα στο πεδίο των συχνοτήτων) πως η ζώνη μετάβασης μεταξύ των ζωνών διέλευσης και αποκοπής είναι συμμετρική περί την συχνότητα $f = \frac{1}{2T_b} = 0.5$

Είναι πολύ σημαντικό λοιπόν να μελετήσουμε την σχέση που έχει η παράμετρος a (roll-off factor) με το εύρος ζώνης του καναλιού καθώς και πως επηρεάζεται η ποιότητα της ζεύξης μας ανάλογα με την επιλογή της παραμέτρου a .

3.1.1 Προσδιορισμός παραμέτρου a , τάξη διαμόρφωσης M σε ένα σύστημα M-PAM και ρυθμού μετάδοσης συμβόλων R_s , σύμφωνα με το [5]

Θεωρούμε ως δεδομένα τον ρυθμό μετάδοσης bit, R_b και το εύρος ζώνης του καναλιού μετάδοσης BW.

Το εύρος ζώνης του παλμού, B_w που θα χρησιμοποιήσουμε πρέπει να ισούται με το εύρος ζώνης του καναλιού μετάδοσης, $W = B_w$.

Γνωρίζουμε ότι το εύρος ζώνης του παλμού πρέπει να είναι μεταξύ $\frac{R_s}{2}$ και R_s , δηλαδή

$B_w = \frac{(a+1)R_s}{2}$ και συνεπώς $\frac{R_s}{2} \leq W \leq R_s$ ή $W \leq R_s \leq 2W$ και δεδομένου του παραπάνω

περιορισμού και χρησιμοποιώντας την σχέση $R_s = \frac{R_b}{\log_2(M)}$ μπορούμε να προσδιορίσουμε τα

κατάλληλα ζεύγη M και R_s .

Αν βρεθούν δύο ή περισσότερα ζεύγη τότε επιλέγουμε το ζεύγος με τις υψηλότερες τιμές. Τέλος

ισχύει ότι $W = \frac{(a+1)R_s}{2}$ και έτσι $a = \frac{2W}{R_s} - 1$.

Ας δούμε τώρα τι συμβαίνει με το SNR και την πιθανότητα σφάλματος στο σύστημα.

3.1.2 Υπολογισμός SNR και πιθανότητα σφάλματος σε M-PAM σύστημα, σύμφωνα με το [5]

Αν πάρουμε το δυαδικό PAM έχει βρεθεί ότι η πιθανότητα να συμβεί ένα σφάλμα δίνεται από τη σχέση: $P_{be} = Q(\sqrt{SNR})$, με το SNR να είναι όπως γνωρίζουμε ο λόγος σήματος προς θόρυβο μετά το δειγματολήπτη.

Για να έχουμε P_{be} ελάχιστο θα πρέπει να μεγιστοποιηθεί το SNR ή να ελαχιστοποιηθεί το $1/SNR$ αντίστοιχα. Αποδεικνύεται ότι υπό την επίδραση θορύβου AWGN το $1/SNR$ δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{1}{SNR} = \frac{N_0}{2E_b} \int_{-W}^{+W} |G_R(f)|^2 df \int_{-W}^{+W} \frac{|R_{rc}(f)|^2}{|C(f)|^2 |G_R(f)|^2} df \quad \text{και χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-}$$

Schwartz προκύπτει ότι:

$$\frac{1}{SNR} = \frac{N_0}{2E_b} \int_{-W}^{+W} |G_R(f)|^2 df \int_{-W}^{+W} \frac{|R_{rc}(f)|^2}{|C(f)|^2 |G_R(f)|^2} df \geq \frac{N_0}{2E_b} \left[\int_{-W}^{+W} |G_R(f)|^2 \frac{|R_{rc}(f)|^2}{|C(f)|^2 |G_R(f)|^2} df \right]^2$$

$$\text{και άρα } SNR \leq 2 \frac{E_b}{N_0} \left[\int_{-W}^{+W} \frac{|R_{rc}(f)|}{|C(f)|} df \right]^{-2}.$$

Επομένως υπό την επίδραση του καναλιού μετάδοσης και γνωρίζοντας επ'ακριβώς την χαρακτηριστική μεταφοράς του, η πιθανότητα σφάλματος του δυαδικού PAM δίνεται από την

$$\text{σχέση: } P_{be} = Q \left\{ \sqrt{2 \frac{E_b}{N_0} \left[\int_{-W}^{+W} \frac{|R_{rc}(f)|}{|C(f)|} df \right]^{-2}} \right\} \quad \text{και αν το κανάλι μας είναι ιδανικό, δηλαδή } C(f) = 1,$$

$|f| < BW$, τότε δεδομένου ότι $\int_{-W}^{+W} |R_{rc}(f)| df = 1$, η παραπάνω σχέση απλοποιείται στην γνωστή

$$\text{σχέση: } P_{be} = Q \left(\sqrt{2 \frac{E_b}{N_0}} \right), \quad \text{που είναι η πιθανότητα σφάλματος του δυαδικού PAM υπό την επίδραση}$$

μόνο θορύβου AWGN. Με την ίδια ακριβώς ανάλυση προκύπτει για το M -ιαδικό PAM η

$$\text{πιθανότητα σφάλματος: } P_{be} = 2 \frac{M-1}{M} Q \left\{ \sqrt{6 \frac{\log_2(M)}{M^2-1} \frac{E_b}{N_0} \left[\int_{-W}^{+W} \frac{|R_{rc}(f)|}{|C(f)|} df \right]^{-2}} \right\} \quad \text{και παρατηρούμε ότι οι}$$

$$\text{απώλειες λόγω επίδρασης του καναλιού είναι } 20 \log_{10} \left[\int_{-W}^{+W} \frac{|R_{rc}(f)|}{|C(f)|} df \right].$$

Είδαμε λοιπόν το raised cosine φίλτρο και κάναμε και μια γενική μελέτη πάνω σ'αυτό και την εφαρμογή του καθώς και πως επηρεάζεται η πιθανότητα σφάλματος σε ένα PAM σύστημα ανάλογα με την επιλογή των στοιχείων που το αποτελούν. Θα αναρωτιέται κάποιος τώρα αν υπάρχει στη διάθεσή μας μόνο το raised cosine φίλτρο ή αν μπορούμε και γνωρίζουμε να χρησιμοποιήσουμε και κάποια άλλα φίλτρα.

Η απάντηση είναι πως πράγματι υπάρχουν και άλλα φίλτρα. Πιο κάτω θα παρουσιάσουμε κάποια από αυτά.

3.2 Root raised cosine filter (rrc)

Η τετραγωνική ρίζα ανορθωμένου συνημιτόνου ή αλλιώς root raised cosine φίλτρο χρησιμοποιείται συχνά ως φίλτρο εκπομπής και λήψης στις ψηφιακές επικοινωνίες ώστε να έχουμε προσαρμοσμένο φιλτράρισμα της πληροφορίας μας. Η συνδυασμένη χρήση του root raised cosine ως φίλτρο εκπομπής και λήψης είναι έχει αποτέλεσμα όμοιο με εκείνο του raised cosine. Το όνομά του δεν είναι τυχαίο καθώς ισχύει πως η απόκριση συχνότητας του raised cosine φίλτρου ισούται με την απόκριση συχνότητας του root raised cosine υψωμένη στο τετράγωνο.

Το root raised cosine χαρακτηρίζεται από δύο στοιχεία, το β που είναι το roll-off factor και την περίοδο T_b του κάθε συμβόλου.

Η συνάρτηση στο πεδίο της συχνότητας δίνεται από τον τύπο $P(f) = \sqrt{|S(f)|}$, (όπου $S(f)$ η συνάρτηση στο πεδίο των συχνοτήτων του raised cosine).

Η κρουστική απόκριση ενός τέτοιου φίλτρου δίνεται βάσει του [7] από τη σχέση:

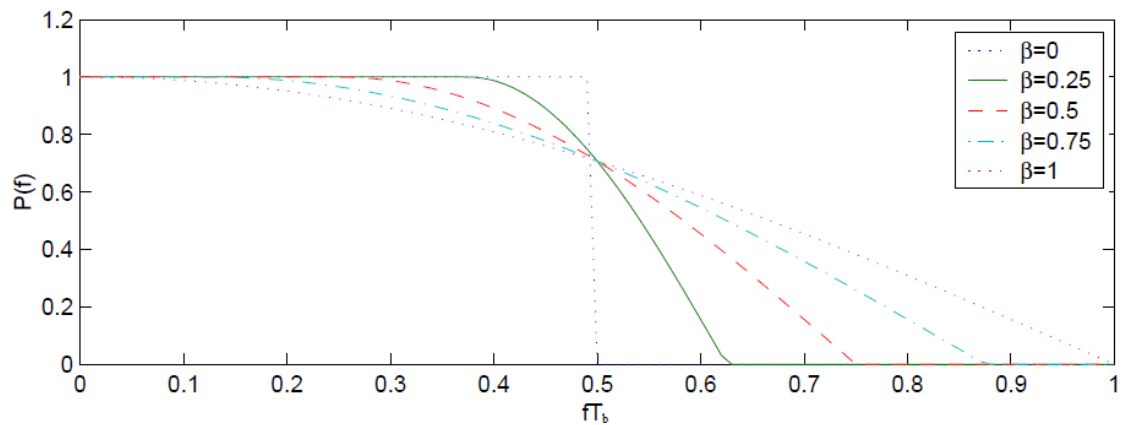
$$p(t) = \begin{cases} 1 - \beta + 4\frac{\beta}{\pi} & t = 0 \\ \frac{\beta}{\sqrt{2}} \left[\left(1 + \frac{2}{\pi}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4\beta}\right) + \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4\beta}\right) \right] & t = \pm \frac{T_b}{4\beta} \\ \frac{\sin\left[\pi \frac{t}{T_b}(1 - \beta)\right] + 4\beta \frac{t}{T_b} \cos\left[\pi \frac{t}{T_b}(1 + \beta)\right]}{\pi \frac{t}{T_b} \left[1 - \left(4\beta \frac{t}{T_b}\right)^2\right]} & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (3.3)$$

η παραπάνω σχέση δεν είναι μοναδική καθώς υπάρχουν και άλλες σχέσεις για την κρουστική απόκριση. Μία από αυτές είναι:

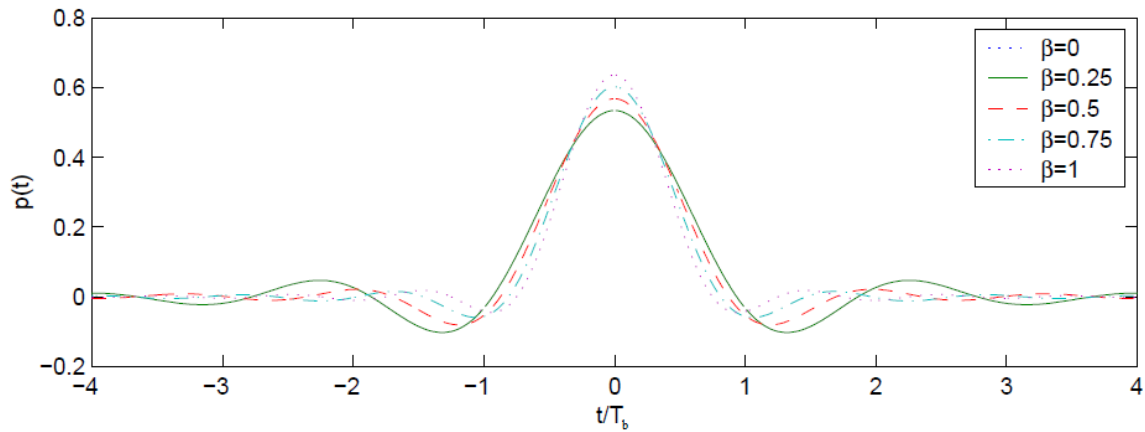
$$p(t) = \frac{2\beta}{\pi\sqrt{T_b}} \frac{\cos\left[(1+\beta)\pi\frac{t}{T_b}\right] + \frac{\sin\left[(1-\beta)\pi\frac{t}{T_b}\right]}{4\beta\frac{t}{T_b}}}{\left[1 - \left(4\beta\frac{t}{T_b}\right)^2\right]} \quad (3.4)$$

Σε αντίθεση με το raised cosine η κρουστική απόκριση δεν μηδενίζεται στα σημεία $\pm T_b$, ωστόσο το συνδυασμένο φίλτρο εκπομπής και λήψης αποτελεί ένα raised cosine φίλτρο όπου πλέον η κρουστική του απόκριση μηδενίζεται στα σημεία $\pm T_b$.

Στα παρακάτω διαγράμματα 21 και 22 που ακολουθούν μπορούμε να δούμε την απόκριση συχνότητας του φίλτρου καθώς και την κρουστική του απόκριση αντίστοιχα:



Διάγραμμα 21



Διάγραμμα 22

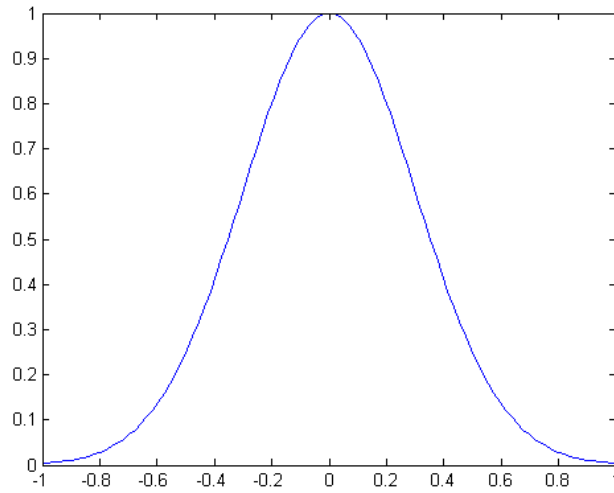
3.3 Gaussian filter

Το Γκαουσιανό φίλτρο όπως αλλιώς λέγεται είναι ένα φίλτρο όπου έχει σχεδιαστεί ώστε να μην παρουσιάζει φαινόμενο υπερύψωσης σε μια είσοδο βηματικής συνάρτησης και ταυτόχρονα ελαχιστοποιεί τον χρόνο ανύψωσης και καθόδου. Η κρουστική του απόκριση είναι μια Γκαουσιανή συνάρτηση:

$g(t) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} e^{-at^2}$ και αν θεωρήσουμε την τυπική απόκλιση ως παράμετρο τότε γράφεται:

$$g(t) = \sqrt{\frac{1}{2\pi\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \quad (3.5)$$

Η μορφή της κρουστικής απόκρισης ενός τέτοιου φίλτρου για παράδειγμα με τυπική απόκλιση $\sigma = 0.3$ φαίνεται στο διάγραμμα 23 πιο κάτω:



Διάγραμμα 23

Τα φίλτρα αυτά έχουν ιδιαίτερη χρησιμότητα στις κινητές επικοινωνίες καθώς είναι αυτά που χρησιμοποιούνται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Φαινόμενο Jitter και Παλμοί με Επιδόσεις Καλύτερες από τον Παλμό Nyquist

4.1 Εισαγωγή

Αυτό που μας ενδιαφέρει πάρα πολύ στα φίλτρα είναι το πώς συμπεριφέρονται σ'ένα πραγματικό σύστημα.

Πώς όμως θα μπορούσαμε να αποφασίσουμε για κάτι τέτοιο; Ένας τρόπος για να έχουμε απάντηση στο παραπάνω ερώτημα είναι να προσομοιώσουμε το φίλτρο μας όσο το δυνατό σε πραγματικές συνθήκες. Το όλο πρόβλημα προέρχεται από το γεγονός ότι στην πρακτικά συχνά ένας παλμός δεν είναι χροнисμένος σωστά, δηλαδή έχουμε το λεγόμενο jitter και από αυτό προκαλείται η διασυμβολική παρεμβολή που προφανώς στόχος μας είναι να την εξαλείψουμε.

4.2 Τι εννοούμε με τον όρο jitter

Ένα από τα πλέον ακαθόριστα προβλήματα των ψηφιακών συστημάτων, το jitter έχει την τάση να εμφανίζεται όταν δεν μπορούμε να εξηγήσουμε κάποιο πρόβλημα βασισμένοι σε μια άλλη, περισσότερο συμβατική, αιτία. Κι όμως, η φύση του είναι απλή και η κατανόησή της εύκολη. Ας αρχίσουμε με τον επίσημο ορισμό: Ο διεθνής οργανισμός τηλεπικοινωνιών (ITU) περιγράφει το jitter ως **"τις στιγμιαίες αποκλίσεις καθοριστικών τμημάτων ενός ψηφιακού σήματος σε σχέση με τις ιδανικές θέσεις τους στον χρόνο"**. Τα πράγματα μπορούν να γίνουν περισσότερο κατανοητά, αν φανταστεί κανείς την εξής διαδικασία: Ένας παρατηρητής κάθεται απέναντι από ένα βολτόμετρο το οποίο μετρά την τάση ενός ηχητικού σήματος (όπως αυτή βγαίνει από ένα μικρόφωνο). Δίπλα στο βολτόμετρο υπάρχει ένα ακριβέστατο χρονόμετρο και δίπλα στον παρατηρητή μας υπάρχει ένα μεγάλο καλάθι με μπαλάκια του τένις. Κάθε δευτερόλεπτο, όπως το βλέπει ο παρατηρητής μας στο χρονόμετρό του, εξετάζει το βολτόμετρο, παίρνει ένα μπαλάκι, γράφει επάνω του την τιμή της τάσης και στην συνέχεια το ρίχνει σε μία οπή στο πάτωμα. Η οπή αυτή οδηγεί σε μία ταινία μεταφοράς επάνω στην οποία τοποθετείται ένα δοχείο, για κάθε τέτοιο μπαλάκι. Η έξοδος μιας τέτοιας μηχανής, είναι διακριτά δείγματα ενός αναλογικού σήματος το πρώτο στάδιο ενός μετατροπέα A/D. Τα προβλήματά μας ξεκινούν από την στιγμή που ο παρατηρητής μας εισάγει μία καθυστέρηση ανάμεσα στην στιγμή που πρέπει να ρίξει το μπαλάκι

στο δοχείο και στην στιγμή που πραγματικά το ρίχνει. Στην ιδανική περίπτωση, η όλη διαδικασία απαιτεί ακριβώς ένα δευτερόλεπτο και επομένως τα δοχεία με τα μπαλάκια επάνω στην ταινία μεταφοράς θα απέχουν ακριβώς τόσο. Στην συνήθη περίπτωση, όμως, θα υπάρχουν καθυστερήσεις ή και προπορείες (ο παρατηρητής μας μπορεί να είναι αργός ή να βιάζεται...) για διάφορους λόγους με αποτέλεσμα τα δοχεία να μην ισαπέχουν. Και στις δύο περιπτώσεις το θεωρητικό μας μέγεθος παραμένει σταθερό και είναι συχνότητα δειγματοληψίας όπως την ορίζει το χρονόμετρο, αλλά το αποτέλεσμα στην πράξη διαφορετικό: Τα δείγματά μας, δηλαδή τα δοχεία με τα μπαλάκια του τένις, δεν ισαπέχουν στην έξοδο της μηχανής! Με απλά λόγια, το σύστημα εισάγει Jitter!

Έτσι λοιπόν μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά των φίλτρων σ'ένα σύστημα υπό την επίδραση του jitter, καθώς το jitter συνδέεται άμεσα με την πιθανότητα σφάλματος σ'ένα σύστημα και εμείς θέλουμε την μικρότερη δυνατή πιθανότητα εμφάνισης σφάλματος.

4.3 Μέτρηση της πιθανότητας σφάλματος υπό την επίδραση jitter

Βασιζόμενοι στο [1] στην σχέση (41a), μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα σφάλματος σε συστήματα με διασυμβολική παρεμβολή χρησιμοποιώντας σειρές Fourier. Η σχέση αυτή δίνεται από τον τύπο:

$$P_e = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{\substack{m=1 \\ m(\text{odd})}}^M \left\{ \frac{\exp\left(\frac{-m^2 \omega^2}{2}\right) \sin(m\omega g_0)}{m} \right\} \prod_{\substack{k=N_1 \\ k \neq 0}}^{N_2} \cos(m\omega g_k) \quad (4.1)$$

Οι παράμετροι που εμφανίζονται στη σχέση (4.1) υπάρχουν αναλυτικά στο [1] όπου έχουμε ότι:

$$N_M = \frac{M+1}{2} \quad \text{δηλαδή} \quad M = 2N_M - 1, \quad (4.2)$$

όπου N_M είναι ο αριθμός των όρων του αθροίσματος της σχέσης (4.1) που πρέπει να πάρουμε ώστε να έχουμε την προσδοκώμενη ακρίβεια στην πιθανότητα σφάλματος που όπως αναφέρεται στο [1] τον επιλέγουμε εμείς. Η επιλογή αυτή χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή καθώς αν ο αριθμός που θα επιλέξουμε είναι μικρότερος από αυτόν που θα έπρεπε τότε τα αποτελέσματά μας θα έχουν απόκλιση από την πραγματικότητα.

$$\text{Έχουμε ακόμα σύμφωνα με το [1] ότι} \quad g_k = g(t - kT_B), \quad (4.3)$$

όπου T_b το χρονικό διάστημα ανάμεσα στα bits (χρόνος μετάδοσης των bits) καθώς και ότι $SNR = \frac{g_0^2}{\sigma^2}$ και επειδή ο θόρυβος σύμφωνα με το έχει μέση τιμή ίση με το μηδέν και διακύμανση ίση με την μονάδα, ($\sigma^2 = 1$) έχουμε ότι $SNR = g_0^2$,

$$\text{δηλαδή } g_0 = \sqrt{SNR} \quad (4.4)$$

Επίσης έχουμε ω να είναι η γωνιακή συχνότητα και N_1, N_2 είναι ο αριθμός των συμβόλων που εμπλέκονται στην προσομοίωση που κάνουμε. Να πούμε και εδώ πως τα N_1, N_2 τα επιλέγουμε και πάλι εμείς ώστε να είμαστε σίγουροι πως η πιθανότητα σφάλματος που θα βρούμε ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα. Πρακτικά μετά από μια τιμή ανάλογα την περίπτωση για τα N_1, N_2 , δεν έχουμε κάποια αλλαγή στο τελικό μας αποτέλεσμα και αυτό συμβαίνει γιατί αν για παράδειγμα θεωρήσουμε ότι είμαστε στο μέσο της απόστασης N_1, N_2 , τότε η επίδραση από τα N_1 σύμβολα που βρίσκονται πριν από το κεντρικό μας σύμβολο και η επίδραση από τα N_2 σύμβολα που βρίσκονται μετά από το κεντρικό μας σύμβολο πρέπει να μειώνεται όσο αυξάνονται τα N_1, N_2 και απομακρυνόμαστε από το κεντρικό μας σύμβολο και τελικά να σταθεροποιείται σε μια τιμή. Δηλαδή από εκεί και πέρα τα προηγούμενα και τα επόμενα σύμβολα δεν έχουν πρακτικά καμία επιρροή στο αρχικό μας οπότε και στην πιθανότητα σφάλματος δηλαδή στην διασυμβολική παρεμβολή. Εμείς λοιπόν χρειαζόμαστε τις τιμές για τα N_1, N_2 που από εκεί και πάνω τίποτα δεν μπορεί να αλλάξει στο αποτέλεσμα τις πιθανότητας που αναζητούμε.

Βασιζόμενοι λοιπόν στους πίνακες 1, 2 και 3 του [1] θα δουλέψουμε από εδώ και στο εξής, αντικαθιστώντας τις παρακάτω τιμές στη σχέση (4.1).

$M=61$, $\omega = \frac{2\pi}{37.7}$, $N_1 = -512$, $N_2 = 512$ καθώς ο αριθμητικός υπολογισμός θα γίνει για 1024 σύμβολα και τέλος αντικαθιστούμε στη σχέση (4.4), $SNR=15\text{dB}$.

4.4 Διάγραμμα οφθαλμού και μέθοδος κατασκευής του

Το διάγραμμα οφθαλμού είναι ουσιαστικά η εικόνα που θα είχαμε σε έναν παλμογράφο αν αυτός απεικόνιζε το λαμβανόμενο σήμα με ρυθμό σάρωσης $1/T_b$. Στην περίπτωση μας για να πάρουμε μια εικόνα του διαγράμματος οφθαλμού για τον παλμό μας παράγουμε μερικές εκατοντάδες i.i.d (independent and identically distributed) σύμβολα και υπολογίζουμε το εκπεμπόμενο σήμα, στη

συνέχεια σπάμε το σήμα αυτό σε τμήματα χρόνου ίσα με την περίοδο σηματοδοσίας του συστήματος) και τα απεικονίζουμε όλα ταυτόχρονα όπως θα είχαμε και σε έναν παλμογράφο. Η αξιολόγηση του παλμού μέσω του διαγράμματος οφθαλμού γίνεται παρατηρώντας το πόσο «ανοιχτό» ή «κλειστό» είναι. Όσο πιο ανοιχτό τόσο καλύτερη αναμένουμε να είναι επίδοση του παλμού όσον αφορά την ενδοσυμβολική παρεμβολή.

Όσων αφορά την υλοποίηση στο matlab κάθε σύμβολο θεωρούμε ότι αποτελείται από 24.000 δείγματα που ορίζουν και την αναλυτικότητα που έχω στο χρόνο. Με αυτά τα δεδομένα θα γίνουν στη συνέχεια οι κατασκευές όλων των διαγραμμάτων οφθαλμού.

4.5 Raised cosine (Nyquist pulse) και μέτρηση της πιθανότητας σφάλματος υπό την επίδραση jitter

Εκτελώντας τους αριθμητικούς υπολογισμούς και χρησιμοποιώντας τα παραπάνω δεδομένα σε περιβάλλον Matlab, τα διαγράμματα των οποίων βρίσκονται στο παράρτημα 1 στο τέλος, έχουμε τα εξής αποτελέσματα:

Πίνακας 1

NYQUIST PULSE						
a		$t/T_B = \pm 0.05$	$t/T_B = \pm 0.1$	$t/T_B = \pm 0.2$	$t/T_B = \pm 0.25$	$t/T_B = \pm 0.3$
0.25	P_e	8.2189e-08	2.8184e-06	9.7462e-04	6.7732e-03	2.5914e-02
0.35		5.9997e-08	1.3896e-06	3.9084e-04	3.1988e-03	1.5481e-02
0.5		3.9723e-08	5.4890e-07	1.0217e-04	9.4694e-04	0.6007e-02
0.75		2.2777e-08	1.5761e-07	1.5346e-05	1.4907e-04	0.1231e-02
1		1.5281e-08	5.8720e-08	3.6543e-06	3.9247e-05	0.419e-03

Τα παραπάνω αποτελέσματα επαληθεύονται και στον πίνακα 2 στο [2]. Παρατηρούμε ανά στήλη ότι καθώς αυξάνεται το a (roll-off factor) η πιθανότητα σφάλματος μειώνεται και αυτό όπως περιγράψαμε στο Κεφάλαιο 1 είναι απόλυτα λογικό καθώς αυξάνοντας το εύρος ζώνης “κερδίζουμε” σε θέμα πιθανότητας σφάλματος αλλά έχουμε κόστος καθώς το εύρος ζώνης μας είναι περιορισμένο.

Η άλλη παρατήρηση που κάνουμε από τον παραπάνω πίνακα είναι ότι καθώς αυξάνεται ο λόγος t/T_B (offset time), αυξάνεται και η πιθανότητα να έχουμε σφάλμα και αυτό είναι απόλυτα λογικό, καθώς όσο ο χρονισμός των παλμών χειροτερεύει, τόσα περισσότερα λάθη μπορούν να συμβούν.

4.6 Παλμός [2] που εμφανίζει βελτιωμένη πιθανότητα σφάλματος σε σχέση με τον Nyquist παλμό, υπό την παρουσία jitter.

Όπως αναφέραμε στο κεφάλαιο 2, στην υποενότητα 2.4.4 για την περίπτωση όπου $1/T_b < 2B_W$, υπάρχουν πολλές λύσεις ώστε να ικανοποιείται το θεώρημα του Nyquist για τον μηδενισμό της διασυμβολικής παρεμβολής. Μία αξιόλογη λύση είναι ο παλμός που προτείνεται στο [2]. Στο [2] παρουσιάζονται οι συναρτήσεις του παλμού στο πεδίο του χρόνου, στο πεδίο των συχνοτήτων καθώς και κάποια ενδεικτικά διαγράμματα. Τέλος γίνεται παρουσίαση των αποτελεσμάτων της πιθανότητας σφάλματος υπό την επίδραση jitter.

Σύμφωνα με το [2] οι πιθανότητες σφάλματος για διάφορες τιμές του roll-off factor και του λόγου t/T_B , του παλμού που κατασκευάστηκε, δίνονται από τον παρακάτω πίνακα 2:

Πίνακας 2

PULSE [2]						
a		$t/T_B = \pm 0.05$	$t/T_B = \pm 0.1$	$t/T_B = \pm 0.2$	$t/T_B = \pm 0.25$	$t/T_B = \pm 0.3$
0.25	P_e	5.8117e-08	1.2980e-06	3.5678e-04	2.9462e-03	1.4524e-02
0.35		3.9253e-08	5.4021e-07	1.0129e-04	9.3536e-04	0.5888e-02
0.5		2.4134e-08	1.8580e-07	2.0878e-05	2.0154e-04	0.1577e-02
0.75		1.3836e-08	4.5668e-08	3.2260e-06	4.1433e-05	0.505e-03
1		1.3150e-08	3.5692e-08	1.6144e-06	2.2273e-05	0.3298e-03

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με τον Nyquist παλμό επαληθεύουμε τα αποτελέσματα του πίνακα 2. Τα αντίστοιχα διαγράμματα παρατίθενται στο τέλος στο παράρτημα 2 .

Για να έχουμε μια καλύτερη συγκριτικά εικόνα και για τους δύο παλμούς (Nyquist και [2]) που είδαμε ως τώρα, παρουσιάζουμε τον παρακάτω πίνακα 3:

Πίνακας 3

PULSES	t / T_B	± 0.05	± 0.1	± 0.2	± 0.25	± 0.3
$a = 0.25$						
Nyquist	P_e	8.2189e-08	2.8184e-06	9.7462e-04	6.7732e-03	2.5914e-02
[2]		5.8117e-08	1.2980e-06	3.5678e-04	2.9462e-03	1.4524e-02
$a = 0.35$						
Nyquist	P_e	5.9997e-08	1.3896e-06	3.9084e-04	3.1988e-03	1.5481e-02
[2]		3.9253e-08	5.4021e-07	1.0129e-04	9.3536e-04	0.5888e-02
$a = 0.5$						
Nyquist	P_e	3.9723e-08	5.4890e-07	1.0217e-04	9.4694e-04	0.6007e-02
[2]		2.4134e-08	1.8580e-07	2.0878e-05	2.0154e-04	0.1577e-02
$a = 0.75$						
Nyquist	P_e	2.2777e-08	1.5761e-07	1.5346e-05	1.4907e-04	0.1231e-02
[2]		1.3836e-08	4.5668e-08	3.2260e-06	4.1433e-05	0.505e-03
$a = 1$						
Nyquist	P_e	1.5281e-08	5.8720e-08	3.6543e-06	3.9247e-05	0.419e-03
[2]		1.3150e-08	3.5692e-08	1.6144e-06	2.2273e-05	0.3298e-03

Παρατηρούμε δηλαδή πως τα αποτελέσματα της πιθανότητας σφάλματος του παλμού [2], υπό την επίδραση jitter, είναι συγκριτικά ελαφρώς καλύτερα σε σχέση με αυτά του Nyquist παλμού.

Επίσης να τονίσουμε ότι οι επαληθεύσεις των αποτελεσμάτων για την πιθανότητα σφάλματος του παλμού [2] αλλά και του Nyquist έγιναν για να δείξουμε και στην πράξη την ισχύ της σχέσης (4.1) καθώς και την ορθή όπως αποδεικνύεται επιλογή των τιμών όλων των στοιχείων της σχέσης αυτής.

4.7 Παλμοί [3] που εμφανίζουν βελτιωμένη πιθανότητα σφάλματος σε σχέση με τον Nyquist παλμό, υπό την παρουσία jitter.

Εκτός από τους παλμούς που είδαμε μέχρι τώρα, ενδιαφέρον έχει και μία άλλη εργασία [3] που έγινε με σκοπό την κατασκευή νέων παλμών με χαρακτηριστικά καλύτερα από αυτά του Nyquist παλμού. Στο [3] έχουν κατασκευαστεί συνολικά τρεις νέοι παλμοί (φίλτρα) όπου η πιθανότητα σφάλματός τους υπό την επίδραση jitter είναι μικρότερη από αυτή του παλμού Nyquist και τα αποτελέσματα φαίνονται στον επόμενο πίνακα 4:

Πίνακας 4

PULSES	t/T_B	± 0.05	± 0.1	± 0.2	± 0.3
$a = 0.25$					
Nyquist	P_e	8.2189e-08	2.8184e-06	9.7462e-04	2.5914e-02
[3] fsech		7.5579e-08	2.3337e-06	7.7201e-04	2.2982e-02
[3] fexp		5.8117e-08	1.2980e-06	3.5678e-04	1.4524e-02
[3] farsech		5.3996e-08	1.1011e-06	2.8405e-04	1.2496e-02
$a = 0.35$					
Nyquist	P_e	5.9997e-08	1.3896e-06	3.9084e-04	1.5481e-02
[3] fsech		5.4002e-08	1.0944e-06	2.8000e-04	1.2471e-02
[3] fexp		3.9253e-08	5.4021e-07	1.0129e-04	5.8880e-03
[3] farsech		3.5970e-08	4.4580e-07	7.6203e-05	4.6950e-03
$a = 0.5$					
Nyquist	P_e	3.9723e-08	5.4890e-07	1.0217e-04	0.6007e-02
[3] fsech		3.4949e-08	4.1186e-07	6.6009e-05	4.2284e-03
[3] fexp		2.4134e-08	1.8580e-07	2.0878e-05	1.5772e-03
[3] farsech		2.1875e-08	1.4916e-07	1.5344e-05	1.2253e-03

Παρατηρούμε δηλαδή πως σε σχέση με τον παλμό Nyquist οι πιθανότητες σφάλματος υπό την επίδραση jitter για τους παλμούς [3] είναι αρκετά μικρότερες.

4.8 Παλμοί [4] που εμφανίζουν βελτιωμένη πιθανότητα σφάλματος σε σχέση με τον Nyquist παλμό, υπό την παρουσία jitter.

Μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζουν και οι παλμοί που κατασκευάστηκαν στο [4] πρόσφατα. Η μέθοδος κατασκευής των παλμών αυτών μοιάζει σε αρκετά σημεία με αυτές που ακολουθήσαμε εμείς στην εργασία αυτή και που παρουσιάζονται στο επόμενο κεφάλαιο 5. Στο [4] χρησιμοποιήθηκαν πολυώνυμα δευτέρου βαθμού για την μαθηματική περιγραφή της συνάρτησης μεταφοράς των νέων παλμών. Το μειονέκτημα όμως που παρουσιάζεται είναι πως οι παλμοί αυτοί εξαρτώνται από δύο παραμέτρους κάθε φορά, κάτι που κάνει μη-ρεαλιστική την χρήση τους σ' ένα πραγματικό σύστημα καθώς δεν είναι δυνατόν ανάλογα με την επιλογή του roll-off factor να έχουμε και ένα διαφορετικό φίλτρο. Έτσι λοιπόν οι πιθανότητες σφάλματος που παρουσιάζονται

στο [4], αν και βελτιωμένες σε σχέση με αυτές του Nyquist, δεν είναι απόλυτα συγκρίσιμες καθώς αναφέρονται σε οικογένεια φίλτρων και όχι σε ένα συγκεκριμένο φίλτρο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Προτεινόμενοι Παλμοί

5.1 Πρώτος νέος παλμός (1st new pulse)

5.1.1 Εισαγωγή

Είδαμε στο κεφάλαιο 4 κάποιους επιπλέον παλμούς που κατασκευάστηκαν και ικανοποιούν το θεώρημα του Nyquist, οι οποίοι εμφανίζουν βελτιωμένη πιθανότητα σφάλματος υπό την παρουσία jitter σε σχέση με τον Nyquist. Πόσο εύκολο είναι όμως να δημιουργήσεις έναν παλμό, ο οποίος να ικανοποιεί το θεώρημα του Nyquist και ταυτόχρονα ο παλμός αυτός να είναι καλύτερος από αυτόν του Nyquist; Η απάντηση είναι πως η κατασκευή αυτή είναι μια υπόθεση αρκετά δύσκολη, καθώς το πρόβλημα είναι σύνθετο. Στο κεφάλαιο αυτό θα μας απασχολήσει η κατασκευή τέτοιων παλμών και θα δείξουμε αναλυτικά τις μεθόδους που θα χρησιμοποιήσουμε, καθώς και τα αποτελέσματά που θα προκύψουν.

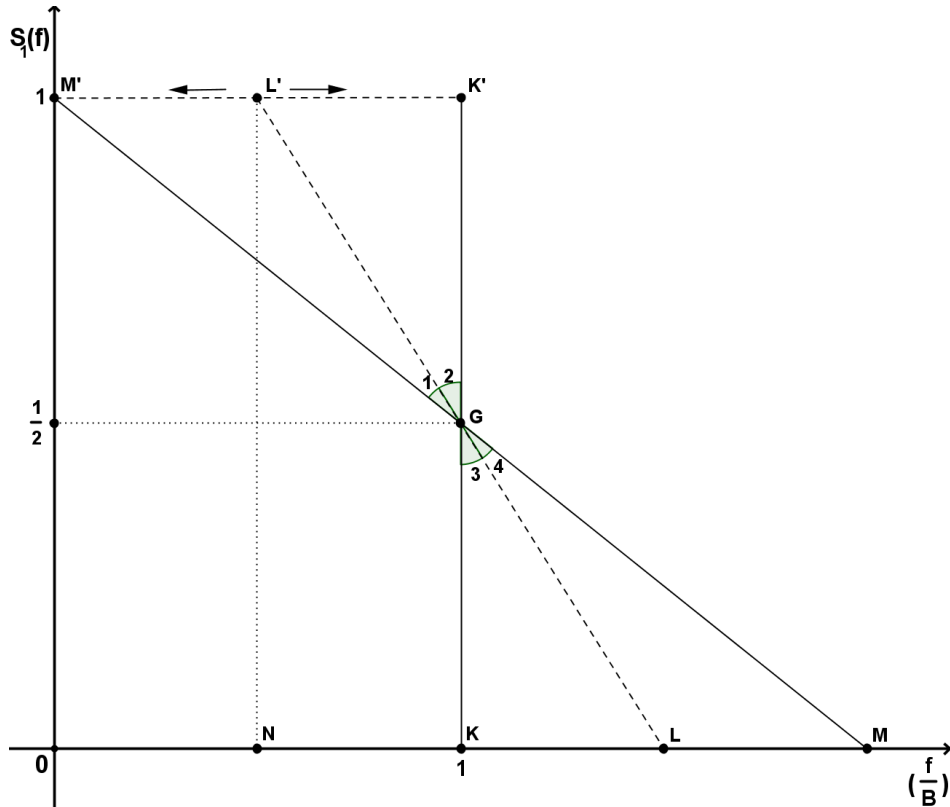
5.1.2 Γεωμετρική κατασκευή πρώτου νέου παλμού (1st new pulse)

Θεωρούμε a να είναι το roll-off factor που αναλύσαμε στο κεφάλαιο 3, στην υποενότητα 3.1.1 ,

$B = \frac{1}{2T_B}$ η συχνότητα Nyquist και T_B ο χρόνος που μεταξύ των bits (χρόνος μετάδοσης των bits).

Θεωρούμε στην κατασκευή μας ότι : $S((1-a)B) = 1$ και $S(B) = \frac{1}{2}$

Παρατηρούμε το διάγραμμα 24 που ακολουθεί για να καταλάβουμε καλύτερα τι εννοούμε:



Διάγραμμα 24

Θεωρούμε το σταθερό σημείο G . Και κατασκευάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα LL' το οποίο διέρχεται από το σημείο G . Καθώς όπως είπαμε το G είναι σταθερό, τα σημεία L, L' δεν είναι σταθερά. Έτσι το σημείο L' μπορεί να κινείται προς το σημείο M' ή προς το σημείο K' και προφανώς συμπαρασύροντας το σημείο L που μπορεί να κινείται και αυτό ανάλογα με την κίνηση του L' προς τα σημεία M και K αντίστοιχα.

Ο συντελεστής διεύθυνσης του τμήματος MM' είναι: $\lambda_{MM'} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{0 - 1} = -\frac{1}{2}$ και άρα έχουμε για τον φορέα του MM' ότι έχει εξίσωση:

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 0) \Rightarrow y = 1 - \frac{1}{2}x \quad (5.1)$$

Από τη σχέση (5.1) έχουμε:

για $y=0 \Rightarrow x=2$. Άρα $M(2,0)$ ή αλλιώς $M(1+1,0)$

Θεωρώ $\beta \in [0,1]$. Έτσι λοιπόν $\min \beta = 0$ και $\max \beta = 1$. Άρα το σημείο M έχει συντεταγμένες $M(1+\max \beta, 0)$ και όμοια το σημείο M' έχει συντεταγμένες $M'(1-\max \beta, 1)$. Το σημείο G θα έχει συντεταγμένες $G(\max \beta, \frac{1}{2})$. Έστω τώρα ότι το σημείο L έχει συντεταγμένες $L(x_1, 0)$. Όμως $1 \leq x_1 \leq 2$. Άρα όμοια με πριν $1 \leq x_1 \leq 1+\max \beta$, ή αλλιώς $x_1 = 1+\alpha$ με $0 \leq \alpha \leq \max \beta$.

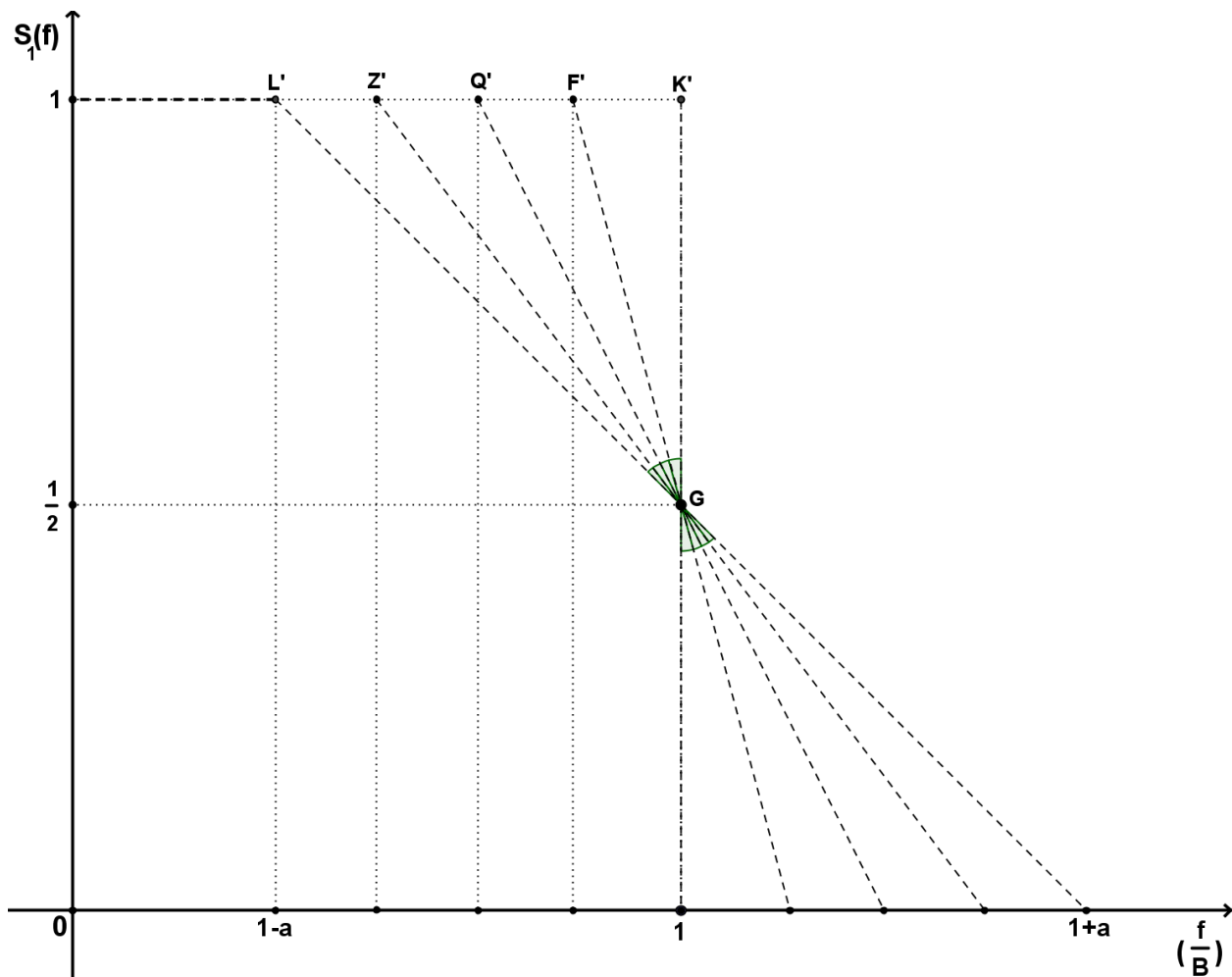
Επίσης το σημείο L' θα έχει συντεταγμένες $L'(x_2, 1)$ καθώς τα τρίγωνα LKG και $L'K'G$ είναι ίσα αφού $\angle G_2 = \angle G_3$ ως κατακορυφήν, $\angle K = \angle K' = 90^\circ$ και $GK = GK'$. Άρα $KL = K'L'$.

Δηλαδή $KL = 1+\alpha - 1 = \alpha$

Άρα $M'L' = M'K' - L'K' \Rightarrow M'L' = 1-\alpha$. Άρα το σημείο N έχει συντεταγμένες $N(1-\alpha, 0)$ και το σημείο L έχει συντεταγμένες $L(1+\alpha, 0)$.

Η παράμετρος α είναι το roll-off factor για το σύστημά μας.

Έτσι λοιπόν καταλήγουμε στο παρακάτω διάγραμμα 25:



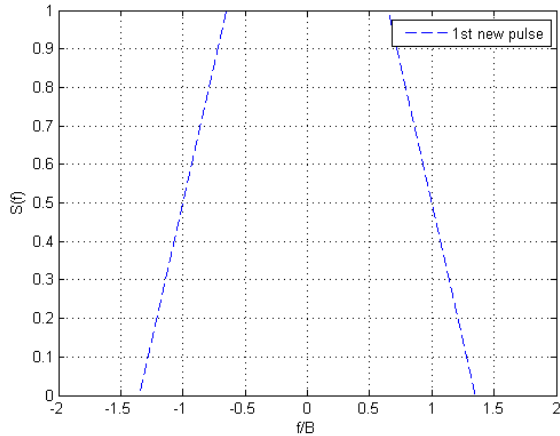
Διάγραμμα 25

5.1.3 Υπολογισμός συνάρτησης μεταφοράς

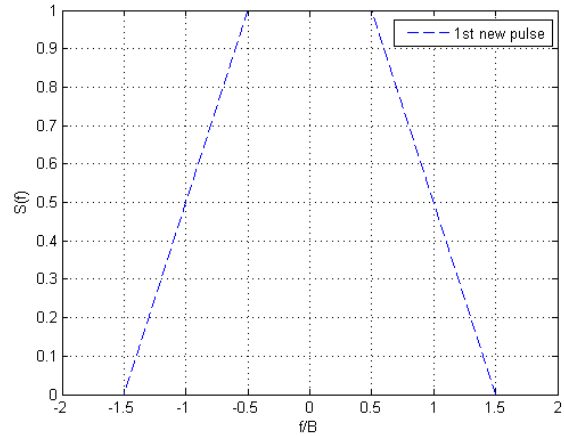
Χρησιμοποιώντας την εξίσωση της ευθείας από την σχέση (5.1) καταλήγουμε στην συνάρτηση που περιγράφει τον πρώτο νέο παλμό στο πεδίο των συχνοτήτων :

$$S_1(f) = \begin{cases} T_b & , 0 \leq |f| \leq (1-a)B \\ -\frac{T_b}{2a} \left(\frac{|f|}{B} - 1 + a \right) + T_b & , (1-a)B \leq |f| \leq (1+a)B \\ 0 & , |f| \geq (1+a)B \end{cases} \quad (5.2)$$

Ας δούμε και κάποια ενδεικτικά διαγράμματα τις συνάρτησης (5.2):



Διάγραμμα 26 (Για roll-off factor $\alpha=0.35$)



Διάγραμμα 27 (Για roll-off factor $\alpha=0.35$)

Τώρα θα υπολογίσουμε στην κρουστική απόκριση της παραπάνω συνάρτησης $S(f)$.

5.1.4 Υπολογισμός κρουστικής απόκρισης

Η κρουστική απόκριση βρίσκεται αν πάρουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης $S_1(f)$. Άρα:

$$s_1(t) = \int_{-(1+a)B}^{(1+a)B} S(f)e^{j2\pi f t} df \quad (5.3)$$

- Για τον πρώτο κλάδο της (5.2) έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_{-(1-a)B}^{(1-a)B} T e^{2\pi i f t} df &= \left[\frac{T}{2\pi t j} e^{2\pi i f t} \right]_{-(1-a)B}^{(1-a)B} = \frac{T}{2\pi t j} \left(e^{2\pi i j (1-a)B} - e^{-2\pi i j (1-a)B} \right) = \\ &= \frac{T}{\pi t} \sin(2\pi t (1-a)B) = I_1 \end{aligned} \quad (5.4)$$

- Για τον δεύτερο κλάδο της (5.2) έχουμε:

Θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα αυτού του κλάδου με άκρα C, D για ευκολία στου μετέπειτα υπολογισμούς μας.

$$\begin{aligned}
& \int_C^D \left(-\frac{T}{2aB} f + \frac{aT+T}{2a} \right) e^{2\pi i j f} df = \frac{-T}{2aB} \int_C^D f e^{2\pi i j f} df + \frac{aT+T}{2a} \int_C^D e^{2\pi i j f} df = \\
& = \left[-\frac{T}{2aB} \frac{e^{2\pi i j f}}{2\pi i j} \left(f - \frac{1}{2\pi i j} \right) \right]_C^D + \left[\frac{aT+T}{T} \frac{1}{2\pi i j} e^{2\pi i j f} \right]_C^D = \\
& = \left[\left(-\frac{T}{8aB\pi^2 t^2} e^{2\pi i j f} - \frac{T}{4aB\pi i j} e^{2\pi i j f} f \right) \right]_C^D + \frac{aT+T}{4a\pi i j} (e^{2\pi i j D} - e^{2\pi i j C}) = \\
& = \frac{-T}{8aB\pi^2 t^2} (e^{2\pi i j D} - e^{2\pi i j C}) - \frac{T}{4aB\pi i j} (De^{2\pi i j D} - Ce^{2\pi i j C}) \tag{5.5}
\end{aligned}$$

Άρα για $C = -(1+a)B$ και $D = -(1-a)B$ η (5) γίνεται:

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{T}{8aB\pi^2 t^2} (e^{-2\pi i j(1-a)B} - e^{-2\pi i j(1+a)B}) + \frac{T}{4aB\pi i j} [-e^{-2\pi i j(1-a)B} (1-a)B + e^{-2\pi i j(1+a)B} (1+a)B] + \\
& + \frac{aT+T}{4a\pi i j} (e^{-2\pi i j(1-a)B} - e^{-2\pi i j(1+a)B}) \tag{5.6}
\end{aligned}$$

Επίσης για $C = (1-a)B$ και $D = (1+a)B$ η (5) γίνεται:

$$\begin{aligned}
I_3 &= \frac{-T}{8aB\pi^2 t^2} (e^{2\pi i j(1+a)B} - e^{2\pi i j(1-a)B}) - \frac{T}{4aB\pi i j} [e^{2\pi i j(1+a)B} (1+a)B - e^{2\pi i j(1-a)B} (1-a)B] + \\
& + \frac{aT+T}{4a\pi i j} (e^{2\pi i j(1+a)B} - e^{2\pi i j(1-a)B}) \tag{5.7}
\end{aligned}$$

Άρα έχουμε τη σχέση (5.3) να γίνεται: $s_1(t) = I_1 + I_2 + I_3$ (5.8)

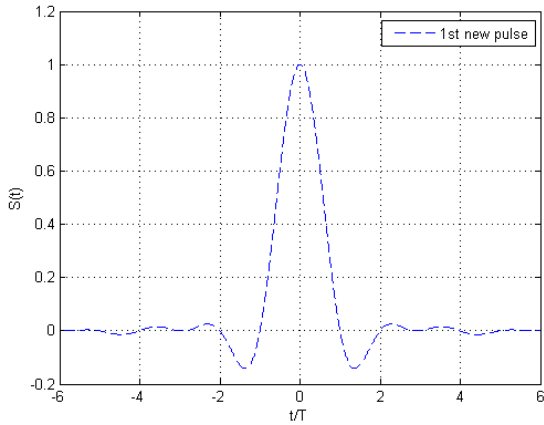
$$\begin{aligned}
I_2 + I_3 &= -\frac{T}{8aB\pi^2 t^2} (e^{2\pi i j(1+a)B} - e^{2\pi i j(1-a)B} - e^{-2\pi i j(1-a)B} + e^{-2\pi i j(1+a)B}) - \\
& - \frac{T}{4aB\pi i j} [e^{2\pi i j(1+a)B} (1+a)B - e^{2\pi i j(1-a)B} (1-a)B + e^{-2\pi i j(1-a)B} - e^{-2\pi i j(1+a)B}] = \\
& = -\frac{T}{4aB\pi^2 t^2} \{ \cos[2\pi t B(1+a)] - \cos[2\pi t B(1-a)] \} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{T}{2a\pi t} \left\{ (1+a) \sin[2\pi t B(1+a)] + (a-1) \sin[2\pi t B(1-a)] \right\} + \\
& + \frac{aT+T}{2a\pi t} \left\{ \sin[2\pi t B(1+a)] - \sin[2\pi t B(1-a)] \right\} = \\
& = \frac{T}{4aB\pi^2 t^2} \left\{ \cos[2\pi t B(1-a)] - \cos[2\pi t B(1+a)] \right\} - \\
& -\frac{T}{2a\pi t} \left\{ (1+a) \sin[2\pi t B(1+a)] + (a-1) \sin[2\pi t B(1-a)] \right\} + \\
& + \frac{aT+T}{2a\pi t} \left\{ \sin[2\pi t B(1+a)] - \sin[2\pi t B(1-a)] \right\} \tag{5.9}
\end{aligned}$$

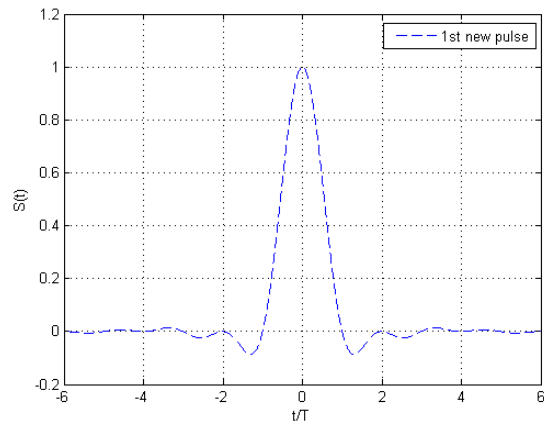
Άρα η (5.8) γίνεται από τις (5.4) και (5.9) :

$$\begin{aligned}
s_1(t) &= \frac{T}{\pi t} \sin[2\pi t B(1-a)] + \frac{T}{4aB\pi^2 t^2} \left\{ \cos[2\pi t B(1-a)] - \cos[2\pi t B(1+a)] \right\} - \\
& -\frac{T}{2a\pi t} \left\{ (1+a) \sin[2\pi t B(1+a)] + (a-1) \sin[2\pi t B(1-a)] \right\} + \\
& + \frac{aT+T}{2a\pi t} \left\{ \sin[2\pi t B(1+a)] - \sin[2\pi t B(1-a)] \right\} \tag{5.10}
\end{aligned}$$

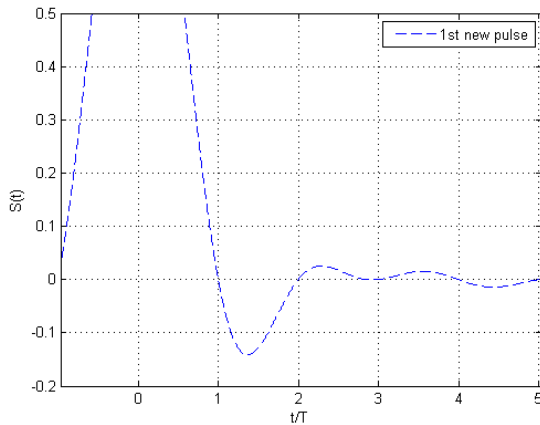
Η σχέση (5.10) αποτελεί την συνάρτηση της κρουστικής απόκρισης του παλμού μας. Ας δούμε κάποια ενδεικτικά διαγράμματα τις συνάρτησης (5.10):



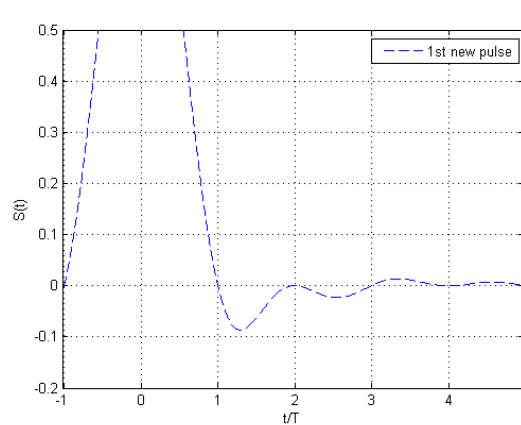
Διάγραμμα 28 (Για roll-off factor $\alpha=0.35$)



Διάγραμμα 29 (Για roll-off factor $\alpha=0.5$)



Διάγραμμα 30 (Για roll-off factor $\alpha=0.35$)



Διάγραμμα 31 (Για roll-off factor $\alpha=0.5$)

Παρατηρούμε στα διαγράμματα 28, 29, 30, 31 της κρουστικής απόκρισης στο πεδίο του χρόνου ότι ο νέος παλμός που δημιουργήσαμε, μηδενίζεται σε ακέραια πολλαπλάσια της περιόδου κάτι που πρέπει να συμβαίνει καθώς πρέπει να ισχύει το θεώρημα του Nyquist.

5.1.5 Υπολογισμός πιθανότητας σφάλματος υπό την επίδραση jitter

Εργαζόμαστε τώρα όπως και στην περίπτωση του Nyquist παλμού και [2] παλμού, χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.1) για να υπολογίσουμε την πιθανότητα σφάλματος για διάφορες τιμές roll-off factor a και λόγου t/T_B , υπό την επίδραση jitter. Τα αποτελέσματα βρίσκονται στον παρακάτω πίνακα 5 :

Πίνακας 5

1 st NEW PULSE						
a		$t/T_B = \pm 0.05$	$t/T_B = \pm 0.1$	$t/T_B = \pm 0.2$	$t/T_B = \pm 0.25$	$t/T_B = \pm 0.3$
0.25	P_e	6.3137e-08	1.5495e-06	4.5165e-04	3.6173e-03	1.6908e-02
0.35		4.3276e-08	6.619e-07	1.3481e-04	1.2256e-03	7.3886e-03
0.5		2.6904e-08	2.3016e-07	2.7318e-05	2.6194e-04	1.9936e-03
0.75		1.5036e-08	5.6634e-08	3.6915e-06	4.1058e-05	4.4854e-04
1		1.2347e-08	2.9566e-08	1.3549e-06	1.886e-005	2.7444e-04

5.1.6 Συγκριτικά αποτελέσματα πιθανότητας σφάλματος με αυτά του Nyquist παλμού

Ας δούμε τώρα τα παραπάνω αποτελέσματα του πίνακα 5 συγκριτικά με αυτά του Nyquist.

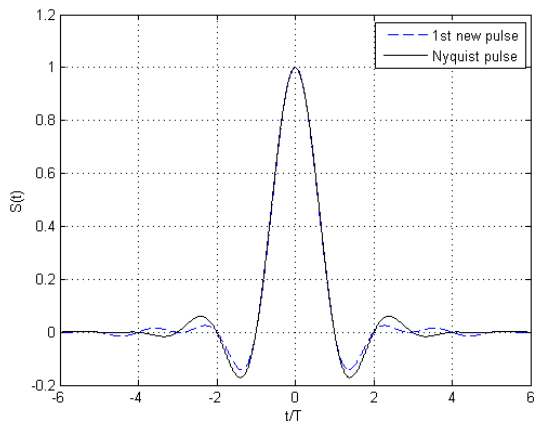
Πίνακας 6

PULSES	t/T_B	± 0.05	± 0.1	± 0.2	± 0.25	± 0.3
		$a = 0.25$				
Nyquist	P_e	8.2189e-08	2.8184e-06	9.7462e-04	6.7732e-03	2.5914e-02
1st new		6.3137e-08	1.5495e-06	4.5165e-04	3.6173e-03	1.6908e-02
		$a = 0.35$				
Nyquist	P_e	5.9997e-08	1.3896e-06	3.9084e-04	3.1988e-03	1.5481e-02
1st new		4.3276e-08	6.619e-07	1.3481e-04	1.2256e-03	7.3886e-03
		$a = 0.5$				
Nyquist	P_e	3.9723e-08	5.4890e-07	1.0217e-04	9.4694e-04	0.6007e-02
1st new		2.6904e-08	2.3016e-07	2.7318e-05	2.6194e-04	1.9936e-03
		$a = 0.75$				
Nyquist	P_e	2.2777e-08	1.5761e-07	1.5346e-05	1.4907e-04	0.1231e-02
1st new		1.5036e-08	5.6634e-08	3.6915e-06	4.1058e-05	4.4854e-04
		$a = 1$				
Nyquist	P_e	1.5281e-08	5.8720e-08	3.6543e-06	3.9247e-05	0.419e-03
1st new		1.2347e-08	2.9566e-08	1.3549e-06	1.886e-005	2.7444e-04

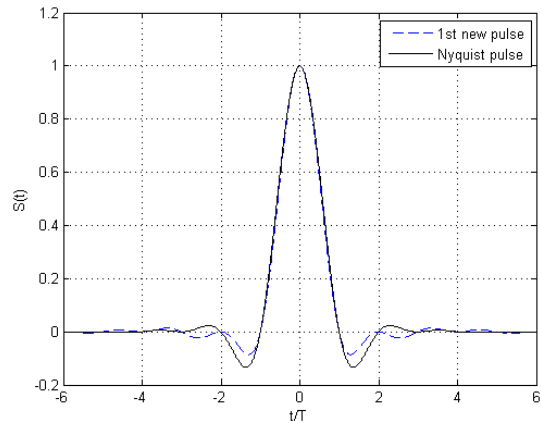
Μπορούμε να παρατηρήσουμε από τον πίνακα 6 πως σε όλες τις κατηγορίες η πιθανότητα σφάλματος που έχει ο παλμός που κατασκευάσαμε είναι μικρότερη από την αντίστοιχη του Nyquist παλμού. Σε κάποιες κατηγορίες μάλιστα η διαφορά αγγίζει μία τάξη μεγέθους.

5.1.7 Συνοπτικά διαγράμματα στο πεδίο των συχνοτήτων και του χρόνου καθώς και διαγράμματα οφθαλμού

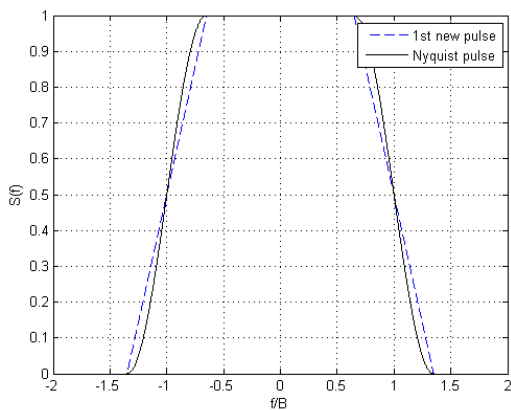
Παραθέτουμε τα παρακάτω διαγράμματα του παλμού που κατασκευάσαμε στο πεδίο των συχνοτήτων και στο πεδίο του χρόνου συγκριτικά τον Nyquist παλμό, καθώς και ενδεικτικά δύο διαγράμματα οφθαλμού:



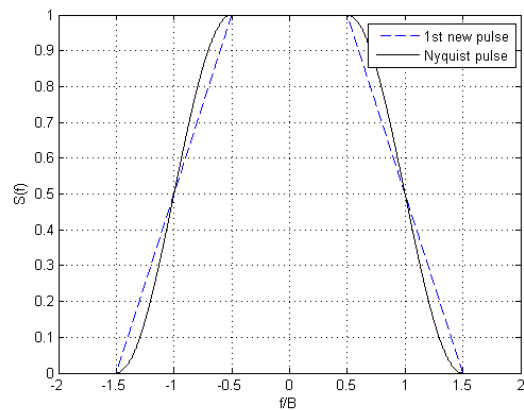
Διάγραμμα 32 (Για roll-off factor $\alpha=0.35$)



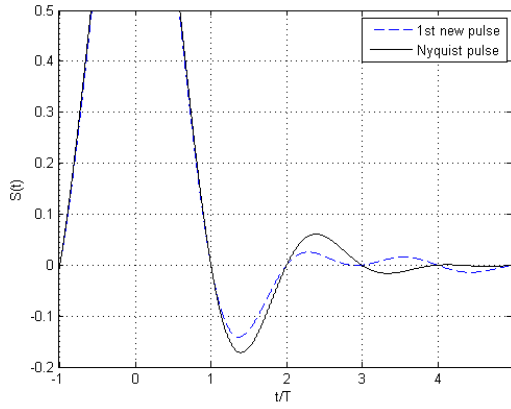
Διάγραμμα 33 (Για roll-off factor $\alpha=0.5$)



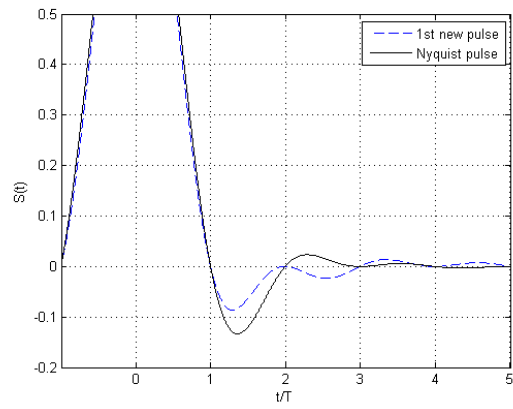
Διάγραμμα 34 (Για roll-off factor $\alpha=0.35$)



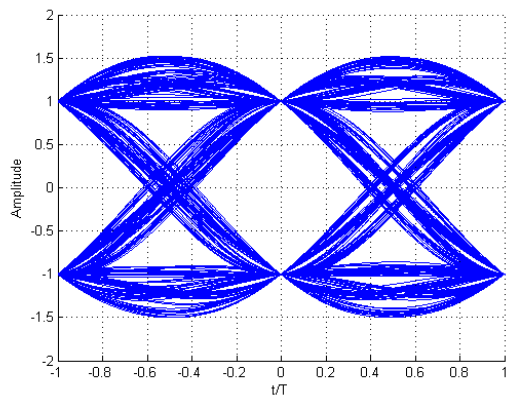
Διάγραμμα 35 (Για roll-off factor $\alpha=0.5$)



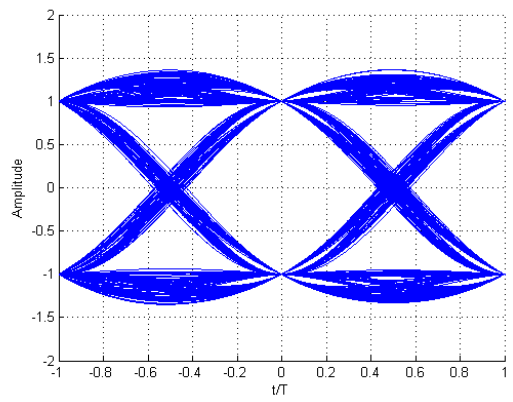
Διάγραμμα 36 (Για roll-off factor $\alpha=0.35$)



Διάγραμμα 37 (Για roll-off factor $\alpha=0.5$)

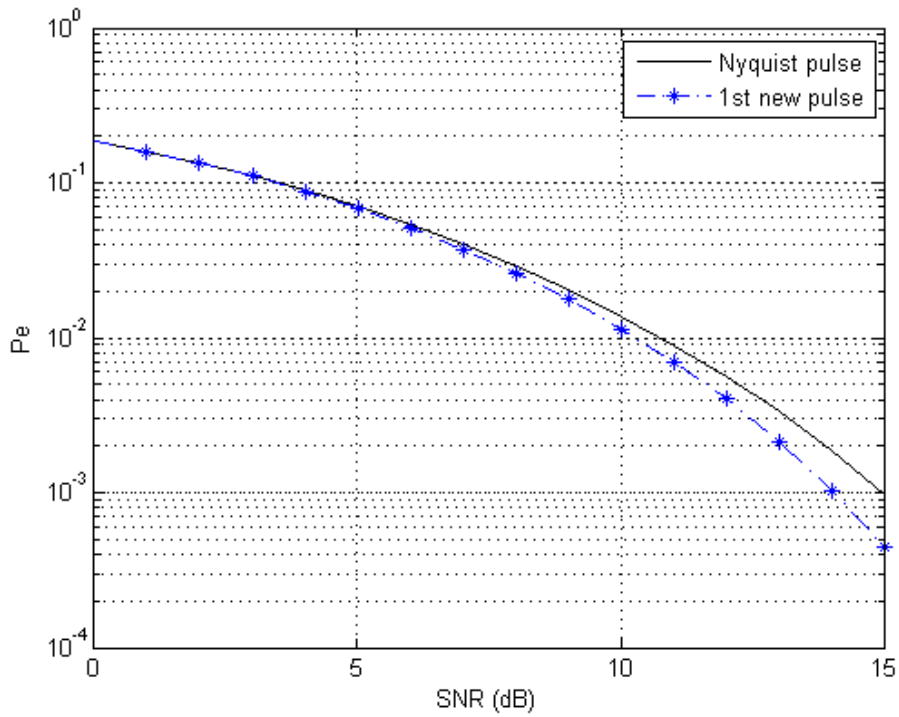


Διάγραμμα 38 (Για roll-off factor $\alpha=0.35$)

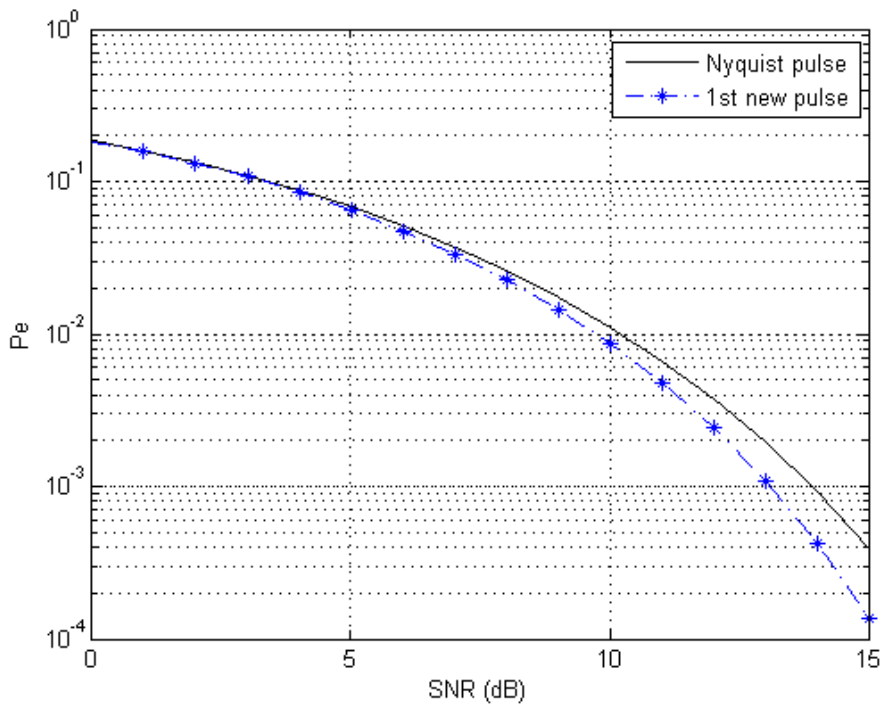


Διάγραμμα 39 (Για roll-off factor $\alpha=0.35$)

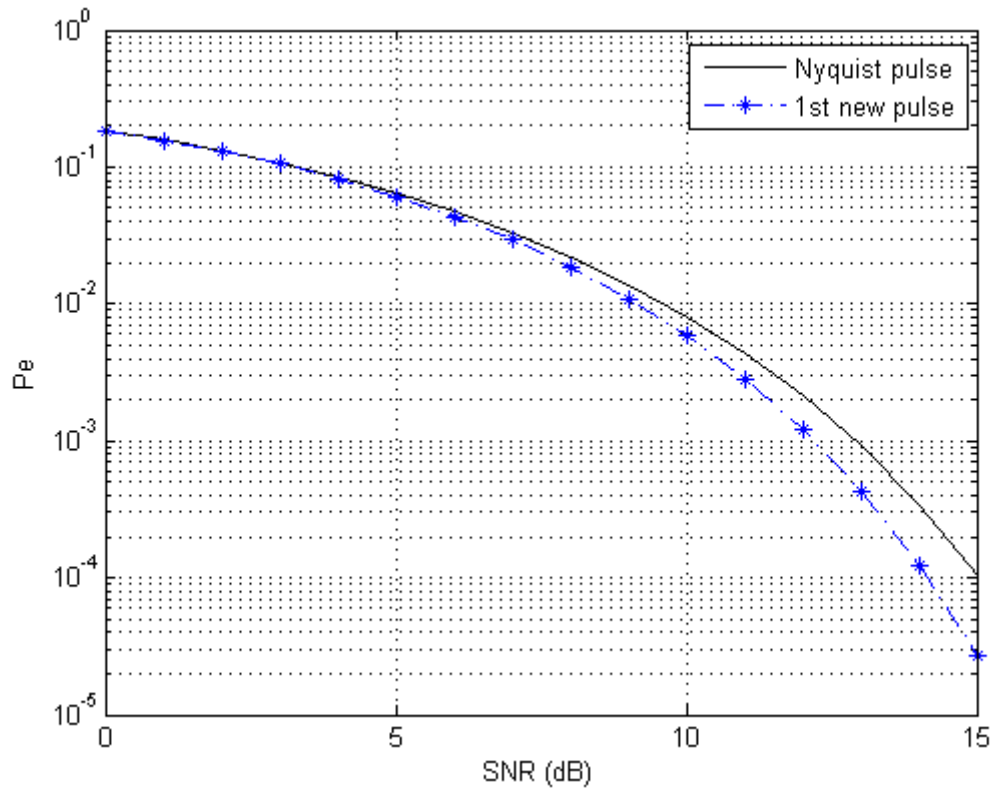
5.1.8 Συνοπτικά διαγράμματα πιθανότητας σφάλματος σε σύγκριση με τον Nyquist παλμό



Διάγραμμα 40 (Για roll-off factor $\alpha=0.25$ και λόγο $t/T_b = 0.2$)



Εικόνα 1 Διάγραμμα 41 (Για roll-off factor $\alpha=0.35$ και λόγο $t/T_b = 0.2$)



Διάγραμμα 42 (Για roll-off factor $\alpha=0.5$ και λόγο $t/T_b = 0.2$)

Ο παλμός που δημιουργήσαμε έχει καλύτερη συμπεριφορά από αυτή του παλμού Nyquist καθώς στο πεδίο του χρόνου όπως παρατηρούμε από τα διαγράμματα 32, 33, 36, 37 οι κύριοι και οι δευτερεύοντες λοβοί είναι πιο μικροί σε σχέση με αυτούς του Nyquist παλμού οπότε η διασυμβολική παρεμβολή που δημιουργείται είναι μικρότερη και άρα είναι μικρότερη και η πιθανότητα σφάλματος, κάτι που είναι φανερό και από τα διαγράμματα οφθαλμού 38 και 39, αλλά και από τον πίνακα 5 που περιέχει τις πιθανότητες σφάλματος.

5.2 Κατασκευή δεύτερου νέου παλμού

5.2.1 Εισαγωγή

Το ερώτημα όμως πλέον είναι μήπως θα μπορούσαμε να δημιουργήσουμε ακόμα έναν παλμό που να είναι καλύτερος από αυτόν που φτιάξαμε στην ενότητα 5.1;

Η ιδέα για την κατασκευή του νέου παλμού θα βασιστεί στη λογική της προηγούμενης κατασκευής του διαγράμματος 25 αλλά αυτή την φορά θα γίνουμε πιο ευέλικτοι. Με τον όρο ευέλικτοι εννοούμε πως θα κρατήσουμε την ίδια κατασκευή αλλά με μία σημαντική διαφορά, αντί να ενώσουμε τα σημεία L', G, L του διαγράμματος 24 με μία ευθεία, θα εισάγουμε και ενδιάμεσα σημεία και θα προσπαθήσουμε να ενώσουμε όλα τα σημεία μεταξύ τους με "κομμάτια" τριτοβάθμιας πολυωνυμικής συνάρτησης.

Οι πολυωνυμικές αυτές συναρτήσεις θα έχουν τη μορφή:

$$y = A_i(x - x_i)^3 + B_i(x - x_i)^2 + C_i(x - x_i) + D_i, \quad 2 \leq i \leq n, \quad (5.11)$$

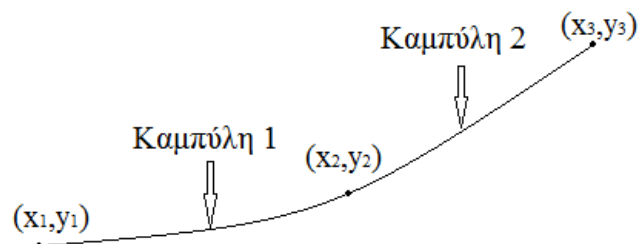
όπου n το πλήθος των σημείων από τα οποία θα "περάσει" η καμπύλη μας.

Κάτι τέτοιο είναι αρκετά πολύπλοκο καθώς για να γίνει αυτό θα πρέπει να εξασφαλιστούν κάποιες συνθήκες όπως θα δούμε στην αμέσως επόμενη υποενότητα 5.2.2

5.2.2 Παρουσίαση της μεθόδου κατασκευής

Αφού οι καμπύλες 1 και 2 θα είναι πολυωνυμικές συναρτήσεις τρίτου βαθμού, θα πρέπει η πρώτη και δεύτερη παράγωγος σε κάθε πολυώνυμο να είναι συνεχής στα σημεία της ένωσης και επιπλέον να ισχύουν συνοριακές συνθήκες για τα σημεία των άκρων $(x_1, y_1), (x_3, y_3)$.

Ας δούμε όμως στην πράξη πως θα μπορούσε να γίνει αυτή η ένωση των σημείων καθώς και τις συνθήκες που θα πρέπει να ισχύουν.



Διάγραμμα 43

Όπως βλέπουμε στο παραπάνω διάγραμμα 43 δημιουργούμε μία καμπύλη που αποτελείται από τις καμπύλες 1 και 2. Η καμπύλη αυτή θα πρέπει να περάσει από τα σημεία $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$.

Άρα έχουμε:

- Για την καμπύλη 1 έχουμε από την σχέση (5.11):

$$y = A_1(x - x_1)^3 + B_1(x - x_1)^2 + C_1(x - x_1) + D_1 \quad (5.12)$$

$$y' = 3A_1(x - x_1)^2 + 2B_1(x - x_1) + C_1 \quad (5.13)$$

$$y'' = 6A_1(x - x_1) + 2B_1 \quad (5.14)$$

- Για την καμπύλη 2 έχουμε από την σχέση (11):

$$y = A_2(x - x_2)^3 + B_2(x - x_2)^2 + C_2(x - x_2) + D_2 \quad (5.15)$$

$$y' = 3A_2(x - x_2)^2 + 2B_2(x - x_2) + C_2 \quad (5.16)$$

$$y'' = 6A_2(x - x_2) + 2B_2 \quad (5.17)$$

Αφού υπολογίσαμε τις παραγώγους για τις δύο καμπύλες τώρα θα εργαστούμε με τις συνθήκες που θα πρέπει να ισχύουν:

- Για την καμπύλη 1 έχουμε ότι πρέπει να ισχύουν:

Ξεκινάμε με την δεύτερη παράγωγο και έχουμε: $y'' = y_1''$ για $x = x_1$ και $y'' = y_2''$ για $x = x_2$ και έστω $h_1 = x_2 - x_1$. Τότε:

$$y_1'' = 6A_1(x_1 - x_1) + 2B_1 = 0 + 2B_1 = 2B_1 \quad \text{Άρα } B_1 = \frac{y_1''}{2} \quad (5.18)$$

$$y_2'' = 6A_1(x_2 - x_1) + 2B_1 = 6A_1h_1 + y_1'' \quad \text{Άρα } A_1 = \frac{y_2'' - y_1''}{6h_1} \quad (5.19)$$

Τότε από τις σχέσεις (5.14), (5.18) και (5.19) έχουμε:

$$y'' = \frac{(x - x_1)(y_2'' - y_1'')}{x_2 - x_1} + y_1'' \quad (5.20)$$

Επίσης έχουμε ότι η καμπύλη 1 περνά από τα σημεία $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ Άρα:

$$y_1 = 0 + 0 + 0 + D_1 \Rightarrow y_1 = D_1 \quad (5.21)$$

$$y_2 = \frac{(x_2 - x_1)^3 (y_2'' - y_1'')}{6h_1} + \frac{y_1'' (x_2 - x_1)^2}{2} + C_1 (x_2 - x_1) + y_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_2 = \frac{h_1^3 (y_2'' - y_1'')}{6h_1} + \frac{y_1'' h_1^2}{2} + C_1 h_1 + y_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_2 = \frac{h_1^2 (y_2'' - y_1'')}{6} + \frac{y_1'' h_1^2}{2} + C_1 h_1 + y_1 \quad (5.22)$$

Έχουμε από τις σχέσεις (5.21) , (5.22) :

$$y_2 - y_1 = \frac{y_2'' h_1^2}{6} - \frac{y_1'' h_1^2}{6} + \frac{y_1'' h_1^2}{2} + C_1 h_1 \Rightarrow \frac{y_2 - y_1}{h_1} = \frac{y_2'' h_1}{6} - \frac{y_1'' h_1}{6} + \frac{y_1'' h_1}{2} + C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y_2 - y_1}{h_1} = \frac{y_2'' h_1}{6} - \frac{y_1'' h_1}{6} + \frac{3y_1'' h_1}{6} + C_1 \Rightarrow \frac{y_2 - y_1}{h_1} = \frac{y_2'' h_1}{6} + \frac{y_1'' h_1}{3} + C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{y_2'' h_1}{6} - \frac{y_1'' h_1}{3} \quad (5.23)$$

Επίσης θα πρέπει να ισχύει ότι οι πρώτες παράγωγοι στις καμπύλες 1 και 2 θα πρέπει να είναι ίσες στο σημείο (x_2, y_2) και από τις σχέσεις (5.13) και (5.16) έχουμε:

$$3A_1(x - x_1)^2 + 2B_1(x - x_1) + C_1 = 3A_2(x - x_2)^2 + 2B_2(x - x_2) + C_2 \quad (5.24)$$

και από τις σχέσεις (5.18) , (5.19) , (5.23) η (5.24) γίνεται:

$$3A_1 h_1^2 + 2B_1 h_1 + C_1 = C_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{h_1 (y_2'' - y_1'')}{2} + y_1'' h_1 + \frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{y_2'' h_1}{6} - \frac{y_1'' h_1}{3} = \frac{(y_3 - y_2)}{h_2} - \frac{y_3'' h_2}{6} - \frac{y_2'' h_2}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{h_1 (y_2'' - y_1'')}{2} + y_1'' h_1 - \frac{y_2'' h_1}{6} - \frac{y_1'' h_1}{3} + \frac{y_3'' h_2}{6} + \frac{y_2'' h_2}{3} = \frac{(y_3 - y_2)}{h_2} - \frac{(y_2 - y_1)}{h_1} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow 3h_1(y_2 - y_1) + 6y_1(h_1 - y_2) - 2y_1(h_1 + y_3) + h_2 + 2y_2 h_2 = \frac{6(y_3 - y_2)}{h_2} - \frac{6(y_2 - y_1)}{h_1} \Rightarrow \\
&\Rightarrow 3h_1 y_2 - 3h_1 y_1 + 6y_1 h_1 - 6y_1 y_2 - 2y_1 h_1 - 2y_1 y_3 + h_2 + 2y_2 h_2 = \frac{6(y_3 - y_2)}{h_2} - \frac{6(y_2 - y_1)}{h_1} \Rightarrow \\
&\Rightarrow y_1(6h_1 - 3h_1 - 2h_1) + y_2(2h_1 + 2h_2) = \frac{6(y_3 - y_2)}{h_2} - \frac{6(y_2 - y_1)}{h_1} \Rightarrow \\
&\Rightarrow h_1 y_1 + 2(h_1 + h_2)y_2 + h_2 y_3 = 6 \left(\frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{y_2 - y_1}{h_1} \right) \tag{5.25}
\end{aligned}$$

Η σχέση (5.25) είναι πολύ σημαντική για την συνέχεια της εργασίας μας καθώς γενικεύοντας την για n σημεία σ'ένα τριδιαγώνιο σύστημα της μορφής

$$E * x = b \tag{5.26}$$

από γραμμικές εξισώσεις, όπου x παριστάνουμε τις άγνωστες δεύτερες παραγώγους των σημείων και b είναι το δεύτερο μέλος του συστήματος. Άρα έχουμε ότι ο πίνακας E ισούται με:

$$\begin{bmatrix}
u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & h_1 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & h_{n-2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_n
\end{bmatrix}$$

Ο πίνακας x ισούται με $\begin{bmatrix} y_1'' \\ y_2'' \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{n-1}'' \\ y_n'' \end{bmatrix}$ και ο πίνακας b ισούται με: $6 \cdot \begin{bmatrix} u_3 \\ \frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{y_2 - y_1}{h_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}} \\ u_4 \end{bmatrix}$

και επειδή παίρνω αρχικές συνθήκες ότι $y_1'' = 0$ και $y_n'' = 0$ τότε $u_1 = u_2 = 1$ και $u_3 = u_4 = 0$.

Άρα έχουμε για τους συντελεστές της σχέσης (5.11) :

$$A_i = \frac{y_{i+1}'' - y_i''}{6h_i} \quad (5.27)$$

$$B_i = \frac{y_i''}{2} \quad (5.28)$$

$$C_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_{i+1}'' h_i}{6} - \frac{y_i'' h_i}{3} \quad (5.29)$$

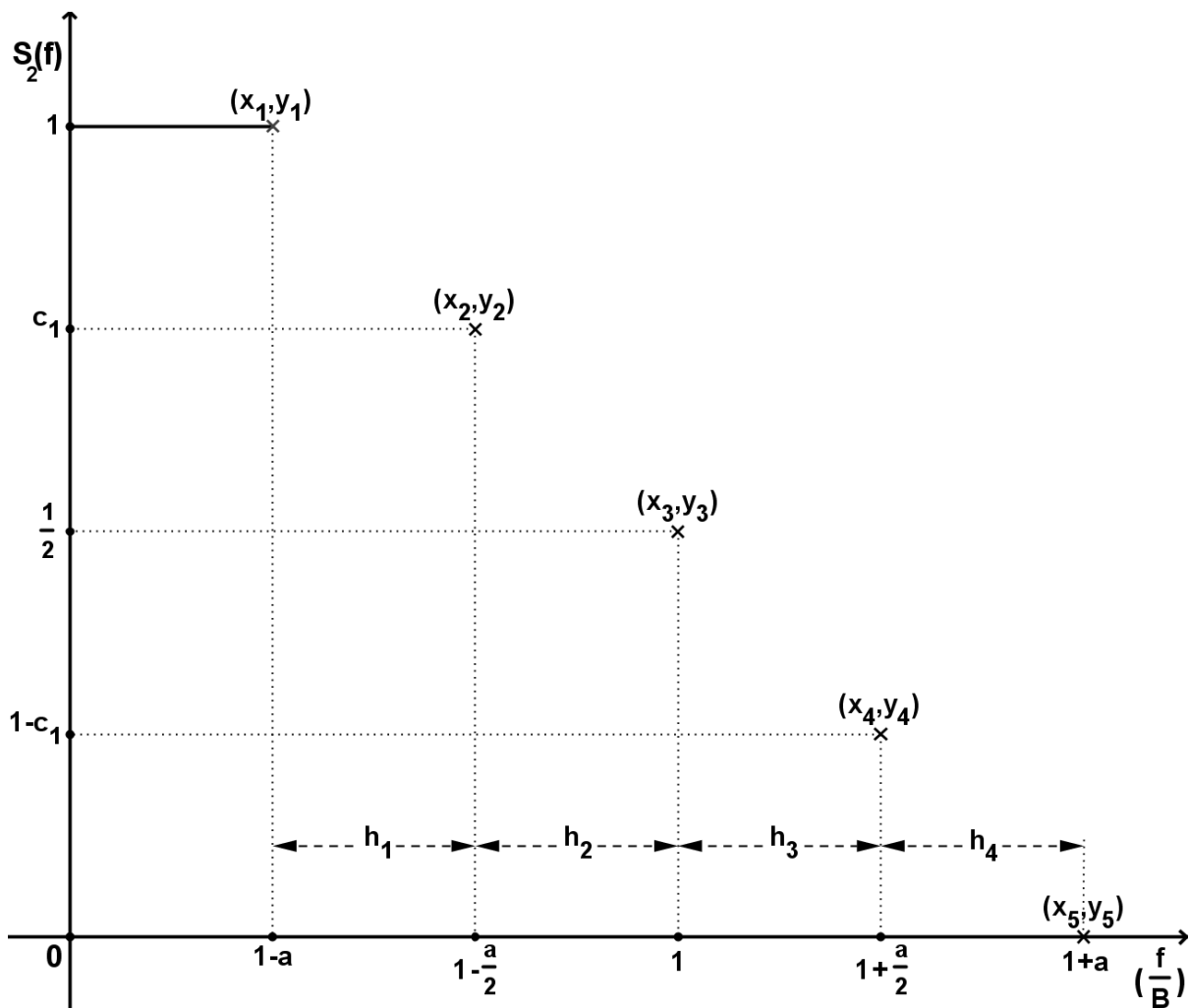
$$D_i = y_i \quad (5.30)$$

όπου $2 \leq i \leq n$ με n να είναι το πλήθος των σημείων από τα οποία θα περάσει η καμπύλη μας. Έτσι λοιπόν με αυτή τις σχέσεις (5.27), (5.28), (5.29), (5.30) μπορούμε να υπολογίσουμε τους συντελεστές των τριτοβάθμιων πολυωνύμων. Η τελική μας συνάρτηση θα έχει μορφή:

$$S(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < x_1 \\ A_1(x-x_1)^3 + B_1(x-x_1)^2 + C_1(x-x_1) & x_1 \leq x \leq x_2 \\ A_2(x-x_2)^3 + B_2(x-x_2)^2 + C_2(x-x_2) & x_2 < x \leq x_3 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ A_{n-2}(x-x_{n-2})^3 + B_{n-2}(x-x_{n-2})^2 + C_{n-2}(x-x_{n-2}) & x_{n-2} < x \leq x_{n-1} \\ A_{n-1}(x-x_{n-1})^3 + B_{n-1}(x-x_{n-1})^2 + C_{n-1}(x-x_{n-1}) & x_{n-1} < x \leq x_n \\ 0 & x > x_n \end{cases} \quad (5.31)$$

5.2.3 Γεωμετρική κατασκευή δεύτερου νέου παλμού

Είμαστε πλέον έτοιμοι να προχωρήσουμε στην κατασκευή του δεύτερου παλμού μας. Ας δούμε το παρακάτω διάγραμμα 41:



Διάγραμμα 44

Όπως βλέπουμε κρατήσαμε την ίδια δομή που είχαμε στα διαγράμματα 24 και 25 αλλά προσθέσαμε δύο επιπλέον σημεία τα (x_2, y_2) και (x_4, y_4) . Τα σημεία αυτά τα έχουμε σταθεροποιήσει στον οριζόντιο άξονα ως προς την μία τους συντεταγμένη τους αλλά έχουν την δυνατότητα ως προς τον κάθετο άξονα να μεταβάλλονται, δηλαδή κινούνται κατακόρυφα ανάλογα με τις ανάγκες μας. Όλα τα υπόλοιπα σημεία του διαγράμματός μας είναι σταθερά. Οι τετμημένες των σημείων $(x_2, y_2), (x_4, y_4)$ είναι δική μας επιλογή και εδώ επιλέξαμε να είναι $x_2 = 1 - \frac{a}{2}$ και $x_4 = 1 + \frac{a}{2}$, δηλαδή τα μέσα των αποστάσεων των σημείων (x_1, y_1) και (x_5, y_5) αντίστοιχα στον οριζόντιο άξονα από το κεντρικό σημείο (x_3, y_3) .

Ένα άλλο χαρακτηριστικό της κατασκευής αυτής είναι ότι βασίζεται στην περιττή συμμετρία με κέντρο το σημείο (x_3, y_3) . Δηλαδή όσο το σημείο (x_2, y_2) θα κινείται πιο ψηλά κατακόρυφα στον κάθετο άξονα, άλλο τόσο το σημείο (x_4, y_4) θα κινείται προς τα κάτω στον κατακόρυφο άξονα. Αυτό φαίνεται και από τις αντίστοιχες συντεταγμένες τους (τεταγμένες) καθώς το σημείο (x_2, y_2) έχει συντεταγμένες $\left(1 - \frac{a}{2}, c_1\right)$, ενώ το σημείο (x_4, y_4) έχει συντεταγμένες $\left(1 + \frac{a}{2}, 1 - c_1\right)$, όπου a το roll-off factor του παλμού που θα δημιουργήσουμε και $c_1 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Πρακτικά στο σύστημά μας για τους υπολογισμούς μας θα θεωρήσουμε ότι η παράμετρος c_1 παίρνει τιμές στο διάστημα $(0.5, 1)$ με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων, δηλαδή $c_1 = 0.51, 0.52, \dots, 0.98, 0.99$ και αυτό επειδή ο υπολογιστής έχει πεπερασμένη επεξεργαστική ισχύ. Θεωρητικά όμως θα μπορούσε να πάρει οποιαδήποτε τιμή η c_1 στο διάστημα $(0.5, 1)$. Η παράμετρος c_1 και ο τρόπος που ορίστηκαν τα σημεία (x_2, y_2) και (x_4, y_4) παίζουν καθοριστικό ρόλο καθώς μ' αυτόν τον τρόπο διασφαλίσαμε ότι το συνολικό εμβαδό της κατασκευής μας θα παραμένει σταθερό ανεξάρτητα με την τιμή που θα παίρνει η παράμετρος c_1 , καθώς όπως είπαμε βασιζόμαστε στην περιττή συμμετρία με κέντρο το σημείο (x_3, y_3) . Στόχος μας θα είναι να προσδιορίσουμε εκείνες τις τιμές της παραμέτρου c_1 , οι οποίες θα μας δίνουν την μικρότερη πιθανότητα σφάλματος για την συνάρτηση που θα κατασκευάσουμε στο πεδίο των συχνοτήτων. Θα κατασκευάσουμε δηλαδή μια οικογένεια συναρτήσεων (παλμών) όπου θα εξαρτώνται από την παράμετρο c_1 και εμείς θα επιλέξουμε τις βέλτιστες. Οι συναρτήσεις αυτές θα κατασκευαστούν χρησιμοποιώντας την τεχνική που αποδείξαμε πιο πάνω με τα πολυώνυμα τρίτου βαθμού. Θα δημιουργήσουμε καμπύλες όπου θα

περνούν από όλα τα σημεία $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4), (x_5, y_5)$. Θα στηριχτούμε στις σχέσεις (5.25) , (5.26) , (5.27) , (5.28) , (5.29) και (5.30) . Επίσης στην κατασκευή μας θεωρούμαι ότι $S_2((1-a)B)=1$ και ότι $S_2(B)=\frac{1}{2}$.

5.2.4 Υπολογισμός απαιτούμενων στοιχείων για την εύρεση της συνάρτησης μεταφοράς

Έχουμε:

$(x_1, y_1) = (1-a, 1)$	$h_1 = x_2 - x_1 = \frac{a}{2}$
$(x_2, y_2) = (1-\frac{a}{2}, c_1)$	$h_2 = x_3 - x_2 = \frac{a}{2}$
$(x_3, y_3) = (1, \frac{1}{2})$	$h_3 = x_4 - x_3 = \frac{a}{2}$
$(x_4, y_4) = (1+\frac{a}{2}, 1-c_1)$	$h_4 = x_5 - x_4 = \frac{a}{2}$
$(x_5, y_5) = (1+a, 0)$	

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (5.25) και (5.26) επιλύουμε το σύστημα $E * x = b$, όπου:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 & 2(h_3+h_4) & h_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a/2 & 2a & a/2 & 0 & 0 \\ 0 & a/2 & 2a & a/2 & 0 \\ 0 & 0 & a/2 & 2a & a/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

$$x = \begin{bmatrix} y_1'' \\ y_2'' \\ y_3'' \\ y_4'' \\ y_5'' \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

και

$$b = 6 * \begin{bmatrix} 0 \\ (y_3 - y_2)/h_2 - (y_2 - y_1)/h_1 \\ (y_4 - y_3)/h_3 - (y_3 - y_2)/h_2 \\ (y_5 - y_4)/h_4 - (y_4 - y_3)/h_3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

Αρα από τις σχέσεις (5.25), (5.33), (5.34) έχουμε:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a/2 & 2a & a/2 & 0 & 0 \\ 0 & a/2 & 2a & a/2 & 0 \\ 0 & 0 & a/2 & 2a & a/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} y_1'' \\ y_2'' \\ y_3'' \\ y_4'' \\ y_5'' \end{bmatrix} = 6 * \begin{bmatrix} 0 \\ (y_3 - y_2)/h_2 - (y_2 - y_1)/h_1 \\ (y_4 - y_3)/h_3 - (y_3 - y_2)/h_2 \\ (y_5 - y_4)/h_4 - (y_4 - y_3)/h_3 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} y_1'' \\ y_2'' \\ y_3'' \\ y_4'' \\ y_5'' \end{bmatrix} = \frac{6}{a^2} * \begin{bmatrix} 0 \\ y_3 - 2y_2 + y_1 \\ y_4 - 2y_3 + y_2 \\ y_5 - 2y_4 + y_3 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} y_1'' \\ y_2'' \\ y_3'' \\ y_4'' \\ y_5'' \end{bmatrix} = \frac{24}{a^2} * \begin{bmatrix} 0 \\ y_3 - 2y_2 + y_1 \\ y_4 - 2y_3 + y_2 \\ y_5 - 2y_4 + y_3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

Υπολογίζουμε:

- $y_3 - 2y_2 + y_1 = \frac{1}{2} - 2c_1 + 1 = \frac{3}{2} - 2c_1$

- $y_4 - 2y_3 + y_2 = 1 - c_1 - 2\frac{1}{2} + c_1 = 0$
- $y_5 - 2y_4 + y_3 = 0 - 2(1 - c_1) + \frac{1}{2} = -2 + 2c_1 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} + 2c_1$

Άρα η σχέση (5.35) γίνεται:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} y_1'' \\ y_2'' \\ y_3'' \\ y_4'' \\ y_5'' \end{bmatrix} = \frac{24}{a^2} * \begin{bmatrix} 0 \\ 3/2 - 2c_1 \\ 0 \\ 2c_1 - 3/2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

Έχουμε λοιπόν να επιλύσουμε τη σχέση (5.36). Οι λύσεις του συστήματος αυτού είναι:

$$y_1'' = 0 \quad (5.37)$$

$$y_2'' = \frac{9 - 12c_1}{a^2} \quad (5.38)$$

$$y_3'' = 0 \quad (5.39)$$

$$y_4'' = \frac{12c_1 - 9}{a^2} \quad (5.40)$$

$$y_5'' = 0 \quad (5.41)$$

Άρα χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (5.27) έως και (5.30) και (5.37) έως και (5.41) για την εύρεση των συντελεστών έχουμε:

$$A_1 = \frac{y_2'' - y_1''}{6h_1} = \frac{\frac{9 - 12c_1}{a^2}}{6\frac{a}{2}} = \frac{9 - 12c_1}{3a^3} = \frac{3 - 4c_1}{a^3} \quad (5.42)$$

$$B_1 = \frac{y_1''}{2} = 0 \quad (5.43)$$

$$C_1 = \frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{y_2''h_1}{6} - \frac{y_1''h_1}{3} = \frac{c_1 - 1}{\frac{a}{2}} - \frac{9 - 12c_1}{a^2} \cdot \frac{a}{12} = \frac{8(c_1 - 1)}{4a} - \frac{3 - 4c_1}{4a} = \frac{12c_1 - 11}{4a} \quad (5.44)$$

$$D_1 = y_1 = 1 \quad (5.45)$$

$$A_2 = \frac{y_3'' - y_2''}{6h_2} = \frac{\frac{12c_1 - 9}{a^2}}{6\frac{a}{2}} = \frac{\frac{12c_1 - 9}{a^2}}{3a} = \frac{12c_1 - 9}{3a^3} = \frac{4c_1 - 3}{a^3} \quad (5.46)$$

$$B_2 = \frac{y_2''}{2} = \frac{9 - 12c_1}{2a^2} \quad (5.47)$$

$$C_2 = \frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{y_3''h_2}{6} - \frac{y_2''h_2}{3} = \frac{\frac{1}{2} - c_1}{\frac{a}{2}} + \frac{12c_1 - 9}{a^2} \frac{a}{6} = \frac{1 - 2c_1}{a} + \frac{4c_1 - 3}{2a} = \frac{2 - 4c_1 + 4c_1 - 3}{2a} = -\frac{1}{2a} \quad (5.48)$$

$$D_2 = y_2 = c_1 \quad (5.49)$$

$$A_3 = \frac{y_4'' - y_3''}{6h_3} = \frac{\frac{12c_1 - 9}{a^2}}{3a} = \frac{12c_1 - 9}{3a^3} = \frac{4c_1 - 3}{a^3} \quad (5.50)$$

$$B_3 = \frac{y_3''}{2} = 0 \quad (5.51)$$

$$C_3 = \frac{y_4 - y_3}{h_3} - \frac{y_4''h_3}{6} - \frac{y_3''h_3}{3} = \frac{\frac{1}{2} - c_1}{\frac{a}{2}} + \frac{9 - 12c_1}{a^2} \frac{a}{12} = \frac{1 - 2c_1}{a} + \frac{3 - 4c_1}{4a} = \frac{7 - 12c_1}{4a} \quad (5.52)$$

$$D_3 = y_3 = \frac{1}{2} \quad (5.53)$$

$$A_4 = \frac{y_5'' - y_4''}{6h_4} = \frac{\frac{9 - 12c_1}{a^2}}{3a} = \frac{9 - 12c_1}{3a^3} = \frac{3 - 4c_1}{a^3} \quad (5.54)$$

$$B_4 = \frac{y_4''}{2} = \frac{12c_1 - 9}{2a^2} \quad (5.55)$$

$$C_4 = \frac{y_5 - y_4}{h_4} - \frac{y_5'' h_4}{6} - \frac{y_4'' h_4}{3} = \frac{c_1 - 1}{\frac{a}{2}} + \frac{9 - 12c_1}{a^2} \frac{a}{6} = \frac{2c_1 - 2}{a} + \frac{3 - 4c_1}{2a} =$$

$$= \frac{4c_1 - 4 + 3 - 4c_1}{2a} = -\frac{1}{2a} \quad (5.56)$$

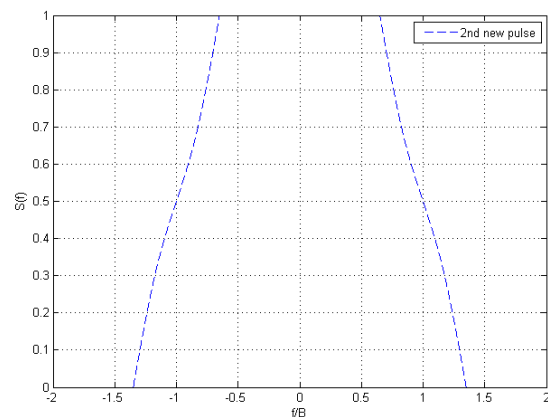
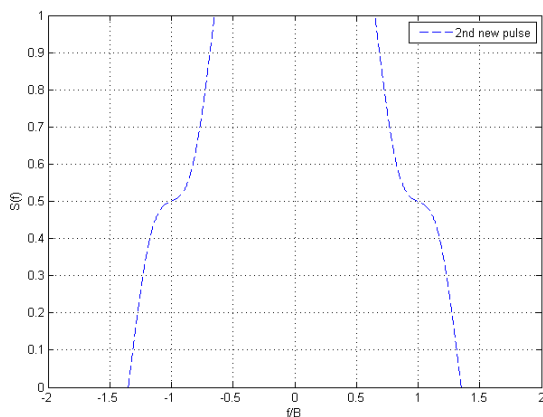
$$D_4 = y_4 = 1 - c_1 \quad (5.57)$$

5.2.5 Συνάρτηση μεταφοράς και ενδεικτικά διαγράμματα

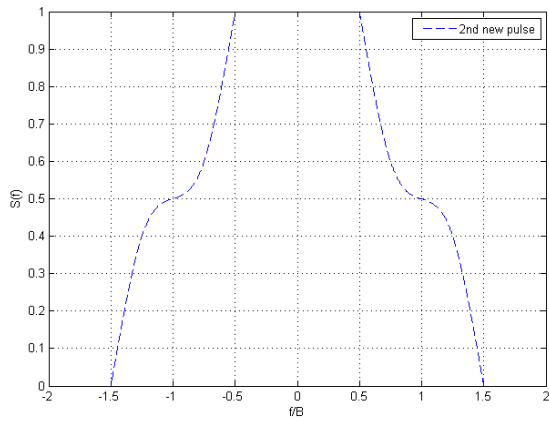
Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (5.31) και (5.42) έως και (5.57) η συνάρτηση μεταφοράς θα είναι:

$$S_2(f) = \begin{cases} T & 0 < |f| < (1-a)B \\ \frac{3-4c_1}{a^3} T \left(\frac{|f|}{B} - 1 + a \right)^3 + T \frac{12c_1 - 11}{4a} \left(\frac{|f|}{B} - 1 + a \right) + T & (1-a)B \leq |f| \leq \left(1 - \frac{a}{2}\right)B \\ \frac{4c_1 - 3}{a^3} T \left(\frac{|f|}{B} - 1 + \frac{a}{2} \right)^3 + \frac{9 - 12c_1}{2a^2} T \left(\frac{|f|}{B} - 1 + \frac{a}{2} \right)^2 + \frac{-1}{2a} T \left(\frac{|f|}{B} - 1 + \frac{a}{2} \right) + c_1 T & \left(1 - \frac{a}{2}\right)B < |f| \leq B \\ \frac{4c_1 - 3}{a^3} T \left(\frac{|f|}{B} - 1 \right)^3 + \frac{7 - 12c_1}{4a} T \left(\frac{|f|}{B} - 1 \right) + \frac{1}{2} T & B < |f| \leq \left(1 + \frac{a}{2}\right)B \\ \frac{3 - 4c_1}{a^3} T \left(\frac{|f|}{B} - 1 - \frac{a}{2} \right)^3 + \frac{12c_1 - 9}{2a^2} T \left(\frac{|f|}{B} - 1 - \frac{a}{2} \right)^2 + \frac{-1}{2a} T \left(\frac{|f|}{B} - 1 - \frac{a}{2} \right) + T - c_1 T & \left(1 + \frac{a}{2}\right)B < |f| \leq (1+a)B \\ 0 & f > (1+a)B \end{cases}$$

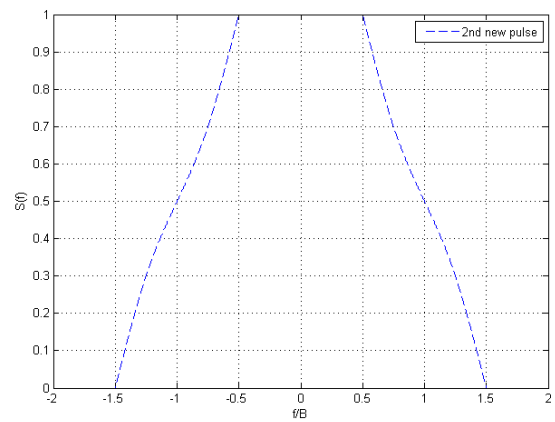
Ας δούμε τώρα ενδεικτικά τα παρακάτω διαγράμματα για κάποιες τυχαίες τιμές του roll-off factor a και της παραμέτρου c_1 την μορφή που θα έχει η συνάρτηση του παλμού μας στο πεδίο των συχνοτήτων:



Διάγραμμα 45 (Για roll-off factor $\alpha=0.35$, $c1=0.6$)



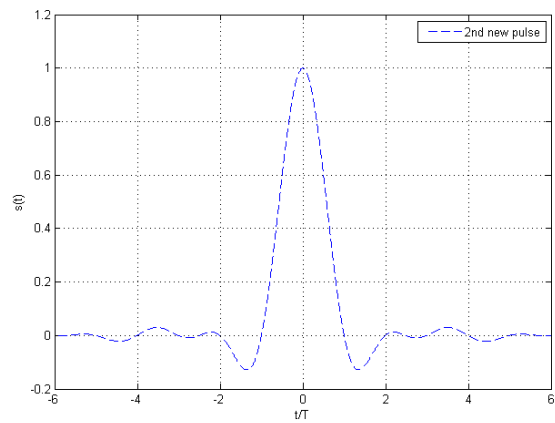
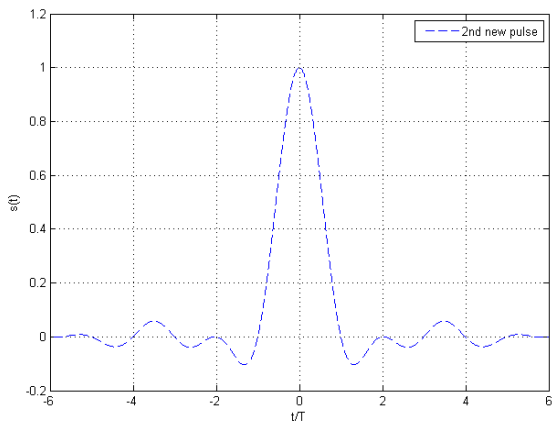
Διάγραμμα 46 (Για roll-off factor $\alpha=0.35$, $c1=0.7$)



Διάγραμμα 47 (Για roll-off factor $\alpha=0.5$, $c1=0.6$)

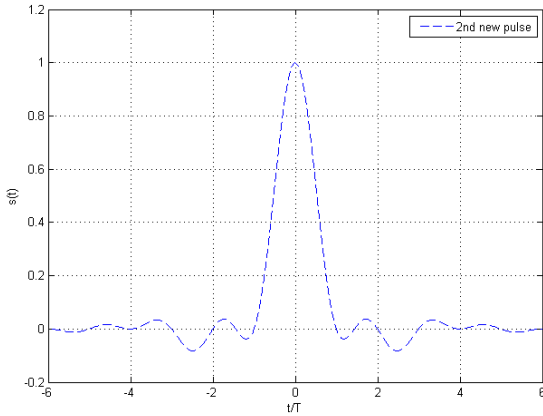
Διάγραμμα 48 (Για roll-off factor $\alpha=0.35$, $c1=0.7$)

5.2.6 Ενδεικτικά διαγράμματα κρουστικής απόκρισης

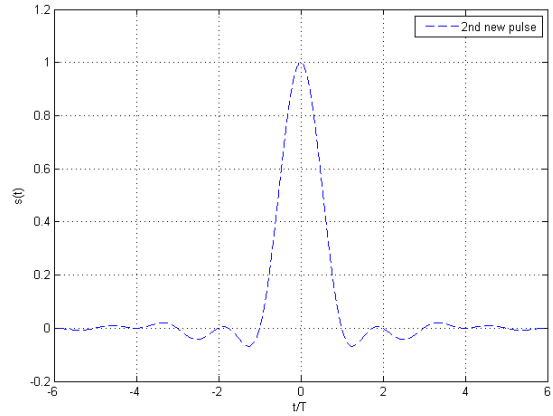


Διάγραμμα 49 (Για roll-off factor $\alpha=0.35$, $c1=0.6$)

Διάγραμμα 50 (Για roll-off factor $\alpha=0.35$, $c1=0.7$)



Διάγραμμα 51 (Για roll-off factor $\alpha=0.5$, $c_1=0.6$)



Διάγραμμα 52 (Για roll-off factor $\alpha=0.35$, $c_1=0.7$)

5.2.7 Παρατηρήσεις

Παρατηρούμε ότι οι μηδενισμοί στα διαγράμματα 49, 50, 51, 52 στο πεδίο του χρόνου συμβαίνουν σε ακέραια πολλαπλάσια της περιόδου καθώς πρέπει να ισχύει και εδώ το θεώρημα του Nyquist. Επίσης βλέπουμε πως αλλάζοντας την τιμή της παραμέτρου c_1 , έχουμε τελείως διαφορετική εικόνα για τον παλμό μας. Είναι δηλαδή μια οικογένεια παλμών που αλλάζει συνεχώς όσο αλλάζουμε την παράμετρο c_1 .

Και πλέον το ερώτημα είναι ποιά θα πρέπει να είναι η τιμή του c_1 ώστε να έχουμε την μικρότερη δυνατή πιθανότητα σφάλματος υπό την επίδραση jitter; Πώς μπορούμε να είμαστε σίγουροι για το ποια τιμή πρέπει να δώσουμε στο c_1 ;

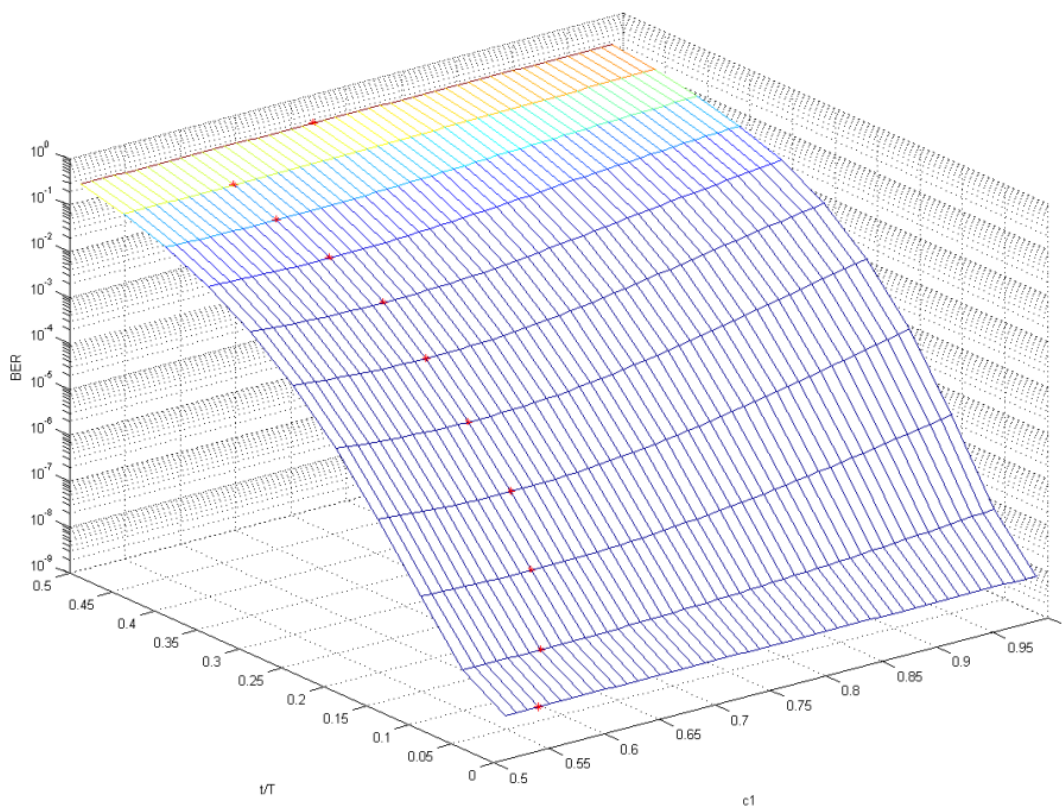
Η απάντηση στο παραπάνω ερώτημα είναι αρκετά σύνθετη, όμως ας πάρουμε τα πράγματα από την αρχή. Η πιθανότητα σφάλματος εξαρτάται από τέσσερις σημαντικούς παράγοντες όπως το SNR που εδώ εμείς το παίρνουμε ίσο με 15dB. Επίσης εξαρτάται από την τιμή του roll-off factor a , την τιμή του λόγου t/T_B καθώς και από την τιμή της παραμέτρου μας c_1 . Όλα αυτά θα προσπαθήσουμε να τα συνδυάσουμε ώστε να καταλήξουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα.

Δημιουργούμε σ'ένα ορθοκανονικό σύστημα τριών αξόνων ένα διάγραμμα όπου στον X άξονα θα κινείται η παράμετρος c_1 , στον Y άξονα θα κινείται ο λόγος t/T_B (jitter) και στον Z άξονα θα βρίσκεται η πιθανότητα που αναζητούμε. Έτσι λοιπόν καθώς έχουμε τέσσερις παραμέτρους όπως

αναφέραμε που θα καθορίσουν το αποτέλεσμά μας, και είναι αδύνατο να φτιάξουμε ένα σύστημα αξόνων στις τέσσερις διαστάσεις, σταθεροποιούμε το roll-off factor α δίνοντάς του εμείς τιμές.

5.2.8 Υπολογισμός πιθανότητας σφάλματος υπό την επίδραση jitter

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.1), (4.2), (4.3), (4.4) υπολογίζουμε την πιθανότητα σφάλματος του παλμού για διάφορες τιμές του roll-off factor α και του λόγου t/T_b . Ενδεικτικά παρουσιάζουμε το παρακάτω διάγραμμα 53, τα υπόλοιπα διαγράμματα παρουσιάζονται στο παράρτημα 1.



Διάγραμμα 53 (Για roll-off factor $\alpha=0.35$)

Με τους κόκκινους αστερίσκους πάνω στο διάγραμμα σημειώνονται τα σημεία όπου έχουμε τις βέλτιστες πιθανότητες σφάλματος για τις διάφορες τιμές του λόγου t/T_b και SNR σταθερό και ίσο με 15dB. Τα συνολικά αποτελέσματα βρίσκονται στον αμέσως επόμενο πίνακα 7:

Πίνακας 7

2 nd NEW PULSE						
<i>a</i>		$t/T_B = \pm 0.05$	$t/T_B = \pm 0.1$	$t/T_B = \pm 0.2$	$t/T_B = \pm 0.25$	$t/T_B = \pm 0.3$
0.25	<i>P_e</i>	$c_1=0.55$ 5.1914e-08	$c_1=0.58$ 1.0742e-06	$c_1=0.6$ 2.8642e-04	$c_1=0.59$ 2.3896e-03	$c_1=0.58$ 1.2069e-02
		$c_1=0.58$ 3.5322e-08	$c_1=0.61$ 4.6594e-07	$c_1=0.63$ 8.7886e-05	$c_1=0.63$ 8.1405e-04	$c_1=0.63$ 5.1375e-03
		$c_1=0.61$ 2.2200e-08	$c_1=0.64$ 1.6860e-07	$c_1=0.67$ 2.0315e-05	$c_1=0.68$ 1.9825e-04	$c_1=0.68$ 1.5569e-03
		$c_1=0.68$ 1.3719e-08	$c_1=0.68$ 4.4900e-08	$c_1=0.71$ 3.3003e-06	$c_1=0.73$ 3.9801e-05	$c_1=0.75$ 4.4799e-04
		$c_1=0.76$ 1.2279e-08	$c_1=0.75$ 2.9459e-08	$c_1=0.75$ 1.3514e-06	$c_1=0.76$ 1.8648e-05	$c_1=0.78$ 2.6389e-04

Τοποθετώντας τώρα τα αποτελέσματα σ'έναν πίνακα που περιλαμβάνει και τις πιθανότητες σφάλματος του Nyquist παλμού έχουμε:

Πίνακας 8

PULSES	t/T_B	± 0.05	± 0.1	± 0.2	± 0.25	± 0.3
<i>a</i> = 0.25						
Nyquist	<i>P_e</i>	8.2189e-08	2.8184e-06	9.7462e-04	6.7732e-03	2.5914e-02
2 nd new		$c_1=0.55$ 5.1914e-08	$c_1=0.58$ 1.0742e-06	$c_1=0.6$ 2.8642e-04	$c_1=0.59$ 2.3896e-03	$c_1=0.58$ 1.2069e-02
<i>a</i> = 0.35						
Nyquist	<i>P_e</i>	5.9997e-08	1.3896e-06	3.9084e-04	3.1988e-03	1.5481e-02
2 nd new		$c_1=0.58$ 3.5322e-08	$c_1=0.61$ 4.6594e-07	$c_1=0.63$ 8.7886e-05	$c_1=0.63$ 8.1405e-04	$c_1=0.63$ 5.1375e-03
<i>a</i> = 0.5						
Nyquist	<i>P_e</i>	3.9723e-08	5.4890e-07	1.0217e-04	9.4694e-04	0.6007e-02

2nd new		$c_1=0.61$ 2.2200e-08	$c_1=0.64$ 1.6860e-07	$c_1=0.67$ 2.0315e-05	$c_1=0.68$ 1.9825e-04	$c_1=0.68$ 1.5569e-03
$a = 0.75$						
Nyquist	P_e	2.2777e-08	1.5761e-07	1.5346e-05	1.4907e-04	0.1231e-02
2nd new		$c_1=0.68$ 1.3719e-08	$c_1=0.68$ 4.4900e-08	$c_1=0.71$ 3.3003e-06	$c_1=0.73$ 3.9801e-05	$c_1=0.75$ 4.4799e-04
$a = 1$						
Nyquist	P_e	1.5281e-08	5.8720e-08	3.6543e-06	3.9247e-05	0.419e-03
2nd new		$c_1=0.76$ 1.2279e-08	$c_1=0.75$ 2.9459e-08	$c_1=0.75$ 1.3514e-06	$c_1=0.76$ 1.8648e-05	$c_1=0.78$ 2.6389e-04

Παρατηρούμε ότι ο δεύτερος παλμός που κατασκευάσαμε με κατάλληλες επιλογές της παραμέτρου c_1 εμφανίζει βελτιωμένη πιθανότητα σφάλματος υπό την παρουσία jitter σε σχέση με τον Nyquist παλμό.

Υπάρχει όμως ένα μειονέκτημα που θα πρέπει να αντιμετωπίσουμε. Σ' ένα πραγματικό ψηφιακό σύστημα δεν μπορεί να έχουμε ένα φίλτρο (παλμό) που να εξαρτάται από την παράμετρο c_1 και να αλλάζει συνεχώς. Θα πρέπει να έχουμε ένα σταθερό φίλτρο που να έχει γενική ισχύ.

Άρα λοιπόν πρέπει να εξαλείψουμε την παράμετρο c_1 και να επιλέξουμε την βέλτιστη τιμή γι' αυτήν.

5.2.9 Σταθεροποίηση της παραμέτρου c_1 και δημιουργία βέλτιστου νέου παλμού

Μας ενδιαφέρει σ' ένα πραγματικό σύστημα να μην έχουμε μεγάλο εύρος ζώνης. Έτσι χρειαζόμαστε μικρές τιμές του roll-off factor a . Άρα λοιπόν οι κυριότερες τιμές για το roll-off factor φτάνουν τις περισσότερες φορές μέχρι την τιμή 0.5. Άρα θα δώσουμε πιο πολύ έμφαση σ' εκείνα τα c_1 τα οποία βρίσκονται για roll-off factors στην περιοχή μέχρι το 0.5. Επίσης μας ενδιαφέρει πάρα πολύ ένας παλμός να είναι όσο πιο ανθεκτικός γίνεται σε περίπτωση που το φαινόμενο jitter είναι έντονο. Άρα μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά του παλμού μας και για μικρές τιμές του λόγου t/T_B αλλά και για μεγαλύτερες. Με όλες αυτές τις παρατηρήσεις λοιπόν θα προσδιορίσουμε την βέλτιστη τιμή για την παράμετρο c_1 .

Αρχικά θα υπολογίσουμε την μέση τιμή της παραμέτρου c_1 ανά κατηγορία roll-off factor a , του πίνακα 7:

- Για $a = 0.25$: $\bar{c}_{1_1} = \frac{0.55+0.58+0.6+0.59+0.58}{5} = 0.58$
- Για $a = 0.35$: $\bar{c}_{1_2} = \frac{0.58+0.61+0.63+0.63+0.63}{5} = 0.616$
- Για $a = 0.5$: $\bar{c}_{1_3} = \frac{0.61+0.64+0.67+0.68+0.68}{5} = 0.656$
- Για $a = 0.75$: $\bar{c}_{1_4} = \frac{0.68+0.68+0.71+0.73+0.75}{5} = 0.71$
- Για $a = 1$: $\bar{c}_{1_5} = \frac{0.76+0.75+0.75+0.76+0.78}{5} = 0.76$

Θεωρούμε για τους λόγους που αναφέραμε πιο πάνω ότι κάποιες τιμές του roll-off factor a , είναι πιο σημαντικές σ' ένα πραγματικό σύστημα απ' ότι κάποιες άλλες. Έτσι λοιπόν εισάγουμε τους παρακάτω συντελεστές βαρύτητας:

- Για $a = 0.25$: συντελεστής βαρύτητας $m_1 = 1$
- Για $a = 0.35$: συντελεστής βαρύτητας $m_2 = 2$
- Για $a = 0.5$: συντελεστής βαρύτητας $m_3 = 3$
- Για $a = 0.75$: συντελεστής βαρύτητας $m_4 = 2$
- Για $a = 1$: συντελεστής βαρύτητας $m_5 = 1$

Με τα στοιχεία αυτά θα βρούμε μια μέση λύση για την τελική τιμή της παραμέτρου c_1 ώστε ο παλμός μας να είναι όσο το δυνατόν καλύτερος σε κάθε κατηγορία roll-off factor και ταυτόχρονα με την εισαγωγή των συντελεστών βαρύτητας δίνουμε μεγαλύτερη βαρύτητα στις κατηγορίες για roll-off factor κοντά στην τιμή 0.5.

Άρα

$$c_1 = \frac{\bar{c}_{1_1} \cdot m_1 + \bar{c}_{1_2} \cdot m_2 + \bar{c}_{1_3} \cdot m_3 + \bar{c}_{1_4} \cdot m_4 + \bar{c}_{1_5} \cdot m_5}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5} = \frac{0.58 \cdot 1 + 0.616 \cdot 2 + 0.656 \cdot 3 + 0.71 \cdot 2 + 0.76 \cdot 1}{9} \cong 0.66$$

Έτσι λοιπόν επιλέγω $c_1 = 0.66$

Άρα με αντικατάσταση της τιμής του c_1 στις σχέσεις (5.42) έως (5.57) έχουμε ότι η τελική συνάρτηση μεταφοράς του παλμού θα είναι:

$$S_2(f) = \begin{cases} T_b & 0 < |f| < (1-a)B \\ \frac{0.36}{a^3} T_b \left(\frac{|f|}{B} - 1 + a \right)^3 - T_b \frac{0.77}{a} \left(\frac{|f|}{B} - 1 + a \right) + T_b & (1-a)B \leq |f| \leq (1-\frac{a}{2})B \\ -\frac{0.36}{a^3} T_b \left(\frac{|f|}{B} - 1 + \frac{a}{2} \right)^3 + \frac{0.54}{a^2} T_b \left(\frac{|f|}{B} - 1 + \frac{a}{2} \right)^2 + \frac{-1}{2a} T_b \left(\frac{|f|}{B} - 1 + \frac{a}{2} \right) + 0.66T_b & (1-\frac{a}{2})B < |f| \leq B \\ -\frac{0.36}{a^3} T_b \left(\frac{|f|}{B} - 1 \right)^3 - \frac{0.23}{a} T_b \left(\frac{|f|}{B} - 1 \right) + \frac{1}{2} T_b & B < |f| \leq (1+\frac{a}{2})B \\ \frac{0.36}{a^3} T_b \left(\frac{|f|}{B} - 1 - \frac{a}{2} \right)^3 - \frac{0.54}{2a^2} T_b \left(\frac{|f|}{B} - 1 - \frac{a}{2} \right)^2 + \frac{-1}{2a} T_b \left(\frac{|f|}{B} - 1 - \frac{a}{2} \right) + T_b - 0.66T_b & (1+\frac{a}{2})B < |f| \leq (1+a)B \\ 0 & f > (1+a)B \end{cases}$$

5.2.10 Υπολογισμός πιθανότητας σφάλματος του παλμού και ενδεικτικά διαγράμματα

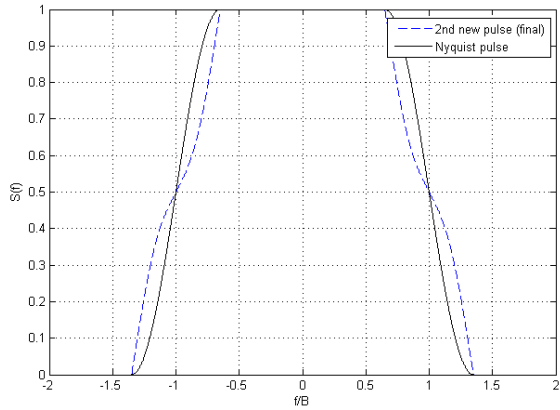
της συνάρτησης μεταφοράς, της κρουστικής απόκρισης και οφθαλμού

Ο παρακάτω πίνακας 9 δείχνει τα αποτελέσματα της πιθανότητας σφάλματος του νέου παλμού συγκριτικά με τον παλμό Nyquist για τις διάφορες τιμές του roll-off factor a και του λόγου t/T_B , για τιμή της παραμέτρου $c_1 = 0.66$:

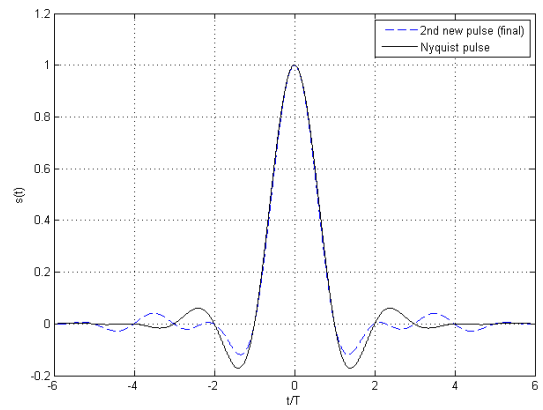
Πίνακας 9

PULSES	t/T_B	± 0.05	± 0.1	± 0.2	± 0.25	± 0.3
$a = 0.25$						
Nyquist	P_e	8.2189e-08	2.8184e-06	9.7462e-04	6.7732e-03	2.5914e-02
2 nd new final		5.5096e-08	1.1649e-06	3.1035e-04	2.5942e-03	1.3113e-02
$a = 0.35$						
Nyquist	P_e	5.9997e-08	1.3896e-06	3.9084e-04	3.1988e-03	1.5481e-02
2 nd new final		3.7015e-08	4.8601e-07	8.9630e-05	8.3080e-04	5.2740e-03
$a = 0.5$						
Nyquist	P_e	3.9723e-08	5.4890e-07	1.0217e-04	9.4694e-04	0.6007e-02
2 nd new final		2.2790e-08	1.7074e-07	2.0451e-05	2.0114e-04	1.5855e-03
$a = 0.75$						
Nyquist	P_e	2.2777e-08	1.5761e-07	1.5346e-05	1.4907e-04	0.1231e-02

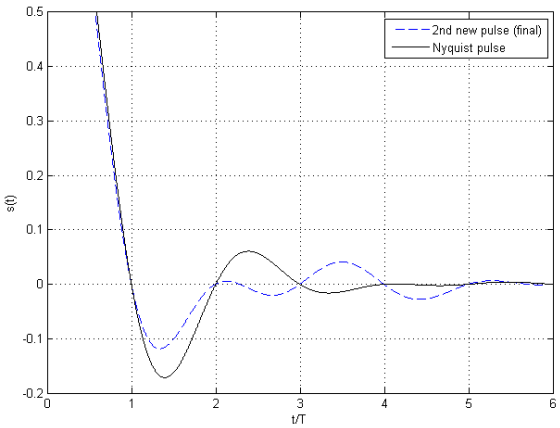
2nd new final		1.3779e-08	4.5687e-08	4.1263e-06	6.0391e-05	7.6420e-04
	$a = 1$					
Nyquist	P_e	1.5281e-08	5.8720e-08	3.6543e-06	3.9247e-05	0.419e-03
2nd new final		1.5367e-08	5.7291e-08	3.0971e-06	3.6681e-05	4.9205e-04



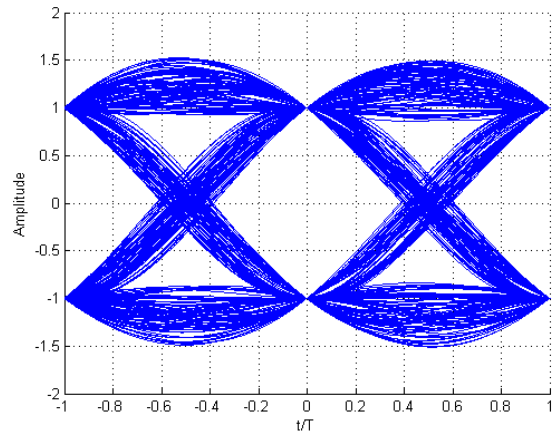
Διάγραμμα 54 (Για roll-off factor $\alpha=0.35$)



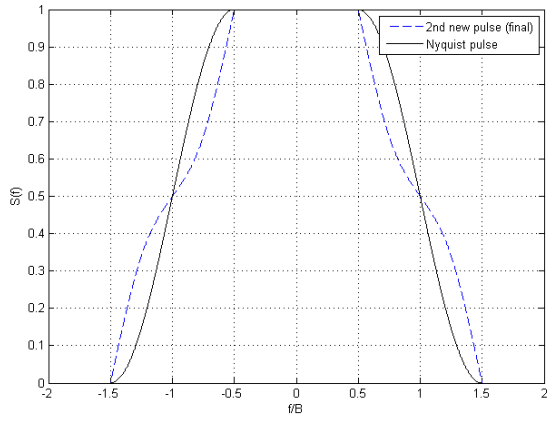
Διάγραμμα 55 (Για roll-off factor $\alpha=0.35$)



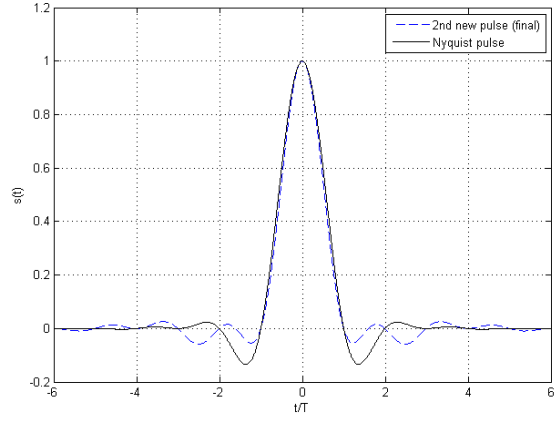
Διάγραμμα 56 (Για roll-off factor $\alpha=0.35$)



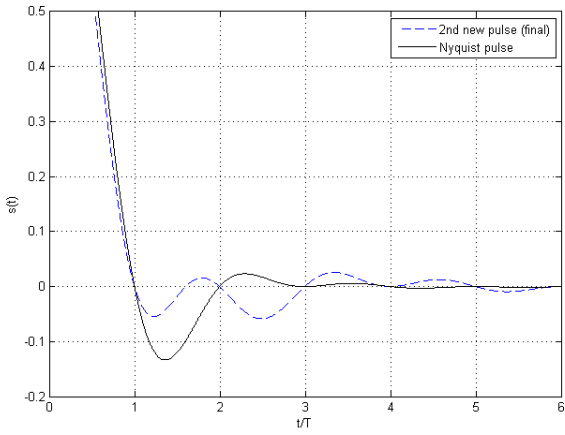
Διάγραμμα 57 (Για roll-off factor $\alpha=0.35$)



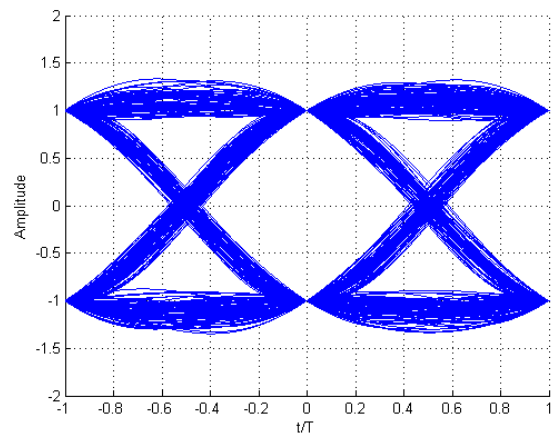
Διάγραμμα 58 (Για roll-off factor $\alpha=0.5$)



Διάγραμμα 59 (Για roll-off factor $\alpha=0.5$)

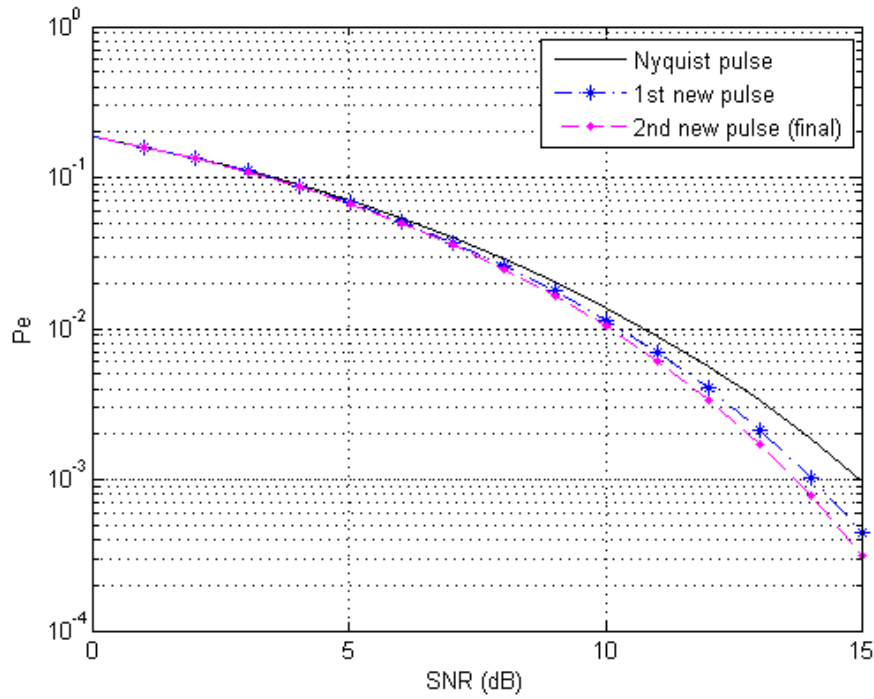


Διάγραμμα 60 (Για roll-off factor $\alpha=0.5$)

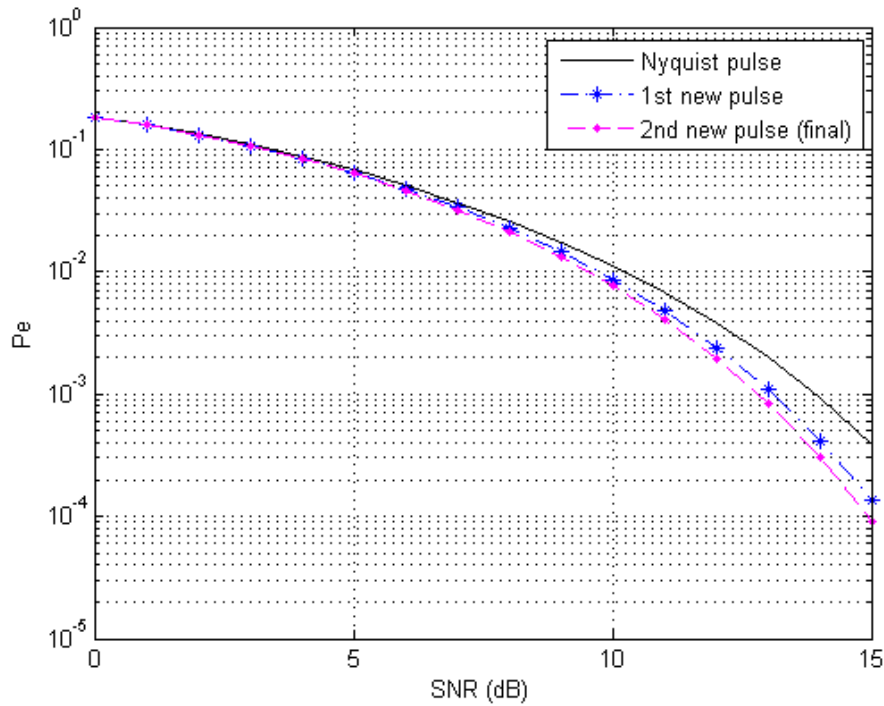


Διάγραμμα 61 (Για roll-off factor $\alpha=0.5$)

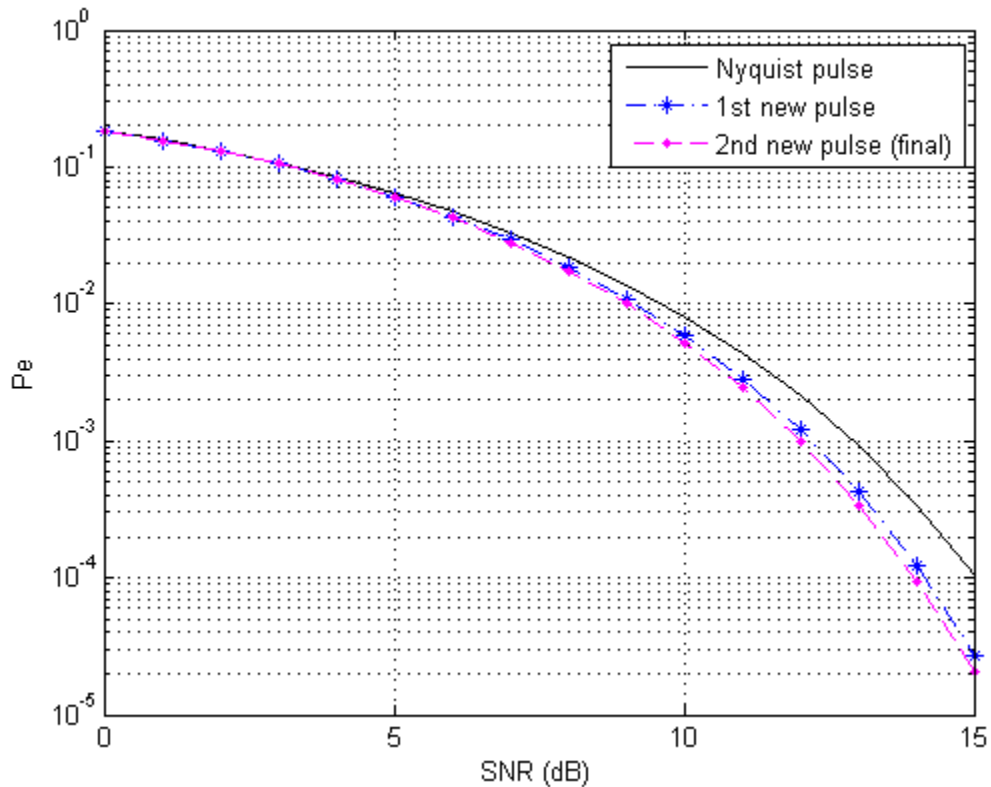
5.2.11 Συνοπτικά διαγράμματα πιθανότητας σφάλματος σε σύγκριση με τον Nyquist παλμό



Διάγραμμα 62 (Για roll-off factor $\alpha=0.25$ και λόγο $t/T_B = 0.2$)



Διάγραμμα 63 (Για roll-off factor $\alpha=0.35$ και λόγο $t/T_B = 0.2$)



Διάγραμμα 64 (Για roll-off factor $\alpha=0.5$ και λόγο $t/T_b=0.2$)

5.2.12 Παρατηρήσεις για τον τελικό δεύτερο παλμό

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε από τα διαγράμματα 55, 56, 59, 60 η συνάρτηση της κρουστικής απόκρισης μηδενίζεται σε ακέραια πολλαπλάσια της περιόδου $T_b=1$, καθώς έτσι απαιτείται από το θεώρημα του Nyquist ώστε αν $t/T_b=0$ (θεωρητικά) να έχω μηδενική διασυμβολική παρεμβολή.

Τα αποτελέσματα του πίνακα 9 επιβεβαιώνονται και γραφικά από τα διαγράμματα 56, 60 καθώς βλέπουμε ότι οι κύριοι και δευτερεύοντες λοβοί της κρουστικής απόκρισης είναι μικρότεροι από τους αντίστοιχους του Nyquist παλμού. Η ίδια επιβεβαίωση έρχεται και από τα διαγράμματα οφθαλμού 55 και 59 που όπως παρατηρούμε το μάτι είναι "ανοιχτό" άρα έχουμε και μικρή πιθανότητα σφάλματος.

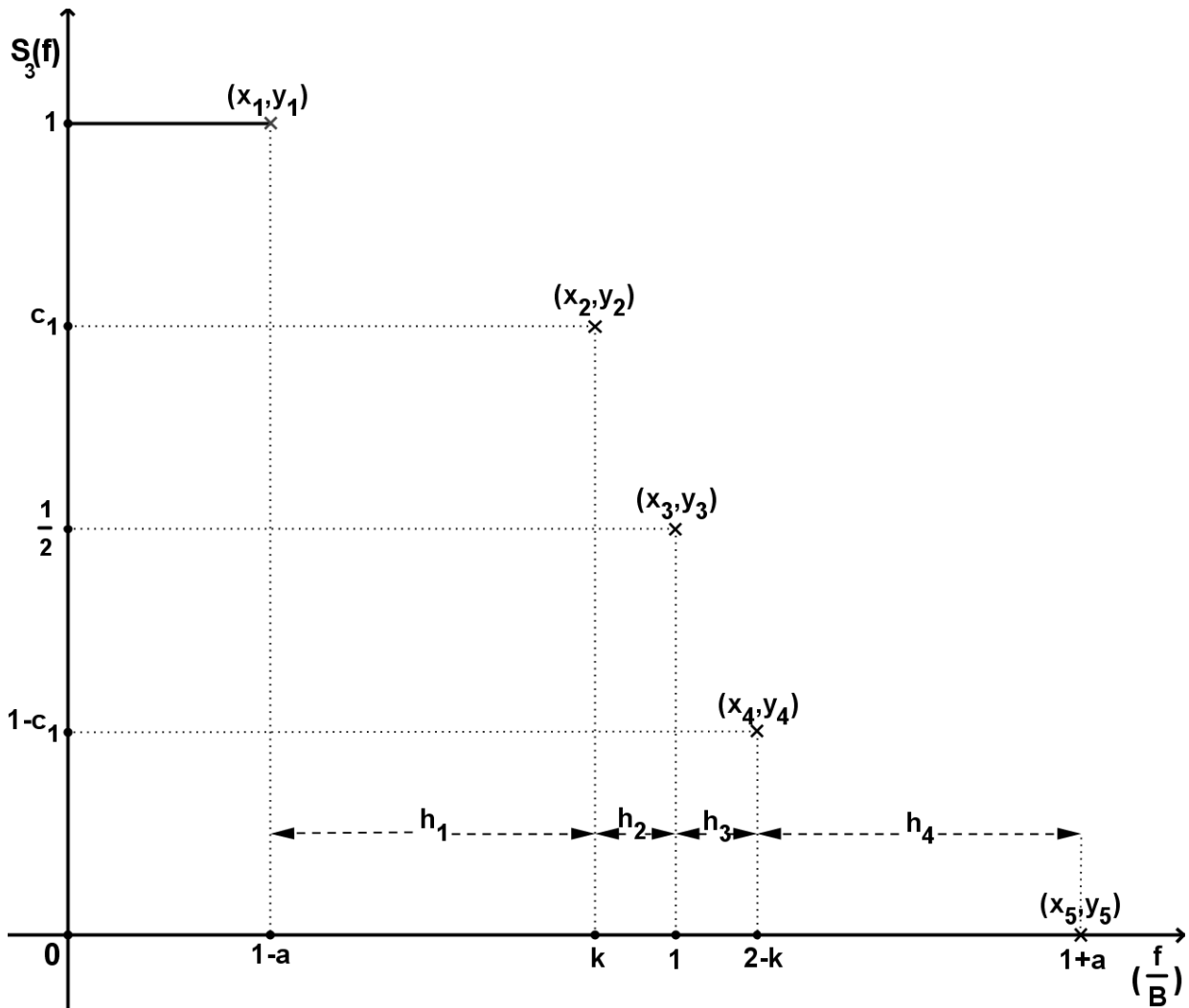
Είδαμε λοιπόν πως με την προσθήκη δύο σημείων στην αρχική μας μέθοδο καθώς και με την τεχνική που εφαρμόσαμε ώστε να ενώσουμε όλα αυτά τα σημεία βελτιώσαμε κατά πολύ την πιθανότητα σφάλματος. Όμως μήπως θα μπορούσαμε να κάνουμε κάτι καλύτερο;

5.3 Κατασκευή τρίτου νέου παλμού

5.3.1 Εισαγωγή

Όπως βλέπουμε από το διάγραμμα 44 οι τετμημένες των σημείων (x_2, y_2) και (x_4, y_4) , δηλαδή τα x_2 και x_4 είναι σταθερά και αυτά που μεταβάλλονται μόνο είναι οι τεταγμένες y_2 και y_4 . Έτσι λοιπόν αυτό που κάναμε είναι να προσδιορίσουμε τις βέλτιστες θέσεις για το τις τεταγμένες y_2 και y_4 . Όμως πως μπορούμε να γνωρίζουμε αν η επιλογή των τετμημένων μας είναι και η καλύτερη δυνατή; Η επιλογή μας ήταν καθαρά αυθαίρετη και αν και τα αποτελέσματα ήταν αρκετά καλά, θα κατασκευάσουμε ένα νέο παλμό όπου πλέον τα σημεία στον οριζόντιο άξονα δεν θα είναι σταθερά αλλά θα έχουν την δυνατότητα να κινούνται ανάλογα με τις ανάγκες. Ας δούμε το επόμενο διάγραμμα 65.

5.3.2 Γεωμετρική κατασκευή



Διάγραμμα 65

Διατηρούμε ακριβώς την ίδια κατασκευή με το διάγραμμα 44, δηλαδή έχουμε πάλι να ισχύει

$$S_3((1-a)B) = 1 \text{ και } S_3(B) = \frac{1}{2}, \text{ αλλά με μία σημαντική διαφορά:}$$

Οι τετμημένες των σημείων (x_2, y_2) και (x_4, y_4) δηλαδή τα x_2 και x_4 δεν είναι σταθερά όπως πριν αλλά έχουν την δυνατότητα να κινούνται επάνω στον οριζόντιο άξονα και έχουν την ιδιότητα ότι είναι συμμετρικά ως προς το $x_3 = 1$. Οπότε $x_2 = k$ και $x_4 = 1 + (1 - k) = 2 - k$. Ας δούμε όμως με ποιον τρόπο θα κινούνται πάνω στον οριζόντιο άξονα:

Ορίζουμε:

$$k = 1 - a + \frac{1 - (1 - a)}{p_1} \Rightarrow k = 1 - a + \frac{a}{p_1} \quad (5.58)$$

όπου η παράμετρος p_1 ορίζει το βήμα με το οποίο κινείται η παράμετρος k με $p_1 > 1$. Ουσιαστικά δημιουργήσαμε μία ακολουθία τιμών στον οριζόντιο άξονα όπου ανάλογα με την τιμή του p_1 θα αλλάζει και η θέση των σημείων μας (x_2, y_2) και (x_4, y_4) . Πρακτικά όμως επειδή τα αποτελέσματα θα τα επεξεργαστεί ένας υπολογιστής με πεπερασμένες δυνατότητες, θα πρέπει και η παράμετρος p_1 να παίρνει πεπερασμένες τιμές. Έτσι λοιπόν θεωρούμε πρακτικά πως $p_1 \in [2, 64]$ με p_1 ακέραιος. Δηλαδή $p_1 = 2, 3, 4, \dots, 64$

Ας δούμε όμως πριν προχωρήσουμε σε υπολογισμούς γιατί επιλέξαμε αυτές τις τιμές για το p_1 . Σύμφωνα με την σχέση (5.51) αν $p_1 = 1$ τότε $k = 1$. Αυτό όμως είναι απαγορευτικό καθώς θα σήμαινε ότι το σημείο (x_2, y_2) θα ταυτιζόταν με το σημείο (x_3, y_3) . Επίσης αν το $p_1 \rightarrow +\infty$ ή με πιο απλά λόγια πάρει πολύ μεγάλες τιμές τότε το σημείο (x_2, y_2) θα τείνει να ταυτιστεί με το σημείο (x_1, y_1) , κάτι που είναι και πάλι απαγορευτικό καθώς ο υπολογιστής έχει πεπερασμένη ακρίβεια και για πολύ μεγάλη τιμή του p_1 , ταυτίζει το (x_2, y_2) με το (x_1, y_1) . Έτσι υπολογίσαμε ότι το p_1 δεν μπορεί να ξεπεράσει την τιμή 64 στο σύστημά μας.

5.3.3 Υπολογισμός συντελεστών

$$\text{Έχουμε : } 1 + (1 - k) = 2 - k = 2 - \left(1 - a + \frac{a}{p_1}\right) \Rightarrow 2 - k = 2 - 1 + a - \frac{a}{p_1} \Rightarrow 2 - k = 1 + a - \frac{a}{p_1}$$

$$\text{και τελικά } k = 1 + a \left(\frac{1}{p_1} - 1\right) \quad (5.59)$$

$(x_1, y_1) = (1 - a, 1)$	$h_1 = x_2 - x_1 = k - 1 + a \Rightarrow h_1 = a + k - 1$
$(x_2, y_2) = (k, c_1)$	$h_2 = x_3 - x_2 = 1 - k$
$(x_3, y_3) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$	$h_3 = x_4 - x_3 = 2 - k - 1 \Rightarrow h_3 = 1 - k$
$(x_4, y_4) = (2 - k, 1 - c_1)$	$h_4 = x_5 - x_4 = 1 + a - 2 + k \Rightarrow h_4 = a + k - 1$
$(x_5, y_5) = (1 + a, 0)$	

Οπότε βασιζόμενοι στη σχέση (5.26) θα επιλύσουμε το παρακάτω σύστημα:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 & 2(h_3+h_4) & h_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} y_1'' \\ y_2'' \\ y_3'' \\ y_4'' \\ y_5'' \end{bmatrix} = 6 * \begin{bmatrix} 0 \\ (y_3-y_2)/h_2 - (y_2-y_1)/h_1 \\ (y_4-y_3)/h_3 - (y_3-y_2)/h_2 \\ (y_5-y_4)/h_4 - (y_4-y_3)/h_3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.60)$$

Υπολογίζουμε:

$$2(h_1+h_2) = 2(a+k-1+1-k) = 2a$$

$$2(h_2+h_3) = 2(1-k+1-k) = 2(2-2k) = 4-4k$$

$$2(h_3+h_4) = 2(1-k+a+k-1) = 2a$$

Επίσης:

$$\begin{aligned} \frac{y_3-y_2}{h_2} - \frac{y_2-y_1}{h_1} &= \frac{\frac{1}{2}-c_1}{1-k} - \frac{c_1-1}{a+k-1} = \frac{1-2c_1}{2} + \frac{1-c_1}{a+k-1} = \frac{1-2c_1}{2-2k} + \frac{1-c_1}{a+k-1} = \\ &= \frac{a-2ac_1+k-2kc_1-1+2c_1+2-2c_1-2k+2kc_1}{(2-2k)(a+k-1)} = \frac{a-2ac_1-k+1}{(2-2k)(a+k-1)} \end{aligned}$$

$$\frac{y_4-y_3}{h_3} - \frac{y_3-y_2}{h_2} = \frac{\frac{1}{2}-c_1}{1-k} - \frac{\frac{1}{2}-c_1}{1-k} = 0$$

$$\frac{y_5-y_4}{h_4} - \frac{y_4-y_3}{h_3} = \frac{c_1-1}{a+k-1} - \frac{\frac{1}{2}-c_1}{1-k} = \frac{c_1-1}{a+k-1} - \frac{1-2c_1}{2-2k} = \frac{c_1-1}{a+k-1} + \frac{2c_1-1}{2-2k}$$

$$\frac{2c_1-2-2kc_1+2k+2ac_1-a+2kc_1-k-2c_1+1}{(a+k-1)(2-2k)} = \frac{k+2ac_1-a-1}{(a+k-1)(2-2k)}$$

$$\text{Θέτουμε } t_1 = \frac{a-2ac_1-k+1}{(2-2k)(a+k-1)}, \quad (5.61)$$

$$\text{και άρα } \frac{k+2ac_1-a-1}{(a+k-1)(2-2k)} = -t_1$$

Εισάγαμε την παράμετρο t_1 για να γίνουν πιο εύκολοι οι υπολογισμοί μας μιας και έχουμε να λύσουμε ένα αρκετά δύσκολο σύστημα. Άρα η σχέση (5.60) γίνεται:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a+k-1 & 2a & 1-k & 0 & 0 \\ 0 & 1-k & 4-4k & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & 1-k & 2a & a+k-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} y_1'' \\ y_2'' \\ y_3'' \\ y_4'' \\ y_5'' \end{bmatrix} = 6 * \begin{bmatrix} 0 \\ t_1 \\ 0 \\ -t_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.62)$$

Η λύση της σχέσης (5.62) είναι:

$$y_1'' = 0$$

$$y_2'' = \frac{3t_1}{a}$$

$$y_3'' = 0$$

$$y_4'' = \frac{-3t_1}{a}$$

$$y_5'' = 0$$

Έχουμε λοιπόν για τους συντελεστές από τις σχέσεις (5.27), (5.28), (5.29), (5.30):

$$A_1 = \frac{y_2'' - y_1''}{6h_1} = \frac{3t_1}{a} \frac{1}{6(a+k-1)} = \frac{3t_1}{6a(a+k-1)} = \frac{t_1}{2a(a+k-1)} \quad (5.63)$$

$$B_1 = \frac{y_1''}{2} = 0 \quad (5.64)$$

$$C_1 = \frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{y_2'' h_1}{6} - \frac{y_1'' h_1}{3} = \frac{c_1 - 1}{a+k-1} - \frac{3t_1}{a} \frac{a+k-1}{6} = \frac{c_1 - 1}{a+k-1} - \frac{t_1(a+k-1)}{2a} \quad (5.65)$$

$$D_1 = y_1 = 1 \quad (5.66)$$

$$A_2 = \frac{y_3'' - y_2''}{6h_2} = \frac{-3t_1}{a} \frac{1}{6(1-k)} = \frac{-t_1}{2a(1-k)} = \frac{t_1}{2a(k-1)} \quad (5.67)$$

$$B_2 = \frac{y_2''}{2} = \frac{3t_1}{2a} \quad (5.68)$$

$$C_2 = \frac{y_3 - y_2}{h_2} - y_3'' \frac{h_2}{6} - y_2'' \frac{h_2}{3} = \frac{\frac{1}{2} - c_1}{1-k} - \frac{3t_1}{a} \frac{1-k}{3} = \frac{1-2c_1}{1-k} - \frac{t_1(1-k)}{a} = \frac{1-2c_1}{2-2k} + \frac{t_1(k-1)}{a} \quad (5.69)$$

$$D_2 = y_2 = c_1 \quad (5.70)$$

$$A_3 = \frac{y_4'' - y_3''}{6h_3} = \frac{-3t_1}{a} \frac{1}{6(1-k)} = \frac{-t_1}{2a(1-k)} = \frac{t_1}{2a(k-1)} \quad (5.71)$$

$$B_3 = \frac{y_3''}{2} = 0 \quad (5.72)$$

$$C_3 = \frac{y_4 - y_3}{h_3} - y_4'' \frac{h_3}{6} - y_3'' \frac{h_3}{3} = \frac{\frac{1}{2} - c_1}{1-k} + \frac{3t_1}{a} \frac{1-k}{6} = \frac{1-2c_1}{1-k} + \frac{t_1(1-k)}{2a} = \frac{1-2c_1}{2-2k} + \frac{t_1(1-k)}{2a} \quad (5.73)$$

$$D_3 = y_3 = \frac{1}{2} \quad (5.74)$$

$$A_4 = \frac{y_5'' - y_4''}{6h_4} = \frac{3t_1}{a} \frac{1}{6(a+k-1)} = \frac{t_1}{2a(a+k-1)} \quad (5.75)$$

$$B_4 = \frac{y_4''}{2} = \frac{-3t_1}{2a} \quad (5.76)$$

$$C_4 = \frac{y_5 - y_4}{h_4} - y_5'' \frac{h_4}{6} - y_4'' \frac{h_4}{3} = \frac{c_1 - 1}{a+k-1} + \frac{3t_1}{a} \frac{a+k-1}{3} = \frac{c_1 - 1}{a+k-1} + \frac{t_1(a+k-1)}{a} \quad (5.77)$$

$$D_4 = y_4 = 1 - c_1 \quad (5.78)$$

5.3.4 Συνάρτηση μεταφοράς

Η συνάρτηση μεταφοράς του παλμού που αναζητούμε θα είναι:

$$S_3(f) = \begin{cases} T_b & 0 < |f| < (1-a)B \\ A_1 T_b \left(\frac{|f|}{B} - 1 + a \right)^3 + B_1 T_b \left(\frac{|f|}{B} - 1 + a \right)^2 + C_1 T_b \left(\frac{|f|}{B} - 1 + a \right) + T_b D_1 & (1-a)B \leq |f| \leq kB \\ A_2 T_b \left(\frac{|f|}{B} - k \right)^3 + B_2 T_b \left(\frac{|f|}{B} - k \right)^2 + C_2 T_b \left(\frac{|f|}{B} - k \right) + T_b D_2 & kB < |f| \leq B \\ A_3 T_b \left(\frac{|f|}{B} - 1 \right)^3 + B_3 T_b \left(\frac{|f|}{B} - 1 \right)^2 + C_3 T_b \left(\frac{|f|}{B} - 1 \right) + T_b D_3 & B < |f| \leq (2-k)B \\ A_4 T_b \left(\frac{|f|}{B} - 2 + k \right)^3 + B_4 T_b \left(\frac{|f|}{B} - 2 + k \right)^2 + C_4 T_b \left(\frac{|f|}{B} - 2 + k \right) + T_b D_4 & (2-k)B < |f| \leq (1+a)B \\ 0 & |f| > (1+a)B \end{cases}$$

όπου A_i, B_i, C_i, D_i με $i = 1, 2, 3, 4$ είναι οι συντελεστές που υπολογίσαμε στις σχέσεις (5.63) έως και (5.78)

Να τονίσουμε εδώ πως αν δώσουμε την τιμή 2 στην παράμετρο p_1 τότε θα έχουμε ως αποτέλεσμα στο πεδίο των συχνοτήτων την συνάρτηση του δεύτερου παλμού τον οποίο κατασκευάσαμε πριν. Δηλαδή έχουμε πλέον μία οικογένεια συναρτήσεων που δημιουργεί άλλες οικογένειες συναρτήσεων δίνοντας τιμές στην παράμετρο p_1 και εμείς καλούμαστε να βρούμε την βέλτιστη τιμή του p_1 ώστε να έχουμε την μικρότερη δυνατή τιμή για την πιθανότητα σφάλματος και ταυτόχρονα να εντοπίσουμε την βέλτιστη τιμή της παραμέτρου c_1 ώστε να έχουμε τον τελικό μας παλμό!

5.3.5 Υπολογισμός πιθανότητας σφάλματος υπό την επίδραση jitter

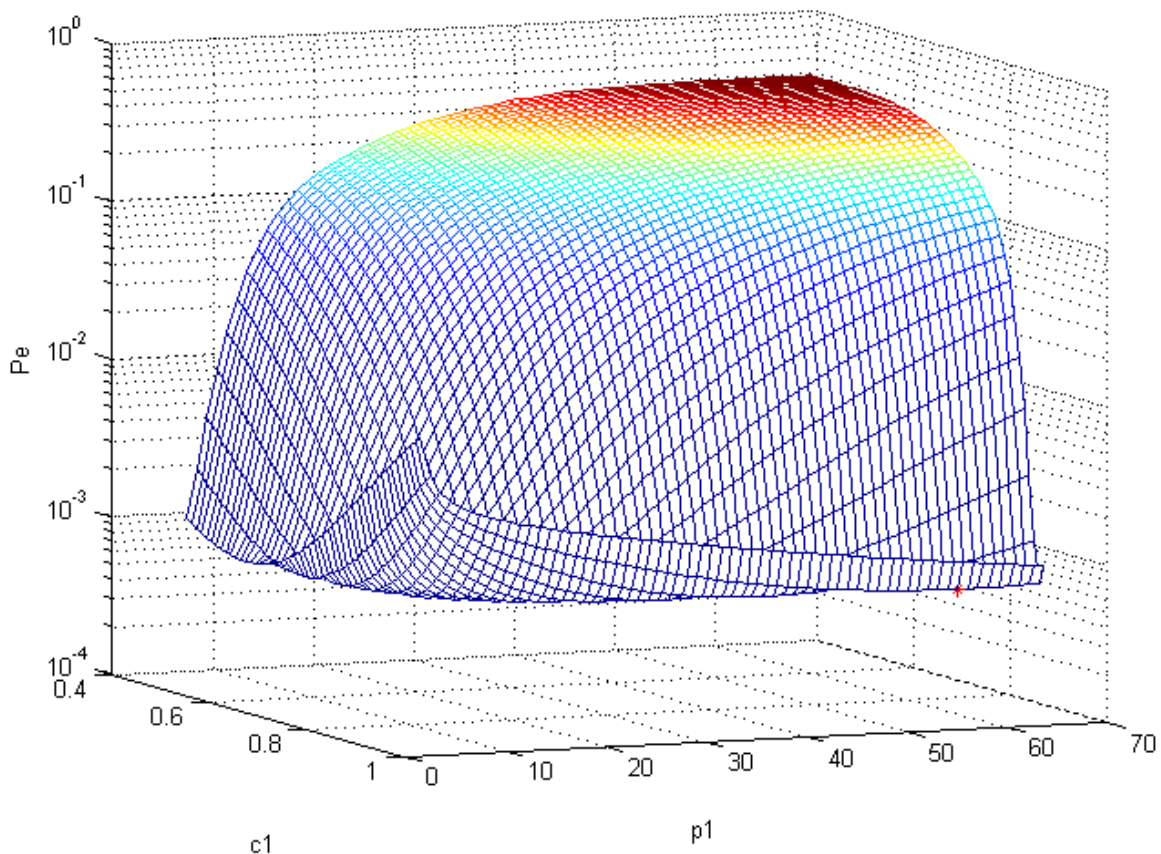
Ο υπολογισμός της πιθανότητας σφάλματος υπό την επίδραση jitter είναι κάτι δύσκολο στην συγκεκριμένη περίπτωση καθώς έχουμε πολλούς παραμέτρους, αλλά ας δούμε τον δρόμο που θα ακολουθήσουμε. Επειδή σε σχέση με τον προηγούμενο παλμό που κατασκευάσαμε, προσθέσαμε και την παράμετρο p_1 , πλέον θα χρειαζόμασταν μία διάσταση παραπάνω για να αναπαραστήσουμε γεωμετρικά όλες μας τις παραμέτρους $(a, c_1, P_e, t/T_b, p_1)$, δηλαδή πέντε διαστάσεις, κάτι που είναι αδύνατο. Γι'αυτό λοιπόν θα αναπαραστήσουμε σ'ένα τρισδιάστατο πάλι γράφημα τις τρεις από τις πέντε παραμέτρους και θα δώσουμε τιμές εμείς στις άλλες δύο.

- Στον άξονα X θα έχουμε την παράμετρο c_1
- Στον άξονα Y έχουμε την παράμετρο p_1

- Στον άξονα Z έχουμε την ζητούμενη πιθανότητα.

Εμείς δηλαδή θα δώσουμε τιμές στις παραμέτρους a και t/T_B .

Ενδεικτικά παραθέτουμε κάποια ένα από τα διαγράμματα που μας δίνουν τις βέλτιστες τιμές για την πιθανότητα σφάλματος, το σημείο με τον κόκκινο αστερίσκο είναι το ζητούμενο βέλτιστο σημείο, όλα τα διαγράμματα βρίσκονται στο παράρτημα 2 :



Διάγραμμα 66 (Για roll-off factor $\alpha=0.35$ και $t/T_B = 0.25$)

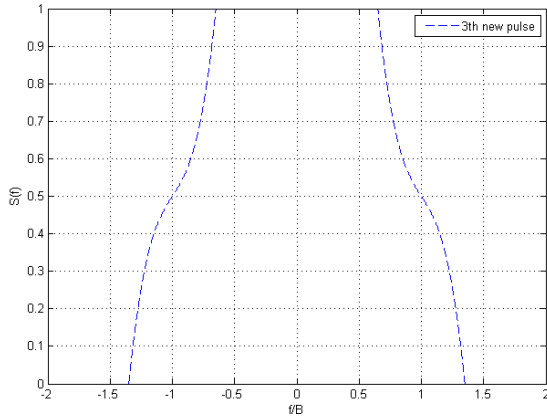
Ας δούμε τώρα όλα τα αποτελέσματα για την πιθανότητα σφάλματος σ'έναν πίνακα συγκριτικά με τα αντίστοιχα του Nyquist παλμού:

Πίνακας 10

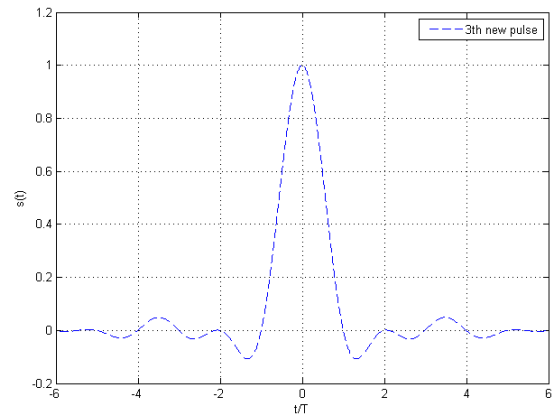
PULSES	t/T_B	± 0.05	± 0.1	± 0.2	± 0.25	± 0.3
		$a = 0.25$				
Nyquist		8.2189e-08	2.8184e-06	9.7462e-04	6.7732e-03	2.5914e-02
3rd new	P_e	$c_1=0.97$	$c_1=0.97$	$c_1=0.97$	$c_1=0.97$	$c_1=0.97$
		$p_1 = 52$	$p_1 = 47$	$p_1 = 44$	$p_1 = 45$	$p_1 = 47$
		5.0203e-08	1.0036e-06	2.6192e-04	2.2064e-03	1.1332e-02
		$a = 0.35$				
Nyquist		5.9997e-08	1.3896e-06	3.9084e-04	3.1988e-03	1.5481e-02
3rd new	P_e	$c_1=0.97$	$c_1=0.98$	$c_1=0.98$	$c_1=0.98$	$c_1=0.98$
		$p_1 = 47$	$p_1 = 62$	$p_1 = 56$	$p_1 = 56$	$p_1 = 58$
		3.4051e-08	4.3390e-07	7.9877e-05	7.4371e-04	4.7589e-03
		$a = 0.5$				
Nyquist		3.9723e-08	5.4890e-07	1.0217e-04	9.4694e-04	0.6007e-02
3rd new	P_e	$c_1=0.98$	$c_1=0.98$	$c_1=0.98$	$c_1=0.98$	$c_1=0.98$
		$p_1 = 64$	$p_1 = 57$	$p_1 = 47$	$p_1 = 45$	$p_1 = 44$
		2.1390e-08	1.5584e-07	1.8611e-05	1.8295e-04	1.4577e-03
		$a = 0.75$				
Nyquist		2.2777e-08	1.5761e-07	1.5346e-05	1.4907e-04	0.1231e-02
3rd new	P_e	$c_1=0.98$	$c_1=0.98$	$c_1=0.98$	$c_1=0.99$	$c_1=0.99$
		$p_1 = 44$	$p_1 = 44$	$p_1 = 35$	$p_1 = 62$	$p_1 = 54$
		1.3513e-08	4.2802e-08	3.1480e-06	3.8903e-05	4.4524e-04
		$a = 1$				
Nyquist		1.5281e-08	5.8720e-08	3.6543e-06	3.9247e-05	0.419e-03
3rd new	P_e	$c_1=0.98$	$c_1=0.97$	$c_1=0.99$	$c_1=0.76$	$c_1=0.78$
		$p_1 = 23$	$p_1 = 16$	$p_1 = 51$	$p_1 = 2$	$p_1 = 2$
		1.2275e-08	2.9412e-08	1.3505e-06	1.8648e-05	2.6389e-04

5.3.6 Ενδεικτικά διαγράμματα συνάρτησης μεταφοράς και κρουστικής απόκρισης

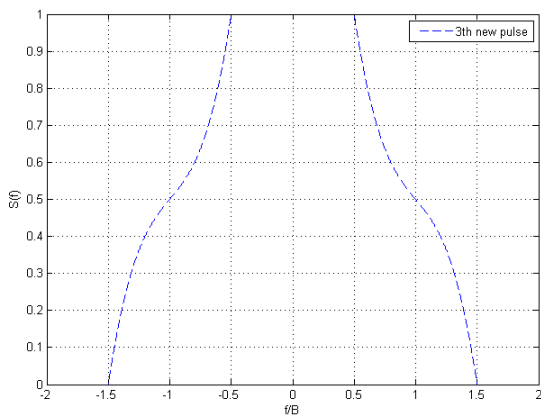
Ας δούμε τώρα κάποια ενδεικτικά διαγράμματα του παλμού που κατασκευάσαμε:



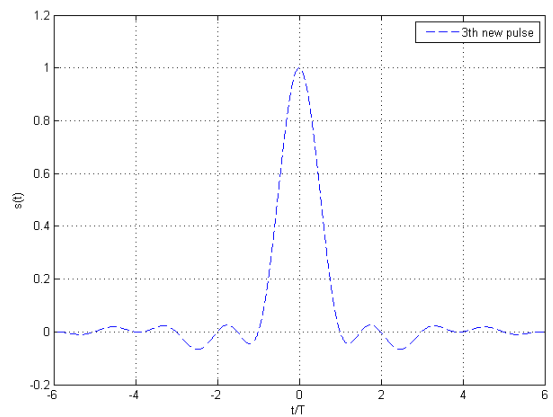
Διάγραμμα 67 (Για roll-off factor $\alpha=0.35$, $c_1=0.98$, $p_1=56$)



Διάγραμμα 68 (Για roll-off factor $\alpha=0.35$, $c_1=0.98$, $p_1=56$)



Διάγραμμα 69 (Για roll-off factor $\alpha=0.5$, $c_1=0.98$, $p_1=54$)



Διάγραμμα 70 (Για roll-off factor $\alpha=0.5$, $c_1=0.98$, $p_1=54$)

Παρατηρούμε στα διαγράμματα της κρουστικής απόκρισης ότι οι μηδενισμοί συμβαίνουν σε ακέραια πολλαπλάσια της περιόδου $T_b = 1$, όπως άλλωστε απαιτεί το θεώρημα του Nyquist.

Η επιλογή των τιμών των παραμέτρων c_1 και p_1 έγινε τυχαία, και αυτό είναι ένα πρόβλημα που θα μας απασχολήσει πιο κάτω.

5.3.7 Παρατηρήσεις

Ας κάνουμε κάποιες σημαντικές παρατηρήσεις τώρα:

- Είναι προφανές από τα αποτελέσματα του πίνακα 10 ότι ο τρίτος νέος παλμός που δημιουργήσαμε εμφανίζει βελτιωμένη πιθανότητα σφάλματος υπό την παρουσία jitter σε σχέση με τον Nyquist παλμό για τις διάφορες τιμές του roll-off factor a και των λόγου t/T_B .
- Οι μηδενισμοί στα διαγράμματα 68 και 70 της κρουστικής απόκρισης, συμβαίνουν όπως παρατηρούμε σε ακέραια πολλαπλάσια της περιόδου $T_b = 1$ και αυτό αφού θα πρέπει να ισχύει το θεώρημα Nyquist.
- Στόχος μας πλέον είναι να απαλλαγούμε από τις παραμέτρους c_1 και p_1 . Η διαδικασία που θα ακολουθήσουμε είναι όμοια με αυτή που ακολουθήσαμε στον δεύτερο νέο παλμό για να καταλήξουμε στον αντίστοιχο βέλτιστο παλμό. Μας ενδιαφέρει σ'ένα πραγματικό σύστημα να μην έχουμε μεγάλο εύρος ζώνης. Έτσι χρειαζόμαστε μικρές τιμές του roll-off factor a . Άρα λοιπόν οι κυριότερες τιμές για το roll-off factor φτάνουν τις περισσότερες φορές μέχρι την τιμή 0.5. Άρα θα δώσουμε πιο πολύ έμφαση σ'εκείνα τα c_1 και p_1 τα οποία βρίσκονται για roll-off factors στην περιοχή μέχρι το 0.5. Επίσης μας ενδιαφέρει πάρα πολύ ένας παλμός να είναι όσο πιο ανθεκτικός γίνεται σε περίπτωση που το φαινόμενο jitter είναι έντονο. Άρα μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά του παλμού μας και για μικρές τιμές του λόγου t/T_B αλλά και για μεγαλύτερες. Με όλες αυτές τις παρατηρήσεις λοιπόν θα προσδιορίσουμε τις βέλτιστες τιμές για τις παραμέτρους c_1 και p_1 .

5.3.8 Υπολογισμός του βέλτιστου παλμού

Αρχικά θα υπολογίσουμε την μέση τιμή της παραμέτρου p_1 ανά κατηγορία, για τις διάφορες τιμές του roll-off factor a του πίνακα 10:

- Για $a = 0.25$: $\bar{p}_1 = \frac{52 + 47 + 44 + 45 + 47}{5} = 47$
- Για $a = 0.35$: $\bar{p}_1 = \frac{47 + 62 + 56 + 56 + 58}{5} = 55.8$
- Για $a = 0.5$: $\bar{p}_1 = \frac{64 + 57 + 47 + 45 + 44}{5} = 51.4$

- Για $a = 0.75$: $\bar{p}_1 = \frac{44+44+35+62+54}{5} = 47.8$
- Για $a = 1$: $\bar{p}_1 = \frac{23+16+51+2+2}{5} = 18.8$

Θεωρούμε για τους λόγους που αναφέραμε πιο πάνω ότι κάποιες τιμές του roll-off factor a , είναι πιο ρεαλιστικές σ' ένα πραγματικό σύστημα απ' ότι κάποιες άλλες. Έτσι λοιπόν εισάγουμε τους παρακάτω συντελεστές βαρύτητας:

- Για $a = 0.25$: συντελεστής βαρύτητας $m_1 = 1$
- Για $a = 0.35$: συντελεστής βαρύτητας $m_2 = 2$
- Για $a = 0.5$: συντελεστής βαρύτητας $m_3 = 3$
- Για $a = 0.75$: συντελεστής βαρύτητας $m_4 = 2$
- Για $a = 1$: συντελεστής βαρύτητας $m_5 = 1$

Με τα στοιχεία αυτά θα βρούμε μια μέση λύση για την τελική τιμή της παραμέτρου p_1 , ώστε ο παλμός μας να είναι όσο το δυνατόν καλύτερος σε κάθε κατηγορία roll-off factor και ταυτόχρονα με την εισαγωγή των συντελεστών βαρύτητας δίνουμε μεγαλύτερη βαρύτητα στις κατηγορίες για roll-off factor κοντά στην τιμή 0.5.

$$\text{Άρα } p_1 = \frac{\bar{p}_1 \cdot m_1 + \bar{p}_2 \cdot m_2 + \bar{p}_3 \cdot m_3 + \bar{p}_4 \cdot m_4 + \bar{p}_5 \cdot m_5}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5} = \frac{47 \cdot 1 + 55.8 \cdot 2 + 51.4 \cdot 3 + 47.8 \cdot 2 + 18.8 \cdot 1}{9} \cong 47$$

Επίσης από τον πίνακα 10 και πάλι επιλέγουμε ως τιμή για την παράμετρο c_1 την τιμή 0.98 μιας και αυτή είναι η επικρατούσα τιμή. Να τονίσουμε ότι για την επιλογή της παραμέτρου p_1 ακολουθήθηκε διαφορετική πορεία εύρεσης από αυτή της παραμέτρου c_1 και αυτό γιατί η εύρεση της βέλτιστης τιμής για την παράμετρο p_1 απαιτεί μεγαλύτερη ακρίβεια σε σχέση με τον υπολογισμό της παραμέτρου c_2 . Έτσι λοιπόν συνολικά επιλέγω τις τιμές:

$p_1 = 47$ και $c_1 = 0.98$. Άρα από σχέση (5.58) έχουμε πως

$$k = 1 - a + \frac{a}{47} = 1 - \frac{46a}{47} \tag{5.79}$$

Επίσης από την σχέση (5.61) έχουμε:

$$t_1 = \frac{a - 1.96a - 1 + \frac{46a}{47} + 1}{\left(2 - 2 + \frac{92a}{47}\right)\left(a + 1 - \frac{46a}{47} - 1\right)} = \frac{-0.96a + \frac{46a}{47}}{\frac{92a}{47} \frac{a}{47}} = \frac{0.88a}{\frac{92a^2}{2209}} = \frac{1943.92}{4324a} \quad (5.80)$$

5.3.9 Βέλτιστη συνάρτηση μεταφοράς του νέου παλμού

Η συνάρτηση μεταφοράς του βέλτιστου νέου παλμού στο πεδίο των συχνοτήτων παίρνει την τελική της μορφή αντικαθιστώντας τις σχέσεις (5.79) και (5.80) στις σχέσεις (5.63) έως (5.78), και πλέον δεν έχει καμία εξάρτηση από τις παραμέτρους c_1 και p_1 και έτσι η $S_3(f)$ γίνεται:

$$S_3(f) = \begin{cases} T_b & 0 < |f| < (1-a)B \\ \frac{91364.24}{8648a^3} T_b \left(\frac{|f|}{B} - 1 + a\right)^3 - \frac{8170.48}{8648a} T_b \left(\frac{|f|}{B} - 1 + a\right) + T_b & (1-a)B \leq |f| \leq \left(1 - \frac{46a}{47}\right)B \\ -\frac{91364.24}{397808a^3} T_b \left(\frac{|f|}{B} - 1 + \frac{46a}{47}\right)^3 + \frac{5831.76}{8648a^2} T_b \left(\frac{|f|}{B} - 1 + \frac{46a}{47}\right)^2 - \frac{8046.4}{8648a} T_b \left(\frac{|f|}{B} - 1 + \frac{46a}{47}\right) + 0.98T_b & \left(1 - \frac{46a}{47}\right)B < |f| \leq B \\ -\frac{91364.24}{397808a^3} T_b \left(\frac{|f|}{B} - 1\right)^3 - \frac{4677.44}{17296a} T_b \left(\frac{|f|}{B} - 1\right) + 0.5T_b & B < |f| \leq \left(1 + \frac{46a}{47}\right)B \\ \frac{91364.24}{8648a^3} T_b \left(\frac{|f|}{B} - 1 - \frac{46a}{47}\right)^3 - \frac{5831.76}{8648a^2} T_b \left(\frac{|f|}{B} - 1 - \frac{46a}{47}\right)^2 - \frac{4023.2}{4324a} T_b \left(\frac{|f|}{B} - 1 - \frac{46a}{47}\right) + 0.02T_b & \left(1 + \frac{46a}{47}\right)B < |f| \leq (1+a)B \\ 0 & |f| > (1+a)B \end{cases}$$

Η συνάρτηση αυτή είναι η βέλτιστη συνάρτηση μεταφοράς του νέου παλμού.

5.3.10 Υπολογισμός πιθανότητας σφάλματος υπό την επίδραση jitter

Ο παρακάτω πίνακας 11 δείχνει τα αποτελέσματα των μετρήσεων της πιθανότητας σφάλματος για τον νέο μας παλμό στην τελική του πλέον μορφή σε σχέση με τον Nyquist παλμό:

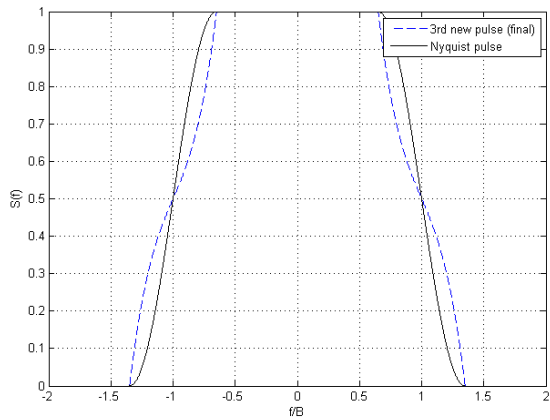
Πίνακας 11

PULSES	t/T_B	± 0.05	± 0.1	± 0.2	± 0.25	± 0.3
	$a = 0.25$					
Nyquist	P_e	8.2189e-08	2.8184e-06	9.7462e-04	6.7732e-03	2.5914e-02
3 rd new final		5.4278e-08	1.1245e-06	2.9502e-04	2.4828e-03	1.2700e-02
	$a = 0.35$					
Nyquist	P_e	5.9997e-08	1.3896e-06	3.9084e-04	3.1988e-03	1.5481e-02
3 rd new final		3.6335e-08	4.6483e-07	8.3493e-05	7.7701e-04	4.9958e-03
	$a = 0.5$					
Nyquist	P_e	3.9723e-08	5.4890e-07	1.0217e-04	9.4694e-04	0.6007e-02
3 rd new final		2.2284e-08	1.6121e-07	1.8611e-05	1.8342e-04	1.4661e-03
	$a = 0.75$					
Nyquist	P_e	2.2777e-08	1.5761e-07	1.5346e-05	1.4907e-04	0.1231e-02
3 rd new final		1.3545e-08	4.3185e-08	3.7239e-06	5.4763e-05	7.0510e-04
	$a = 1$					
Nyquist	P_e	1.5281e-08	5.8720e-08	3.6543e-06	3.9247e-05	0.419e-03
3 rd new final		1.5469e-08	5.8197e-08	3.0192e-06	3.3805e-05	4.3762e-04

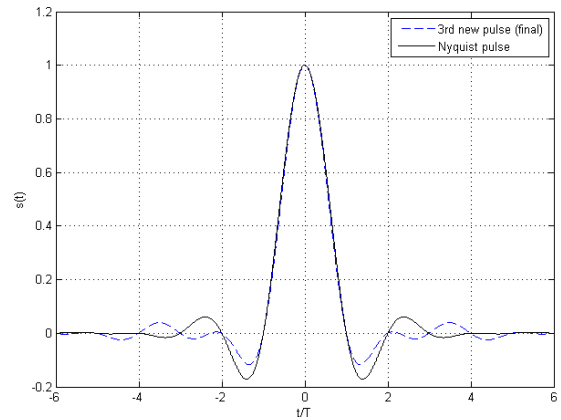
Βλέπουμε από τον πίνακα 11 πως ο παλμός που δημιουργήσαμε τελικά και είναι ανεξάρτητος από κάθε παράμετρο εμφανίζει βελτιωμένη πιθανότητα σφάλματος υπό την παρουσία jitter σε σχέση με τον Nyquist παλμό.

5.3.11 Ενδεικτικά διαγράμματα συνάρτησης μεταφοράς και κρουστικής απόκρισης καθώς και διαγράμματα οφθαλμού

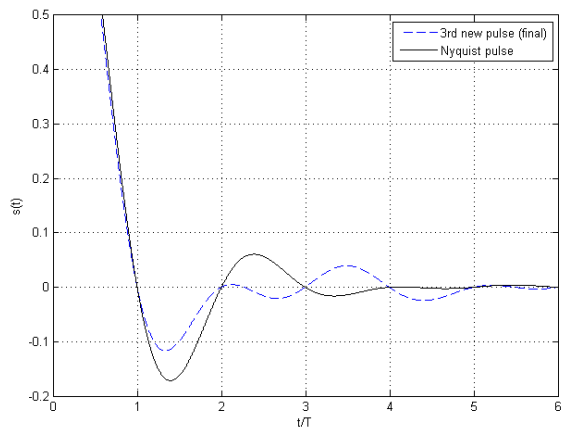
Ενδεικτικά παραθέτουμε τα παρακάτω διαγράμματα του παλμού μας στο πεδίο της συχνότητας και του χρόνου σε σύγκριση με τον Nyquist παλμό:



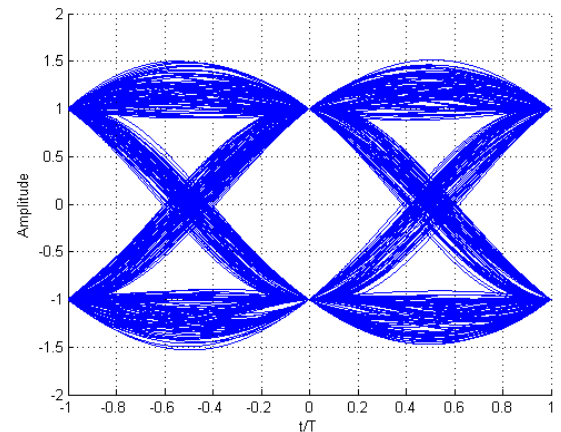
Διάγραμμα 71 (Για roll-off factor $\alpha=0.35$)



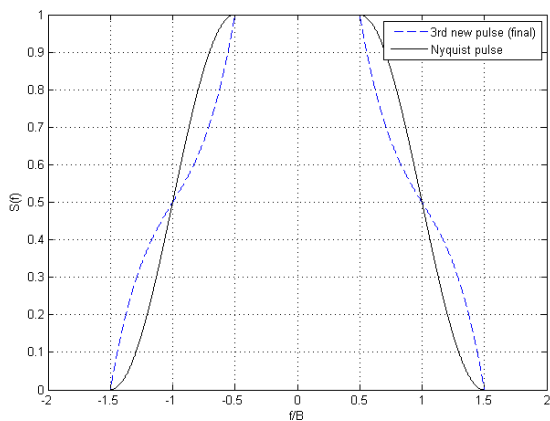
Διάγραμμα 72 (Για roll-off factor $\alpha=0.35$)



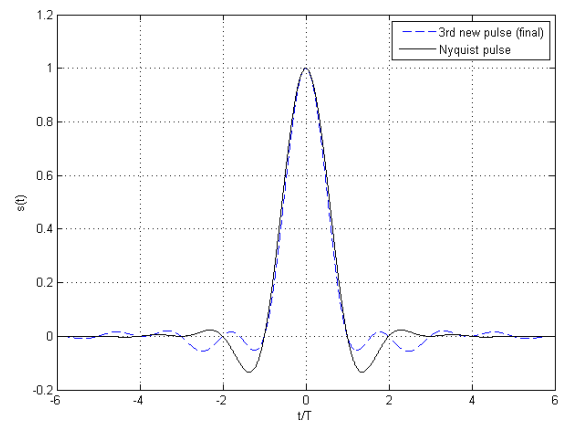
Διάγραμμα 73 (Για roll-off factor $\alpha=0.35$)



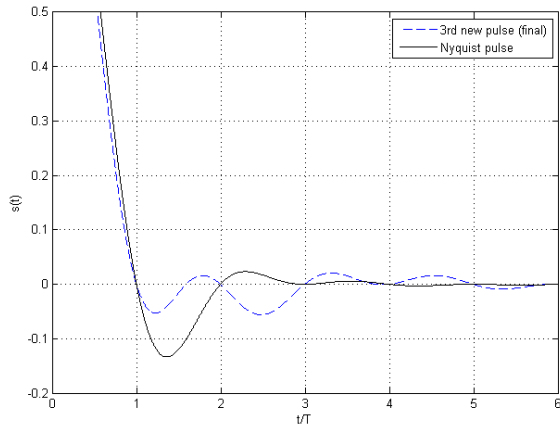
Διάγραμμα 74 (Για roll-off factor $\alpha=0.35$)



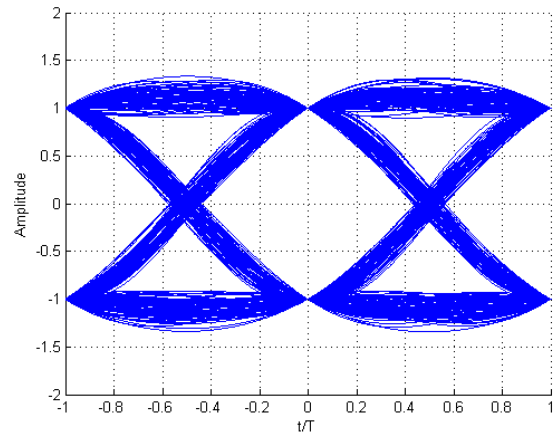
Διάγραμμα 75 (Για roll-off factor $\alpha=0.5$)



Διάγραμμα 76 (Για roll-off factor $\alpha=0.5$)

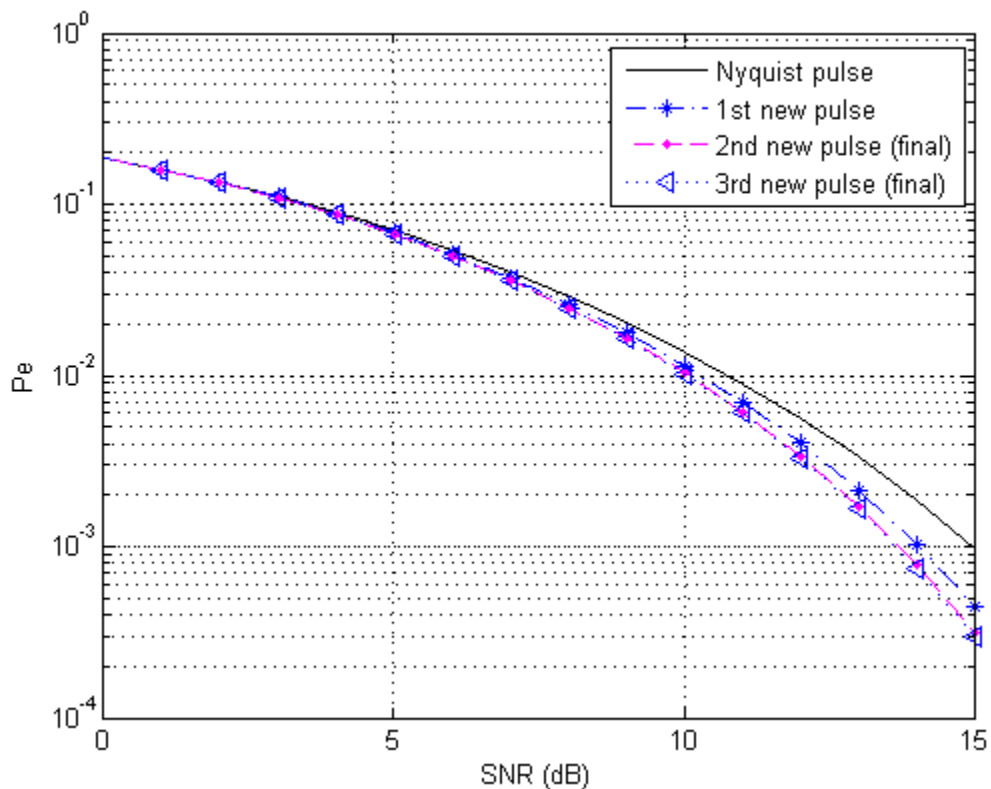


Διάγραμμα 77 (Για roll-off factor $\alpha=0.5$)

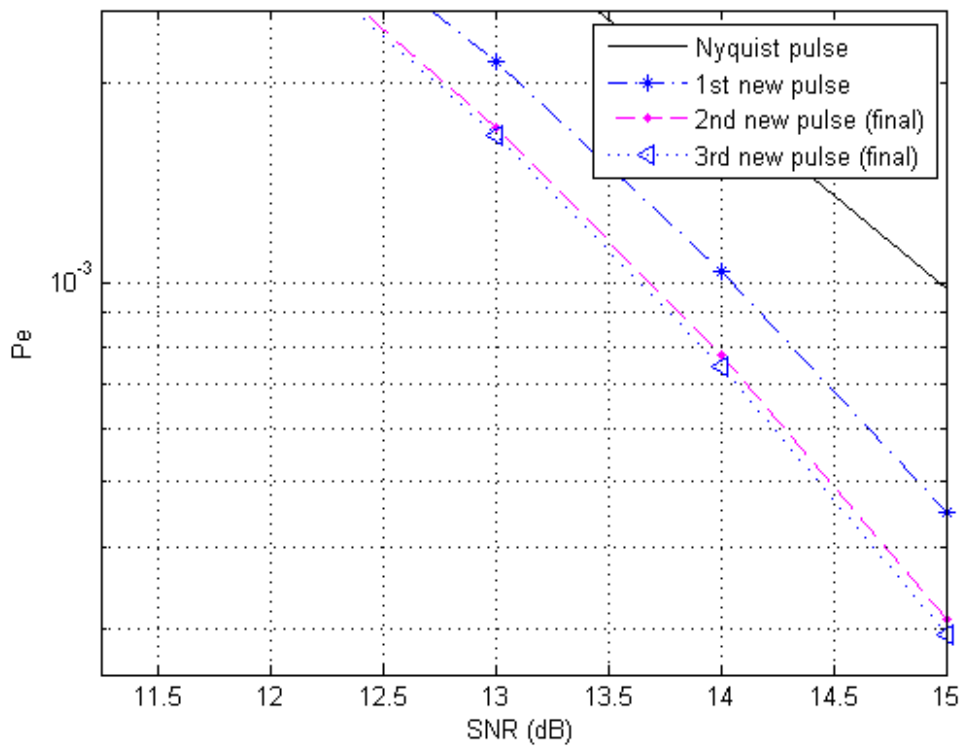


Διάγραμμα 78 (Για roll-off factor $\alpha=0.5$)

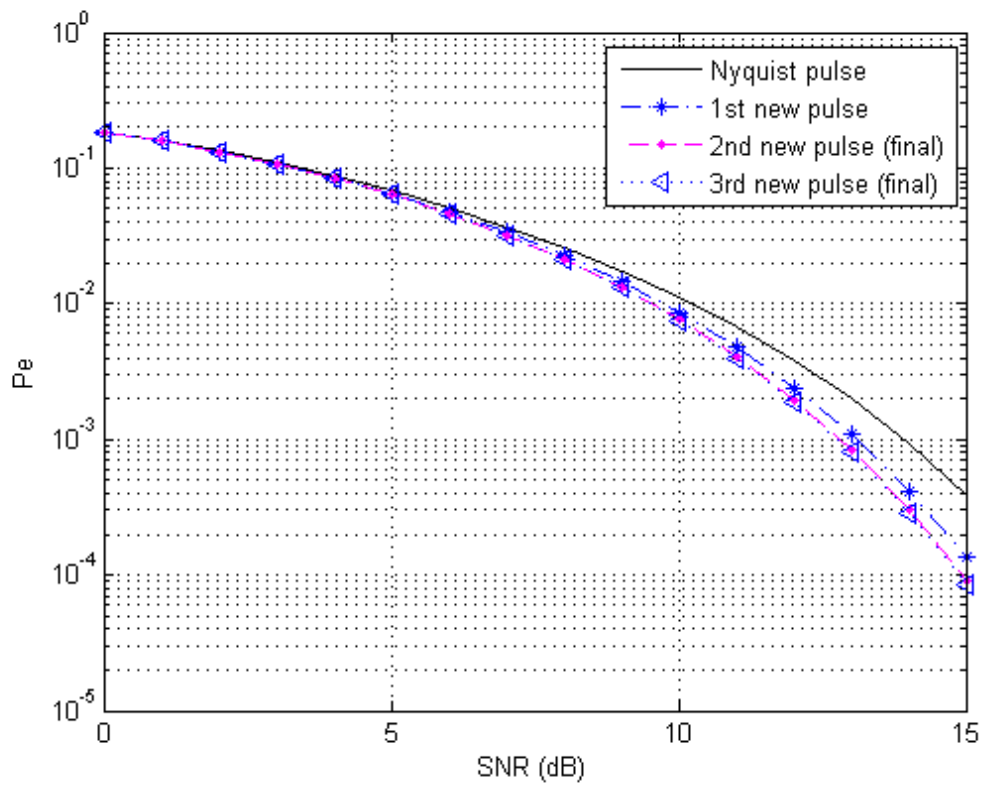
5.3.12 Συνοπτικά διαγράμματα πιθανότητας σφάλματος σε σύγκριση με τον Nyquist παλμό



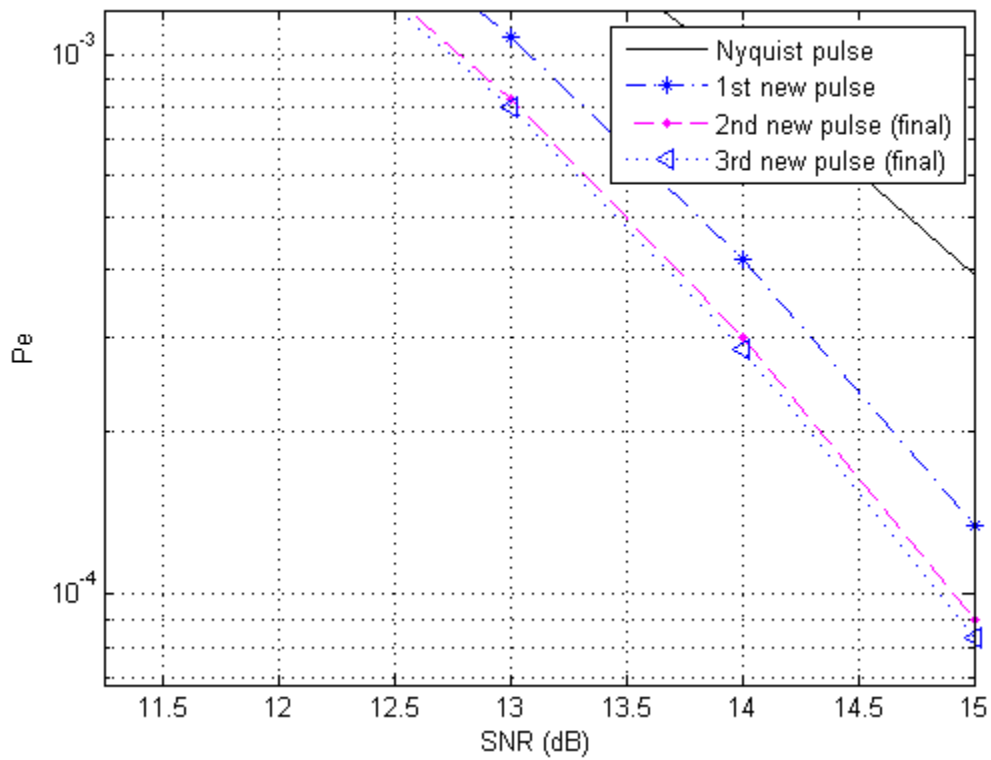
Διάγραμμα 79 (Για roll-off factor $\alpha=0.25$ και λόγο $t/T_B = 0.2$)



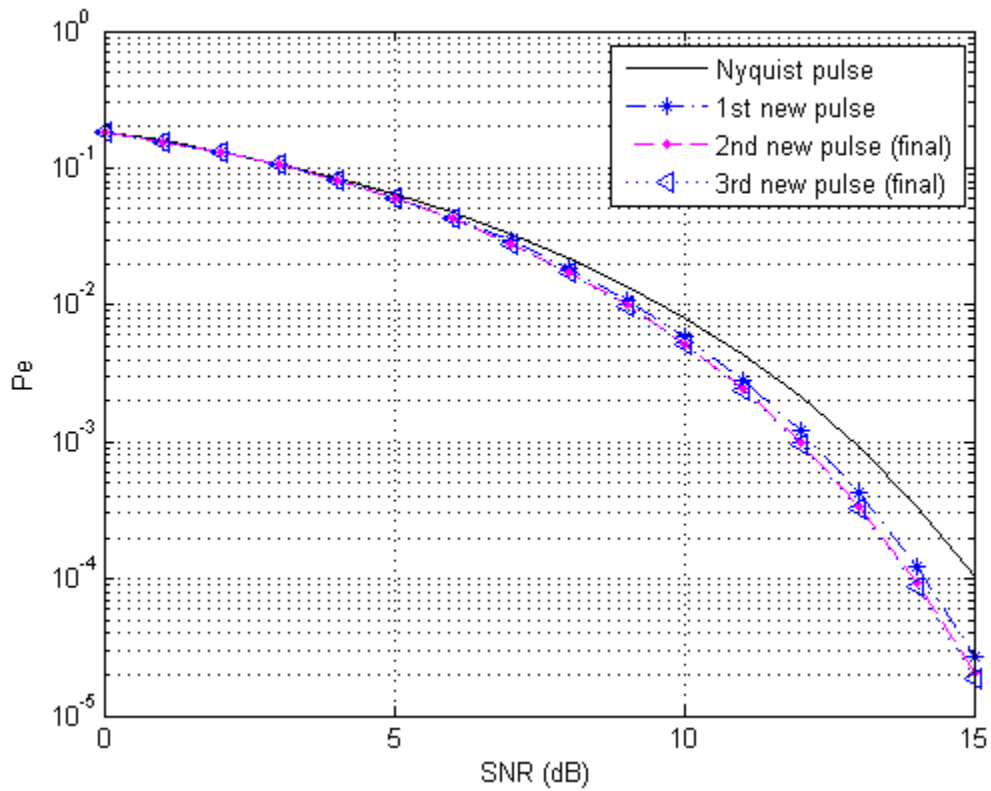
Διάγραμμα 80 (Για roll-off factor $\alpha=0.25$ και λόγο $t/T_B = 0.2$)



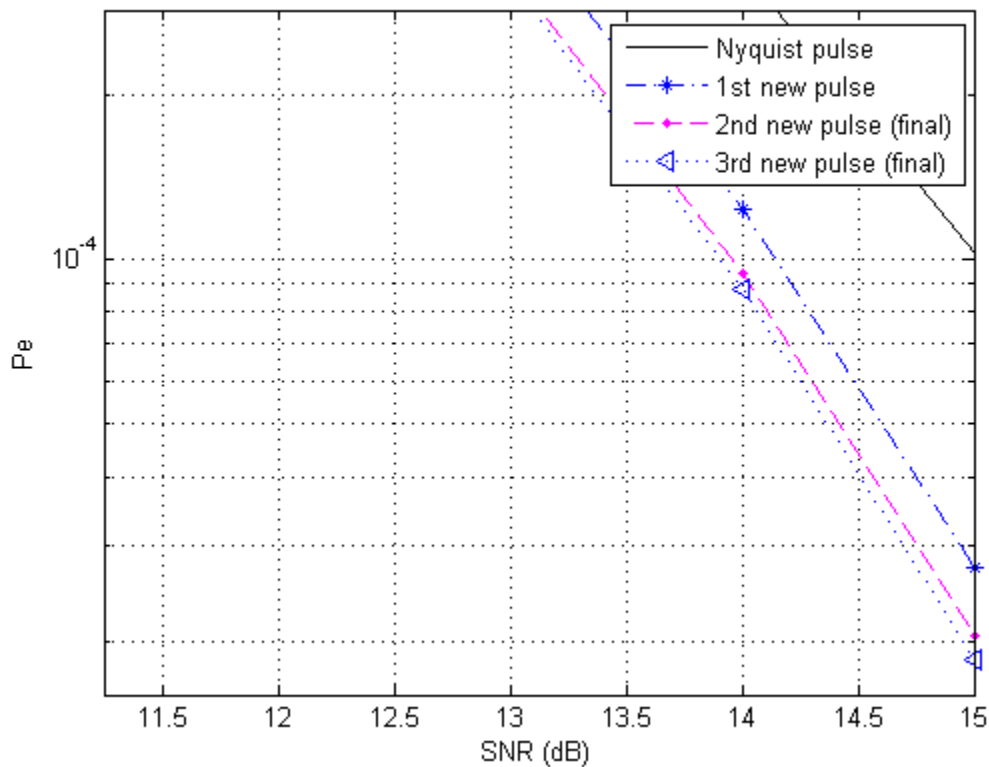
Διάγραμμα 81 (Για roll-off factor $\alpha=0.35$ και λόγο $t/T_B = 0.2$)



Διάγραμμα 82 (Για roll-off factor $\alpha=0.35$ και λόγο $t/T_B = 0.2$)



Διάγραμμα 83 (Για roll-off factor $\alpha=0.5$ και λόγο $t/T_B = 0.2$)



Διάγραμμα 84 (Για roll-off factor $\alpha=0.5$ και λόγο $t/T_b = 0.2$)

Κατασκευάσαμε λοιπόν έναν παλμό όπου παρουσιάζει βελτιωμένη πιθανότητα σφάλματος σε σχέση με τον Nyquist παλμό αλλά και με τον προηγούμενο παλμό που κατασκευάσαμε, καθώς η πιθανότητα σφάλματος όπως προκύπτει από τα διαγράμματα 79-84 αλλά και από τον πίνακα 11.

Επίσης παρατηρούμε ότι οι μηδενισμοί στο πεδίο του χρόνου συμβαίνουν σε ακέραια πολλαπλάσια της περιόδου $T_b = 1$, κάτι που πρέπει να ισχύει καθώς πρέπει να ικανοποιείται το θεώρημα του Nyquist.

Το ερώτημα πλέον είναι μήπως θα μπορούσαμε να κατασκευάσουμε ακόμα έναν καλύτερο ακόμα παλμό. Είναι το αμέσως επόμενο θέμα που θα μας απασχολήσει.

5.4 Κατασκευή τέταρτου νέου παλμού

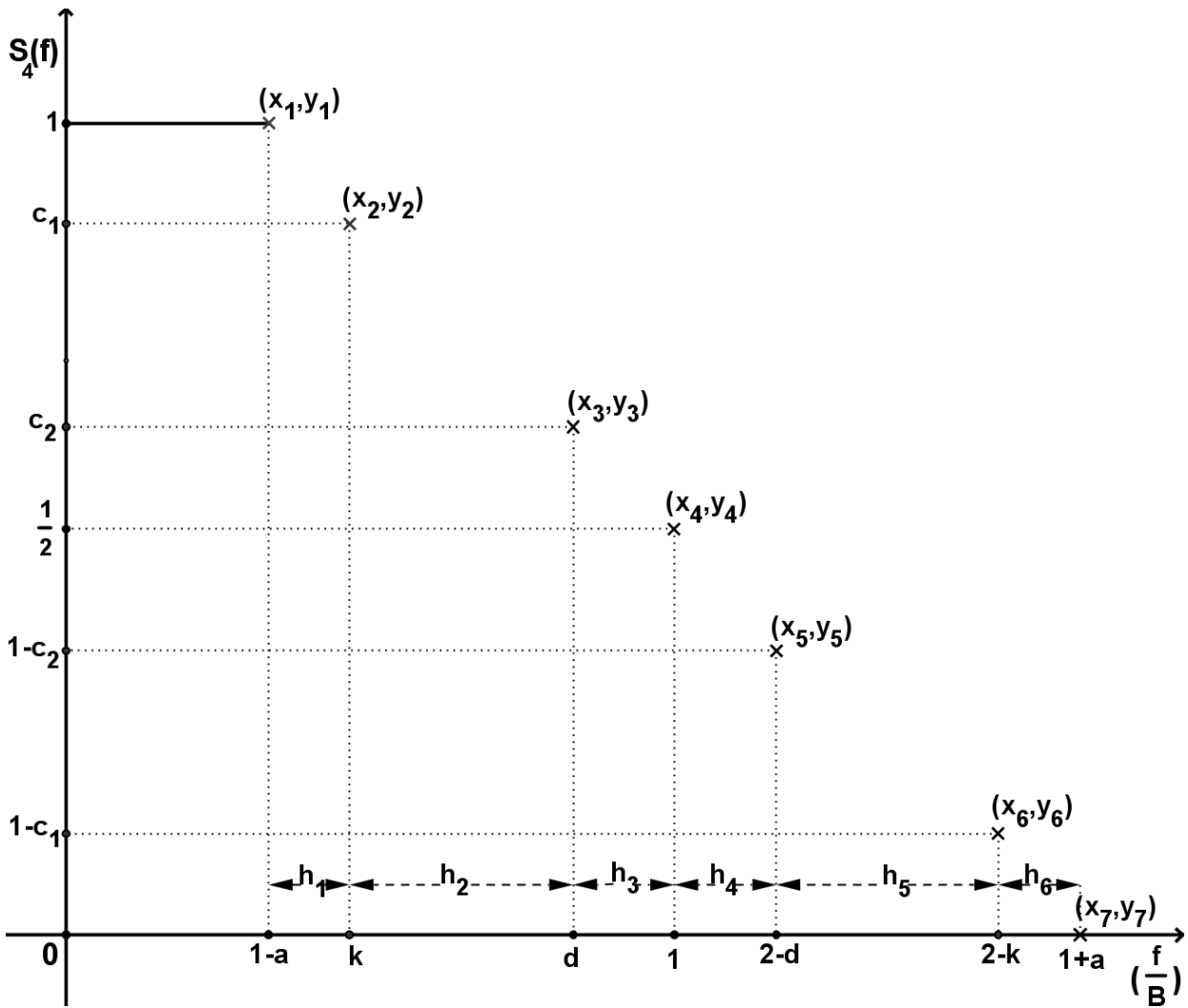
5.4.1 Εισαγωγή

Η απάντηση στο ερώτημα αν μπορούμε να κατασκευάσουμε ακόμα έναν καλύτερο παλμό είναι πως μπορούμε. Αυτή την φορά θα εξελίξουμε ακόμα περισσότερο την τεχνική μας καθώς θα πάμε την γεωμετρική κατασκευή του διαγράμματος 59 ένα βήμα πιο κάτω.

5.4.2 Γεωμετρική κατασκευή νέου παλμού

Ας γυρίσουμε πίσω στην κατασκευή του διαγράμματος 65. Εκεί εισάγαμε το σημείο k και το συμμετρικό του $2-k$. Αυτή την φορά όμως θα κάνουμε το εξής:

Θα κρατήσουμε ως έχει την κατασκευή του διαγράμματος 65 με τη μόνη διαφορά ότι θα προσθέσουμε δύο ακόμα σημεία με τον ίδιο τρόπο όπου θα είναι συμμετρικά ως προς την μονάδα, θα μπορούν να κινηθούν στον οριζόντιο και κάθετο άξονα αλλά με τον τρόπο που θα ορίσουμε στην συνέχεια, αλλά ας δούμε το παρακάτω διάγραμμα της κατασκευής μας:



Διάγραμμα 85

5.4.3 Υπολογισμός συντελεστών

Ορίζουμε σημείο $(x_3, y_3) = (d, c_2)$ με $\frac{1}{2} < c_2 < c_1$, και το συμμετρικό του $(x_5, y_5) = (2-d, 1-c_2)$.

Οι τετμημένες d και $2-d$ αντίστοιχα αυτών των σημείων είναι έτσι ορισμένες ώστε να είναι συμμετρικές ως προς τη μονάδα, όπως άλλωστε είναι ορισμένες και οι τετμημένες k και $2-k$.

Ορίζουμε: $d = k + \frac{1-k}{p_2} \Rightarrow d = k + \frac{1}{p_2}(1-k)$, με p_2 να είναι φυσικός μεγαλύτερος της μονάδας,

καθώς αν $p_2 = 1$ τότε $d = 1$ και $2-d = 1$ και τότε τα σημεία (x_3, y_3) , (x_5, y_5) θα ταυτίζονταν με το σημείο (x_4, y_4) και αυτό είναι αδύνατο. Επίσης όπως και στο διάγραμμα 65 ισχύουν ότι:

$S_4(B) = \frac{1}{2}$ και $S_4((1-a)B) = 1$ καθώς και πάλι το διάγραμμά μας βασίζεται στην περιτή συμμετρία ώστε το τελικό εμβαδό της συνάρτησης μεταφοράς να παραμένει πάντα σταθερό και ίσο με την μονάδα.

Θα προσπαθήσουμε όπως και στο διάγραμμα 65 να κατασκευάσουμε μια καμπύλη όπου θα περνά απ' όλα τα σημεία.

5.4.3 Υπολογισμός συντελεστών

Έχουμε:

$(x_1, y_1) = (1-a, 1)$	$h_1 = x_2 - x_1 = k - 1 + a$
$(x_2, y_2) = (k, c_1)$	$h_2 = x_3 - x_2 = d - k$
$(x_3, y_3) = (d, c_2)$	$h_3 = x_4 - x_3 = 1 - d$
$(x_4, y_4) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$	$h_4 = x_5 - x_4 = 1 - d$
$(x_5, y_5) = (2-d, 1-c_2)$	$h_5 = x_6 - x_5 = d - k$
$(x_6, y_6) = (2-k, 1-c_1)$	$h_6 = x_7 - x_6 = a + k - 1$
$(x_7, y_7) = (1+a, 0)$	

Βασιζόμενοι στη σχέση (5.26) έχουμε να επιλύσουμε ένα σύστημα της μορφής $E * x = b$,

όπου E είναι ο πίνακας:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 & 2(h_3 + h_4) & h_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_4 & 2(h_4 + h_5) & h_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_5 & 2(h_5 + h_6) & h_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.81)$$

$$x = \begin{bmatrix} y_1'' \\ y_2'' \\ y_3'' \\ y_4'' \\ y_5'' \\ y_6'' \\ y_7'' \end{bmatrix} \quad (5.82) \quad \text{και} \quad b = 6 * \begin{bmatrix} 0 \\ (y_3 - y_2)/h_2 - (y_2 - y_1)/h_1 \\ (y_4 - y_3)/h_3 - (y_3 - y_2)/h_2 \\ (y_5 - y_4)/h_4 - (y_4 - y_3)/h_3 \\ (y_6 - y_5)/h_5 - (y_5 - y_4)/h_4 \\ (y_7 - y_6)/h_6 - (y_6 - y_5)/h_5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.83)$$

Έχουμε:

$$\bullet \quad 2(h_1 + h_2) = 2(k - 1 + a + d - k) = 2d + 2a - 2 \quad (5.84)$$

$$\bullet \quad 2(h_2 + h_3) = 2(d - k + 1 - d) = 2 - 2k \quad (5.85)$$

$$\bullet \quad 2(h_3 + h_4) = 2(1 - d + 1 - d) = 2(2 - 2d) = 4 - 4d \quad (5.86)$$

$$\bullet \quad 2(h_4 + h_5) = 2(1 - d + d - k) = 2 - 2k \quad (5.87)$$

$$\bullet \quad 2(h_5 + h_6) = 2(d - k + a + k - 1) = 2d + 2a - 2 \quad (5.88)$$

Επίσης:

$$\begin{aligned} \frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{y_2 - y_1}{h_1} &= \frac{c_2 - c_1}{d - k} - \frac{c_1 - 1}{k - 1 + a} = \frac{kc_2 - kc_1 + ac_2 - ac_1 - c_2 + c_1 - dc_1 + d + kc_1 - k}{(d - k)(k + a - 1)} = \\ &= \frac{kc_2 + ac_2 - ac_1 - c_2 + c_1 - dc_1 + d - k}{(d - k)(k + a - 1)} \end{aligned} \quad (5.89)$$

$$\begin{aligned} \frac{y_4 - y_3}{h_3} - \frac{y_3 - y_2}{h_2} &= \frac{\frac{1}{2} - c_2}{1 - d} - \frac{c_2 - c_1}{d - k} = \frac{1 - 2c_2}{1 - d} + \frac{c_1 - c_2}{d - k} = \frac{1 - 2c_2}{2 - 2d} + \frac{c_1 - c_2}{d - k} = \\ &= \frac{d - 2dc_2 - k + 2kc_2 + 2c_1 - 2c_2 - 2dc_1 + 2dc_2}{(2 - 2d)(d - k)} = \frac{d - k + 2kc_2 + 2c_1 - 2c_2 - 2dc_1}{(2 - 2d)(d - k)} \end{aligned} \quad (5.90)$$

$$\frac{y_5 - y_4}{h_4} - \frac{y_4 - y_3}{h_3} = \frac{\frac{1}{2} - c_2}{1 - d} - \frac{\frac{1}{2} - c_2}{1 - d} = 0 \quad (5.91)$$

$$\frac{y_6 - y_5}{h_5} - \frac{y_5 - y_4}{h_4} = \frac{c_2 - c_1}{d - k} - \frac{\frac{1}{2} - c_2}{1 - d} = \frac{c_2 - c_1}{d - k} + \frac{2c_2 - 1}{1 - d} = \frac{c_2 - c_1}{d - k} + \frac{2c_2 - 1}{2 - 2d} =$$

$$= \frac{2c_2 - 2c_1 - 2dc_2 + 2dc_1 + 2dc_2 - d - 2kc_2 + k}{(d-k)(2-2d)} = \frac{2c_2 - 2c_1 + 2dc_1 - d - 2kc_2 + k}{(d-k)(2-2d)} \quad (5.92)$$

$$\frac{y_7 - y_6}{h_6} - \frac{y_6 - y_5}{h_5} = \frac{c_1 - 1}{a+k-1} - \frac{c_2 - c_1}{d-k} = \frac{c_1 - 1}{a+k-1} + \frac{c_1 - c_2}{d-k} =$$

$$= \frac{dc_1 - d - kc_1 + k + ac_1 - ac_2 + kc_1 - kc_2 - c_1 + c_2}{(a+k-1)(d-k)} = \frac{dc_1 - d + k + ac_1 - ac_2 - kc_2 - c_1 + c_2}{(a+k-1)(d-k)} \quad (5.93)$$

$$\text{Θέτουμε } r_1 = \frac{kc_2 + ac_2 - ac_1 - c_2 + c_1 - dc_1 + d - k}{(d-k)(k+a-1)} \quad (5.94)$$

$$\text{και } r_2 = \frac{d - k + 2kc_2 + 2c_1 - 2c_2 - 2dc_1}{(2-2d)(d-k)} \quad (5.95)$$

$$\text{και άρα έχουμε πως } -r_1 = \frac{dc_1 - d + k + ac_1 - ac_2 - kc_2 - c_1 + c_2}{(a+k-1)(d-k)} \quad (5.96)$$

$$\text{και } -r_2 = \frac{2c_2 - 2c_1 + 2dc_1 - d - 2kc_2 + k}{(d-k)(2-2d)} \quad (5.97)$$

Χρησιμοποιήσαμε της παραμέτρους r_1 και r_2 για να απλουστεύσουμε τους υπολογισμούς μας καθώς έχουμε να επιλύσουμε όπως φαίνεται από τις σχέσεις (5.81), (5.82), (5.83) ένα σύστημα 7 επί 7.

Οι λύσεις του παραπάνω συστήματος από τις σχέσεις (5.26) και (5.81) έως και (5.97) είναι:

$$y_1'' = 0, \quad y_2'' = \frac{6(-2r_1 + 2kr_1 + dr_2 - kr_2)}{4 - 4a - 4d + d^2 - 4k + 4ak + 2dk + k^2}, \quad y_3'' = \frac{-6(-dr_1 + kr_1 - 2r_2 + 2ar_2 + 2dr_2)}{4 - 4a - 4d + d^2 - 4k + 4ak + 2dk + k^2}$$

$$y_4'' = 0, \quad y_5'' = \frac{-6(dr_1 - kr_1 + 2r_2 - 2ar_2 - 2dr_2)}{4 - 4a - 4d + d^2 - 4k + 4ak + 2dk + k^2}, \quad y_6'' = \frac{-6(-2r_1 + 2kr_1 + dr_2 - kr_2)}{4 - 4a - 4d + d^2 - 4k + 4ak + 2dk + k^2}$$

$$y_7'' = 0$$

Παρατηρούμε πως $y_2'' = -y_6''$, $y_3'' = -y_5''$, $y_1'' = y_4'' = y_7''$. Η παρατήρηση αυτή θα κάνει πιο εύκολες τις πράξεις μας καθώς η επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος φαίνεται να είναι αρκετά πολύπλοκη.

Έτσι λοιπόν χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (5.27), (5.28), (5.29), (5.30) έχουμε για τους συντελεστές:

$$A_1 = \frac{y_2'' - y_1''}{6h_1} = \frac{6(-2r_1 + 2kr_1 + dr_2 - kr_2)}{4 - 4a - 4d + d^2 - 4k + 4ak + 2dk + k^2} \frac{1}{6(a+k-1)} =$$

$$= \frac{-2r_1 + 2kr_1 + dr_2 - kr_2}{(4 - 4a - 4d + d^2 - 4k + 4ak + 2dk + k^2)(a+k-1)} \quad (5.98)$$

$$B_1 = \frac{y_1''}{2} = 0 \quad (5.99)$$

$$C_1 = \frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{y_2'' h_1}{6} - \frac{y_1'' h_1}{3} = \frac{c_1 - 1}{a+k-1} - \frac{6(-2r_1 + 2kr_1 + dr_2 - kr_2)}{4 - 4a - 4d + d^2 - 4k + 4ak + 2dk + k^2} \frac{a+k-1}{6} =$$

$$= -\frac{(-2r_1 + 2kr_1 + dr_2 - kr_2)(a+k-1)}{4 - 4a - 4d + d^2 - 4k + 4ak + 2dk + k^2} + \frac{c_1 - 1}{a+k-1} \quad (5.100)$$

$$D_1 = y_1 = 1 \quad (5.101)$$

$$A_2 = \frac{y_3'' - y_2''}{6h_2} = \frac{-6(-dr_1 + kr_1 - 2r_2 + 2ar_2 + 2dr_2 - 2r_1 + 2kr_1 + dr_2 - kr_2)}{4 - 4a - 4d + d^2 - 4k + 4ak + 2dk + k^2} \frac{1}{6(d-k)} =$$

$$= \frac{dr_1 - 3kr_1 + 2r_2 - 2ar_2 - 3dr_2 + 2r_1 + kr_2}{(4 - 4a - 4d + d^2 - 4k + 4ak + 2dk + k^2)(d-k)} \quad (5.102)$$

$$B_2 = \frac{y_2''}{2} = \frac{3(-2r_1 + 2kr_1 + dr_2 - kr_2)}{4 - 4a - 4d + d^2 - 4k + 4ak + 2dk + k^2} \quad (5.103)$$

$$C_2 = \frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{y_3'' h_2}{6} - \frac{y_2'' h_2}{3} =$$

$$= \frac{c_2 - c_1}{d-k} + \frac{6(-dr_1 + kr_1 - 2r_2 + 2ar_2 + 2dr_2)}{4 - 4a - 4d + d^2 - 4k + 4ak + 2dk + k^2} \frac{d-k}{6} - \frac{6(-2r_1 + 2kr_1 + dr_2 - kr_2)}{4 - 4a - 4d + d^2 - 4k + 4ak + 2dk + k^2} \frac{d-k}{3} =$$

$$= \frac{c_2 - c_1}{d-k} + \frac{(-dr_1 + kr_1 - 2r_2 + 2ar_2 + 2dr_2)(d-k)}{4 - 4a - 4d + d^2 - 4k + 4ak + 2dk + k^2} - \frac{2(-2r_1 + 2kr_1 + dr_2 - kr_2)(d-k)}{4 - 4a - 4d + d^2 - 4k + 4ak + 2dk + k^2} =$$

$$= \frac{c_2 - c_1}{d-k} + \frac{(-dr_1 + kr_1 - 2r_2 + 2ar_2 + 2dr_2 + 4r_1 - 4kr_1 - 2dr_2 + 2kr_2)(d-k)}{4 - 4a - 4d + d^2 - 4k + 4ak + 2dk + k^2} =$$

$$= \frac{c_2 - c_1}{d - k} + \frac{(-dr_1 - 3kr_1 - 2r_2 + 2ar_2 + 4r_1 + 2kr_2)(d - k)}{4 - 4a - 4d + d^2 - 4k + 4ak + 2dk + k^2} \quad (5.104)$$

$$D_2 = y_2 = c_1 \quad (5.105)$$

$$A_3 = \frac{y_4'' - y_3''}{6h_3} = \frac{6(-dr_1 + kr_1 - 2r_2 + 2ar_2 + 2dr_2)}{4 - 4a - 4d + d^2 - 4k + 4ak + 2dk + k^2} \frac{1}{6(1-d)} =$$

$$= \frac{-dr_1 + kr_1 - 2r_2 + 2ar_2 + 2dr_2}{(4 - 4a - 4d + d^2 - 4k + 4ak + 2dk + k^2)(1-d)} \quad (5.106)$$

$$B_3 = \frac{y_3''}{2} = \frac{-3(-dr_1 + kr_1 - 2r_2 + 2ar_2 + 2dr_2)}{4 - 4a - 4d + d^2 - 4k + 4ak + 2dk + k^2} \quad (5.107)$$

$$C_3 = \frac{y_4 - y_3}{h_3} - \frac{y_4'' h_3}{6} - \frac{y_3'' h_3}{3} = \frac{1}{2}^{-c_2} + \frac{6(-dr_1 + kr_1 - 2r_2 + 2ar_2 + 2dr_2)}{4 - 4a - 4d + d^2 - 4k + 4ak + 2dk + k^2} \frac{1-d}{3} =$$

$$= \frac{1-2c_2}{2} + \frac{2(-dr_1 + kr_1 - 2r_2 + 2ar_2 + 2dr_2)(1-d)}{4 - 4a - 4d + d^2 - 4k + 4ak + 2dk + k^2} =$$

$$= \frac{1-2c_2}{2-2d} + \frac{2(-dr_1 + kr_1 - 2r_2 + 2ar_2 + 2dr_2)(1-d)}{4 - 4a - 4d + d^2 - 4k + 4ak + 2dk + k^2} \quad (5.108)$$

$$D_3 = y_3 = c_2 \quad (5.109)$$

$$A_4 = \frac{y_5'' - y_4''}{6h_4} = \frac{-6(dr_1 - kr_1 + 2r_2 - 2ar_2 - 2dr_2)}{4 - 4a - 4d + d^2 - 4k + 4ak + 2dk + k^2} \frac{1}{6(1-d)} =$$

$$= \frac{-dr_1 + kr_1 - 2r_2 + 2ar_2 + 2dr_2}{(4 - 4a - 4d + d^2 - 4k + 4ak + 2dk + k^2)(1-d)} \quad (5.110)$$

$$B_4 = \frac{y_4''}{2} = 0 \quad (5.111)$$

$$C_4 = \frac{y_5 - y_4}{h_4} - \frac{y_5'' h_4}{6} - \frac{y_4'' h_4}{3} = \frac{1}{2}^{-c_2} + \frac{6(dr_1 - kr_1 + 2r_2 - 2ar_2 - 2dr_2)}{4 - 4a - 4d + d^2 - 4k + 4ak + 2dk + k^2} \frac{1-d}{6} =$$

$$= \frac{1-2c_2}{2-2d} + \frac{(dr_1 - kr_1 + 2r_2 - 2ar_2 - 2dr_2)(1-d)}{4-4a-4d+d^2-4k+4ak+2dk+k^2} \quad (5.112)$$

$$D_4 = y_4 = \frac{1}{2} \quad (5.113)$$

$$A_5 = \frac{y_6'' - y_5''}{6h_5} = \frac{6(dr_1 - kr_1 + 2r_2 - 2ar_2 - 2dr_2) - 6(-2r_1 + 2kr_1 + dr_2 - kr_2)}{4-4a-4d+d^2-4k+4ak+2dk+k^2} \frac{1}{6(d-k)} =$$

$$= \frac{dr_1 - kr_1 + 2r_2 - 2ar_2 - 2dr_2 + 2r_1 - 2kr_1 - dr_2 + kr_2}{(4-4a-4d+d^2-4k+4ak+2dk+k^2)(d-k)} =$$

$$= \frac{dr_1 - 3kr_1 + 2r_2 - 2ar_2 - 3dr_2 + 2r_1 + kr_2}{(4-4a-4d+d^2-4k+4ak+2dk+k^2)(d-k)} \quad (5.114)$$

$$B_5 = \frac{y_5''}{2} = \frac{-3(dr_1 - kr_1 + 2r_2 - 2ar_2 - 2dr_2)}{4-4a-4d+d^2-4k+4ak+2dk+k^2} \quad (5.115)$$

$$C_5 = \frac{y_6 - y_5}{h_5} - \frac{y_6'' h_5}{6} - \frac{y_5'' h_5}{3} =$$

$$= \frac{c_2 - c_1}{d-k} + \frac{6(-2r_1 + 2kr_1 + dr_2 - kr_2)}{4-4a-4d+d^2-4k+4ak+2dk+k^2} \frac{d-k}{6} + \frac{6(dr_1 - kr_1 + 2r_2 - 2ar_2 - 2dr_2)}{4-4a-4d+d^2-4k+4ak+2dk+k^2} \frac{d-k}{3} =$$

$$= \frac{c_2 - c_1}{d-k} + \frac{(-2r_1 + 2kr_1 + dr_2 - kr_2 + 2dr_1 - 2kr_1 + 4r_2 - 4ar_2 - 4dr_2)(d-k)}{4-4a-4d+d^2-4k+4ak+2dk+k^2} =$$

$$= \frac{c_2 - c_1}{d-k} + \frac{(-2r_1 - 3dr_1 - kr_2 + 2dr_1 + 4r_2 - 4ar_2)(d-k)}{4-4a-4d+d^2-4k+4ak+2dk+k^2} \quad (5.116)$$

$$D_5 = y_5 = 1 - c_2 \quad (5.117)$$

$$A_6 = \frac{y_7'' - y_6''}{6h_6} = \frac{6(-2r_1 + 2kr_1 + dr_2 - kr_2)}{4-4a-4d+d^2-4k+4ak+2dk+k^2} \frac{1}{6(a+k-1)} =$$

$$= \frac{-2r_1 + 2kr_1 + dr_2 - kr_2}{(4-4a-4d+d^2-4k+4ak+2dk+k^2)(a+k-1)} \quad (5.118)$$

$$B_6 = \frac{y_6''}{2} = \frac{-3(-2r_1 + 2kr_1 + dr_2 - kr_2)}{4-4a-4d+d^2-4k+4ak+2dk+k^2} \quad (5.119)$$

$$C_6 = \frac{y_7 - y_6}{h_6} - \frac{y_7'' h_6}{6} - \frac{y_6'' h_6}{3} = \frac{c_1 - 1}{a + k - 1} + \frac{6(-2r_1 + 2kr_1 + dr_2 - kr_2)}{4 - 4a - 4d + d^2 - 4k + 4ak + 2dk + k^2} \frac{a + k - 1}{3} =$$

$$= \frac{c_1 - 1}{a + k - 1} + \frac{2(-2r_1 + 2kr_1 + dr_2 - kr_2)(a + k - 1)}{4 - 4a - 4d + d^2 - 4k + 4ak + 2dk + k^2} \quad (5.120)$$

$$D_6 = y_6 = 1 - c_1 \quad (5.121)$$

5.4.4 Συνάρτηση μεταφοράς

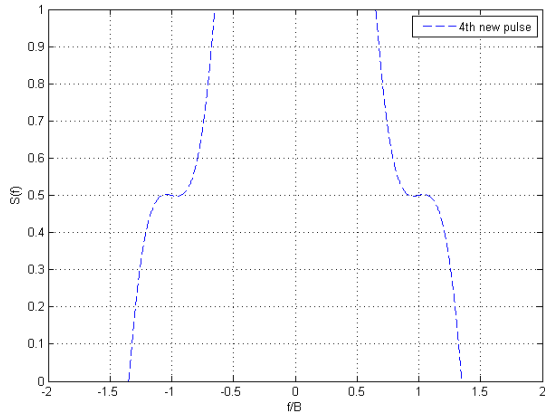
Αφού υπολογίσαμε τους συντελεστές της συνάρτησης μεταφοράς του νέου παλμού από τις σχέσεις (5.98) έως και (5.21) είμαστε έτοιμοι να γράψουμε τη γενική της μορφή η οποία είναι:

$$S_4(f) = \begin{cases} 1 & 0 < |f| < (1-a)B \\ A_1 T_b \left(\frac{|f|}{B} - 1 + a \right)^3 + B_1 T_b \left(\frac{|f|}{B} - 1 + a \right)^2 + C_1 T_b \left(\frac{|f|}{B} - 1 + a \right) + T_b D_1 & (1-a)B \leq |f| \leq kB \\ A_2 T_b \left(\frac{|f|}{B} - k \right)^3 + B_2 T_b \left(\frac{|f|}{B} - k \right)^2 + C_2 T_b \left(\frac{|f|}{B} - k \right) + T_b D_2 & kB < |f| \leq dB \\ A_3 T_b \left(\frac{|f|}{B} - d \right)^3 + B_3 T_b \left(\frac{|f|}{B} - d \right)^2 + C_3 T_b \left(\frac{|f|}{B} - d \right) + T_b D_3 & dB < |f| \leq B \\ A_4 T_b \left(\frac{|f|}{B} - 1 \right)^3 + B_4 T_b \left(\frac{|f|}{B} - 1 \right)^2 + C_4 T_b \left(\frac{|f|}{B} - 1 \right) + T_b D_4 & B < |f| \leq (2-d)B \\ A_5 T_b \left(\frac{|f|}{B} - 2 + d \right)^3 + B_5 T_b \left(\frac{|f|}{B} - 2 + d \right)^2 + C_5 T_b \left(\frac{|f|}{B} - 2 + d \right) + T_b D_5 & (2-d)B < |f| \leq (2-k)B \\ A_6 T_b \left(\frac{|f|}{B} - 2 + k \right)^3 + B_6 T_b \left(\frac{|f|}{B} - 2 + k \right)^2 + C_6 T_b \left(\frac{|f|}{B} - 2 + k \right) + T_b D_6 & (2-k)B < |f| \leq (1+a)B \\ 0 & |f| > (1+a)B \end{cases}$$

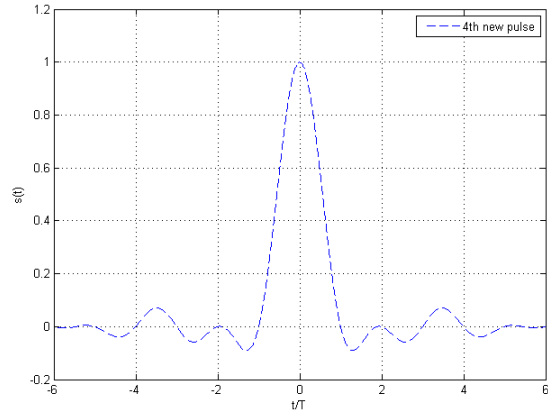
Οι υπολογισμοί μας ήταν αρκετά πολύ πολύπλοκοι αλλά τελικά έχουμε μια οχτάκλαδη συνάρτηση στο πεδίο των συχνοτήτων για τον νέο παλμό.

5.4.5 Ενδεικτικά διαγράμματα συνάρτησης μεταφοράς και κρουστικής απόκρισης

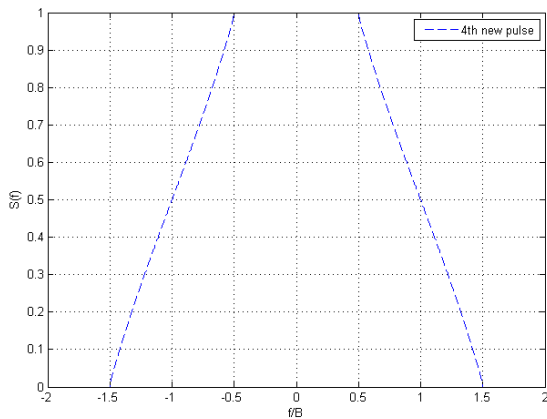
Ας δούμε τώρα κάποια ενδεικτικά διαγράμματα του παλμού που κατασκευάσαμε:



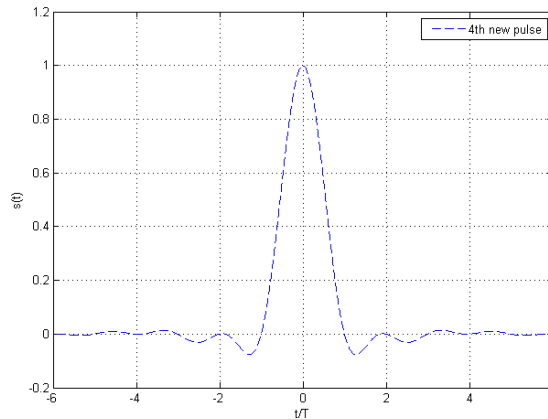
Διάγραμμα 86 (Για roll-off factor $\alpha=0.35$,
 $c_1=0.98$, $p_1=47$, $c_2=0.94$, $p_2=33$)



Διάγραμμα 87 (Για roll-off factor $\alpha=0.35$,
 $c_1=0.98$, $p_1=47$, $c_2=0.94$, $p_2=33$)



Διάγραμμα 88 (Για roll-off factor $\alpha=0.5$,
 $c_1=0.98$, $p_1=47$, $c_2=0.96$, $p_2=32$)



Διάγραμμα 89 (Για roll-off factor $\alpha=0.5$,
 $c_1=0.98$, $p_1=47$, $c_2=0.96$, $p_2=32$)

5.4.6 Παρατηρήσεις

- Παρατηρούμε στα διαγράμματα της κρουστικής απόκρισης 87 και 89 ότι οι μηδενισμοί συμβαίνουν σε ακέραια πολλαπλάσια της περιόδου $T_b = 1$, όπως άλλωστε απαιτεί το θεώρημα του Nyquist. Η επιλογή των τιμών των παραμέτρων c_2 και p_2 έγινε τυχαία, και βλέπουμε πως αλλάζει μορφή ο παλμός που κατασκευάσαμε στα διαγράμματα 86, 87, 88, 89. Είναι λοιπόν πολύ σημαντικό να γνωρίζουμε τις βέλτιστες τιμές των παραμέτρων c_2 και p_2 και αυτό είναι ένα πρόβλημα που θα μας απασχολήσει πιο κάτω.
- Αν και φαίνεται χαοτική η συγκεκριμένη η συνάρτηση μεταφοράς του νέου παλμού καθώς αποτελείται από πολλές παραμέτρους, στην πραγματικότητα οι παράμετροι c_1 και k που φαίνονται στο διάγραμμα 85 έχουν ήδη προσδιοριστεί όταν κατασκευάσαμε τον βέλτιστο

τρίτο παλμό , όπου εκεί καταφέραμε να σταθεροποιήσουμε και να προσδιορίσαμε αυτές τις παραμέτρους ώστε να έχουμε την βέλτιστη λύση. Άρα οι μόνοι παράμετροι που είναι άγνωστοι προς το παρόν για εμάς είναι η παράμετρος p_2 και η παράμετρος c_2 .

- Η τετμημένη d ουσιαστικά εμπεριέχει μέσα της την παράμετρο p_2 , όπου τελικά στόχος μας θα είναι να την προσδιορίσουμε και ταυτόχρονα να εντοπίσουμε και την τιμή της παραμέτρου c_2 έτσι ώστε να έχουμε την μικρότερη δυνατή πιθανότητα στο σύστημα μας.
- Ορίσαμε την τετμημένη d σύμφωνα με δική μας επιλογή έτσι ώστε να κινείται ανάμεσα στις τετμημένη k και στη μονάδα και με συγκεκριμένο βήμα. Φυσικά ανάλογα με την υπολογιστική μας ισχύ μπορούμε να αλλάζουμε το βήμα μας και να έχουμε έτσι μεγαλύτερη ακρίβεια.

5.4.7 Υπολογισμός πιθανότητας σφάλματος υπό την επίδραση jitter

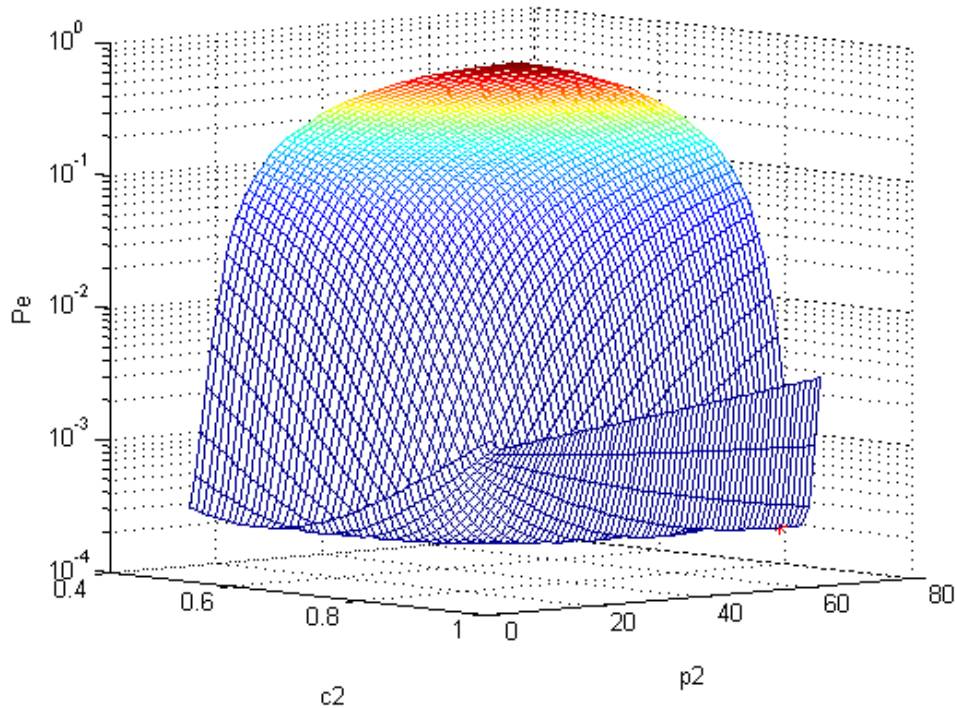
Ας περάσουμε τώρα στον υπολογισμό της πιθανότητα σφάλματος, κρατώντας πάντα τα ίδια δεδομένα με όλους τους υπόλοιπους παλμούς που κατασκευάσαμε στην προσομοίωσή μας, όλα τα αποτελέσματα της προσομοίωσης βρίσκονται αναλυτικά στο παράρτημα.

Πίνακας 12

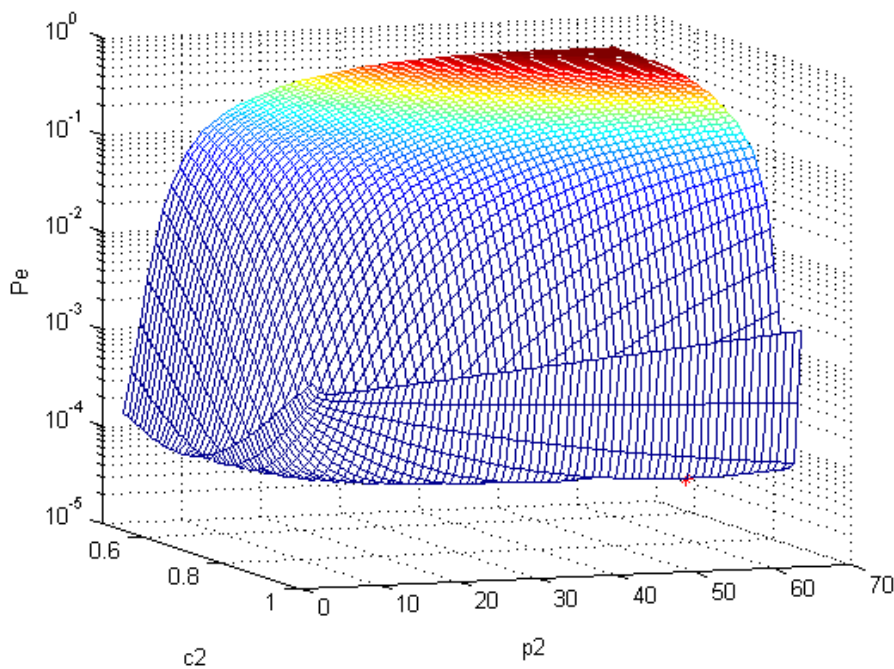
PULSES	t/T_B	± 0.05	± 0.1	± 0.2	± 0.25	± 0.3
$a = 0.25$						
Nyquist	P_e	8.2189e-08	2.8184e-06	9.7462e-04	6.7732e-03	2.5914e-02
4 th new		$c_2 = 0.95$ $p_2 = 46$ 5.0727e-08	$c_2 = 0.96$ $p_2 = 63$ 1.0210e-06	$c_2 = 0.96$ $p_2 = 60$ 2.6738e-04	$c_2 = 0.96$ $p_2 = 61$ 2.2490e-03	$c_2 = 0.96$ $p_2 = 64$ 1.1518e-02
$a = 0.35$						
Nyquist	P_e	5.9997e-08	1.3896e-06	3.9084e-04	3.1988e-03	1.5481e-02
4 th new	P_e	$c_2 = 0.96$ $p_2 = 64$ 3.4375e-08	$c_2 = 0.96$ $p_2 = 56$ 4.4026e-07	$c_2 = 0.96$ $p_2 = 51$ 8.0988e-05	$c_2 = 0.96$ $p_2 = 51$ 7.5368e-04	$c_2 = 0.96$ $p_2 = 53$ 4.8198e-03
$a = 0.5$						
Nyquist	P_e	3.9723e-08	5.4890e-07	1.0217e-04	9.4694e-04	0.6007e-02
4 th new	P_e	$c_2 = 0.96$ $p_2 = 57$	$c_2 = 0.96$ $p_2 = 51$	$c_2 = 0.68$ $p_2 = 2$	$c_2 = 0.69$ $p_2 = 2$	$c_2 = 0.69$ $p_2 = 2$

		2.1559e-08	1.5768e-07	1.8078e-05	1.7579e-04	1.4028e-03
		$a = 0.75$				
Nyquist		2.2777e-08	1.5761e-07	1.5346e-05	1.4907e-04	0.1231e-02
4th new	P_e	$c_2 = 0.68$	$c_2 = 0.69$	$c_2 = 0.72$	$c_2 = 0.8$	$c_2 = 0.81$
		$p_2 = 2$	$p_2 = 2$	$p_2 = 2$	$p_2 = 3$	$p_2 = 3$
		1.3418e-08	4.1660e-08	2.8406e-06	3.4989e-05	4.0947e-04
		$a = 1$				
Nyquist		1.5281e-08	5.8720e-08	3.6543e-06	3.9247e-05	0.419e-03
4th new	P_e	$c_2 = 0.97$	$c_2 = 0.97$	$c_2 = 0.89$	$c_2 = 0.85$	$c_2 = 0.86$
		$p_2 = 50$	$p_2 = 52$	$p_2 = 6$	$p_2 = 4$	$p_2 = 4$
		1.2302e-08	2.9498e-08	1.2935e-06	1.7208e-05	2.3959e-04

Ενδεικτικά παραθέτουμε δύο από τα διαγράμματα με τα οποία έγινε η βέλτιστη επιλογή των τιμών των παραμέτρων c_2 και p_2 του πίνακα 12. Οι βέλτιστες τιμές σημειώνονται με κόκκινο αστερίσκο, όλα τα διαγράμματα βρίσκονται στο παράρτημα 3:



Διάγραμμα 90 (Για roll-off factor $\alpha=0.25$ και λόγο $t/T_B = 0.2$)



Διάγραμμα 91 (Για roll-off factor $\alpha=0.35$ και λόγο $t/T_B = 0.2$)

Παρατηρούμε από τον πίνακα 12 πως ο νέος παλμός που κατασκευάσαμε είναι αρκετά βελτιωμένος σε σχέση με τον προηγούμενο νέο παλμό του πίνακα 10 για όλες τις τιμές του roll-off factor a εκτός από την περίπτωση όπου $a = 1$, γιατί συμβαίνει όμως αυτό;

Η απάντηση στο παραπάνω ερώτημα έχει σχέση με τις προσεγγίσεις που κάναμε κατά την επιλογή των βέλτιστων τιμών των παραμέτρων c_1 , p_1 κατά την κατασκευή του τρίτου τελικού βέλτιστου παλμού. Καθώς επιλέξαμε μόνο ένα ζευγάρι τιμών για τις παραμέτρους c_1 , p_1 για κάθε τιμή του roll-off factor a και του λόγου t/T_B , "απομακρυνθήκαμε" από τις βέλτιστες αρχικές τιμές που είχαν οι παράμετροι στον πίνακα 10. Δεχτήκαμε δηλαδή μια μέση λύση για την επιλογή των παραμέτρων c_1 , p_1 , και αυτό έγινε για να δημιουργήσουμε ένα και μοναδικό βέλτιστο παλμό, τον τρίτο τελικό νέο παλμό, έχοντας έτσι ένα μικρό κόστος που προήλθε από την προσπάθειά μας να επιλέξουμε και να καταλήξουμε στον τρίτο νέο τελικό παλμό. Στην συνέχεια καθώς χρησιμοποιήσαμε για τον υπολογισμό των παραμέτρων c_2 , p_2 , για τον προσδιορισμό του τέταρτου νέου παλμού, τις τιμές των παραμέτρων c_1 , p_1 , που είχαμε ήδη επιλέξει "μεταφέρθηκε" και το "κόστος" της επιλογής των c_1 , p_1 που είχαμε από την δημιουργία του τρίτου νέου τελικού παλμού. Έτσι λοιπόν το "κόστος" αυτό μας δημιούργησε το πρόβλημα ότι ο τέταρτος νέος παλμός

υστερεί σε σχέση με τον τρίτο νέο παλμό για roll-off factor $a=1$. Πρακτικά όμως καθώς δεν χρησιμοποιείται η τιμή 1 για το roll-off factor, είμαστε κερδισμένοι καθώς κατασκευάσαμε ένα βελτιωμένο φίλτρο, το τέταρτο νέο φίλτρο.

5.4.8 Βέλτιστη συνάρτηση μεταφοράς του νέου παλμού

Θα πρέπει και εδώ να απαλλαγούμε από τις παραμέτρους c_2 και p_2 και να προσδιορίσουμε τις βέλτιστες τιμές γι' αυτές, όπως κάναμε και στην κατασκευή του τρίτου νέου βέλτιστου παλμού.

Ύστερα από μελέτη των αποτελεσμάτων του πίνακα 12 επιλέγουμε τις παρακάτω τιμές για τις παραμέτρους: $p_2 = 37$ και $c_2 = 0.95$.

Η επιλογή των βέλτιστων τιμών των παραμέτρων p_1 και c_1 αυτή την φορά έγινε χωρίς να υπολογίσουμε την μέση τιμή των τιμών ανά γραμμή και στην συνέχεια να εισάγουμε τα βάρη και να κάνουμε τους υπολογισμούς μας όπως και για την περίπτωση του τρίτου βέλτιστου παλμού, καθώς επειδή θέλαμε ήταν αδύνατον αυτή η μέθοδος στην συγκεκριμένη περίπτωση να μας δώσει τη μέγιστη δυνατή ακρίβεια. Έτσι αρκεστήκαμε στο να μελετήσουμε προσεκτικά τα αποτελέσματα του πίνακα 12 και λαμβάνοντας υπόψην όλες τις πιθανότητες και μελετώντας τα αποτελέσματα του παραρτήματος 3 για κάθε τιμή της παραμέτρου c_2 από το 0.51 έως και το 0.97 (καθώς $c_2 < c_1 = 0.98$) και για κάθε τιμή της παραμέτρου p_2 από το 2 έως και το 64.

Καταλήγουμε λοιπόν σε μία τελική οχτάκλαδη συνάρτηση που περιγράφει τον νέο μας παλμό στο πεδίο των συχνοτήτων.

Μετά από αντικατάσταση των παραμέτρων $p_2 = 37$ και $c_2 = 0.95$ στις σχέσεις (5.94), (5.95) και (5.98) έως και (5.21) έχουμε:

$$A_1 = -\frac{22599256233}{225179200a^3}, \quad B_1 = 0, \quad C_1 = -\frac{201437911}{225179200a}, \quad D_1 = 1$$

$$A_2 = \frac{11267932304299}{119119796800a^3}, \quad B_2 = -\frac{1442505717}{225179200a^2}, \quad C_2 = -\frac{116064761}{112589600a}, \quad D_2 = 0.98$$

$$A_3 = -\frac{660779510863}{1715325073920a^3}, \quad B_3 = \frac{1139930151}{1035824320a^2}, \quad C_3 = -\frac{1146659}{979040a}, \quad D_3 = 0.95$$

$$A_4 = -\frac{660779510863}{1715325073920a^3}, \quad B_4 = 0, \quad C_4 = -\frac{2774833}{22517920a}, \quad D_4 = \frac{1}{2}$$

$$A_5 = \frac{11267932304299}{119119796800a^3}, \quad B_5 = -\frac{1139930151}{1035824320a^2}, \quad C_5 = -\frac{1146659}{979040a}, \quad D_5 = 0.05$$

$$A_6 = -\frac{22599256233}{225179200a^3}, \quad B_6 = \frac{1442505717}{225179200a^2}, \quad C_6 = -\frac{116064761}{112589600a}, \quad D_6 = 0.02$$

Άρα η συνάρτηση του παλμού μας έχει μορφή:

$$S_4(f) = \begin{cases} 1 & 0 < |f| < (1-a)B \\ A_1 T_b \left(\frac{|f|}{B} - 1 + a \right)^3 + B_1 T_b \left(\frac{|f|}{B} - 1 + a \right)^2 + C_1 T_b \left(\frac{|f|}{B} - 1 + a \right) + T_b D_1 & (1-a)B \leq |f| \leq \left(1 - \frac{46a}{47} \right) B \\ A_2 T_b \left(\frac{|f|}{B} - 1 + \frac{46a}{47} \right)^3 + B_2 T_b \left(\frac{|f|}{B} - 1 + \frac{46a}{47} \right)^2 + C_2 T_b \left(\frac{|f|}{B} - 1 + \frac{46a}{47} \right) + T_b D_2 & \left(1 - \frac{46a}{47} \right) B < |f| \leq \left(1 - \frac{1656a}{1739} \right) B \\ A_3 T_b \left(\frac{|f|}{B} - 1 + \frac{1656a}{1739} \right)^3 + B_3 T_b \left(\frac{|f|}{B} - 1 + \frac{1656a}{1739} \right)^2 + C_3 T_b \left(\frac{|f|}{B} - 1 + \frac{1656a}{1739} \right) + T_b D_3 & \left(1 - \frac{1656a}{1739} \right) B < |f| \leq B \\ A_4 T_b \left(\frac{|f|}{B} - 1 \right)^3 + B_4 T_b \left(\frac{|f|}{B} - 1 \right)^2 + C_4 T_b \left(\frac{|f|}{B} - 1 \right) + T_b D_4 & B < |f| \leq \left(1 + \frac{1656a}{1739} \right) B \\ A_5 T_b \left(\frac{|f|}{B} - 1 - \frac{1656a}{1739} \right)^3 + B_5 T_b \left(\frac{|f|}{B} - 1 - \frac{1656a}{1739} \right)^2 + C_5 T_b \left(\frac{|f|}{B} - 1 - \frac{1656a}{1739} \right) + T_b D_5 & \left(1 + \frac{1656a}{1739} \right) B < |f| \leq \left(1 + \frac{46a}{47} \right) B \\ A_6 T_b \left(\frac{|f|}{B} - 1 - \frac{46a}{47} \right)^3 + B_6 T_b \left(\frac{|f|}{B} - 1 - \frac{46a}{47} \right)^2 + C_6 T_b \left(\frac{|f|}{B} - 1 - \frac{46a}{47} \right) + T_b D_6 & \left(1 + \frac{46a}{47} \right) B < |f| \leq (1+a)B \\ 0 & |f| > (1+a)B \end{cases}$$

όπου A_i, B_i, C_i, D_i με $i=1,2,3,4,5,6$, οι τιμές των συντελεστών μας που υπολογίσαμε για $c_1 = 0.98$, $p_1 = 47$, $c_2 = 0.95$, $p_2 = 37$ στην υποενότητα 5.4.7.

5.4.9 Πιθανότητα σφάλματος βέλτιστου παλμού υπό την επίδραση jitter

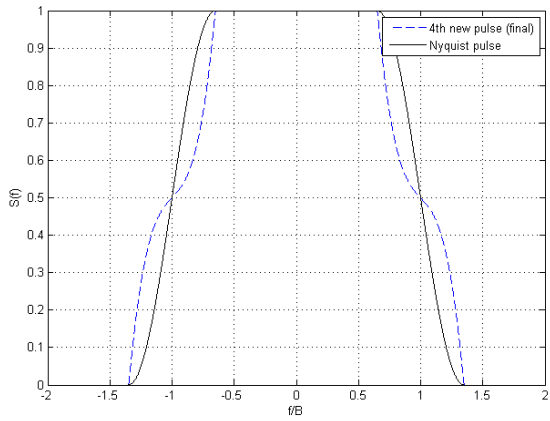
Ο παρακάτω πίνακας 13 δείχνει τα αποτελέσματα των πιθανοτήτων σφάλματος υπό την επίδραση του φαινομένου jitter συγκριτικά με τον παλμό Nyquist.

Πίνακας 13

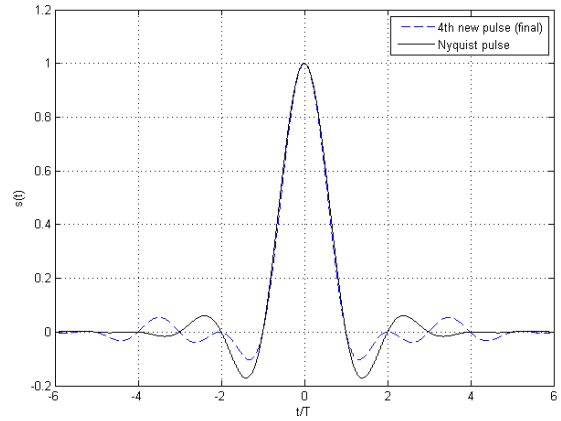
PULSES	t / T_B	± 0.05	± 0.1	± 0.2	± 0.25	± 0.3
$a = 0.25$						
Nyquist	P_e	8.2189e-08	2.8184e-06	9.7462e-04	6.7732e-03	2.5914e-02
4 th new final		5.1719e-08	1.0348e-06	2.6891e-04	2.2677e-03	1.1689e-02
$a = 0.35$						
Nyquist	P_e	5.9997e-08	1.3896e-06	3.9084e-04	3.1988e-03	1.5481e-02
4 th new final		3.4687e-08	4.4086e-07	8.2768e-05	7.6836e-04	4.8650e-03
$a = 0.5$						
Nyquist	P_e	3.9723e-08	5.4890e-07	1.0217e-04	9.4694e-04	0.6007e-02
4 th new final		2.1577e-08	1.6014e-07	2.2022e-05	2.2814e-04	1.8421e-03
$a = 0.75$						
Nyquist	P_e	2.2777e-08	1.5761e-07	1.5346e-05	1.4907e-04	0.1231e-02
4 th new final		1.4705e-08	5.5768e-08	6.5655e-06	1.0423e-04	1.3063e-03
$a = 1$						
Nyquist	P_e	1.5281e-08	5.8720e-08	3.6543e-06	3.9247e-05	0.419e-03
4 th new final		2.0924e-08	1.3520e-07	1.2230e-05	1.0960e-04	9.5613e-04

5.4.10 Ενδεικτικά διαγράμματα συνάρτησης μεταφοράς, συνάρτησης κρουστικής απόκρισης καθώς και διαγράμματα οφθαλμού

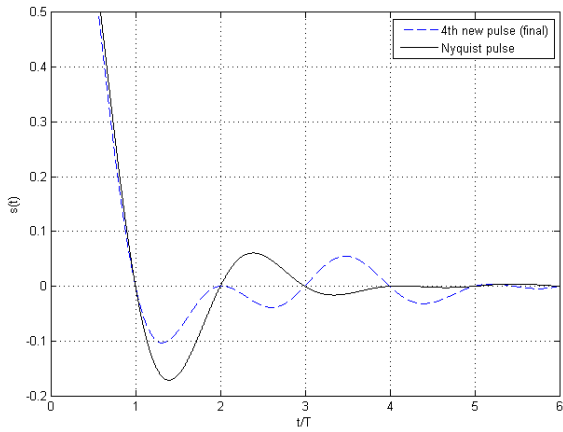
Ενδεικτικά παραθέτουμε τα παρακάτω διαγράμματα του παλμού μας στο πεδίο των συχνοτήτων και του χρόνου συγκριτικά με τον Nyquist παλμό καθώς και τα αντίστοιχα διαγράμματα οφθαλμού.



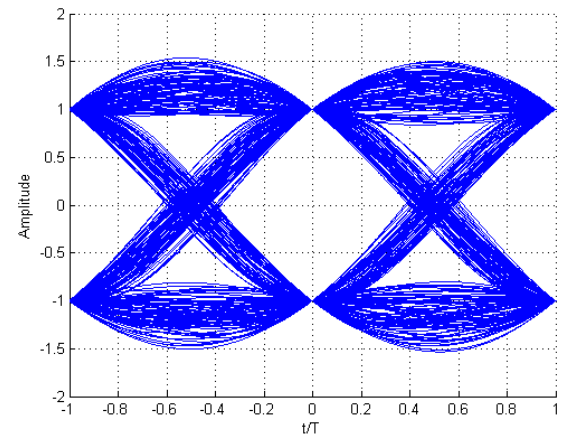
Διάγραμμα 92 (Για roll-off factor $\alpha=0.35$)



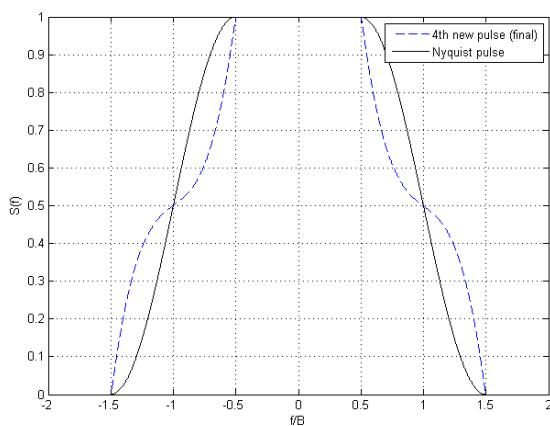
Διάγραμμα 93 (Για roll-off factor $\alpha=0.35$)



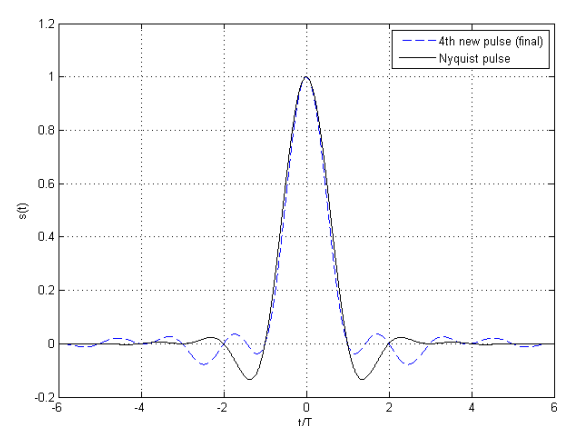
Διάγραμμα 94 (Για roll-off factor $\alpha=0.35$)



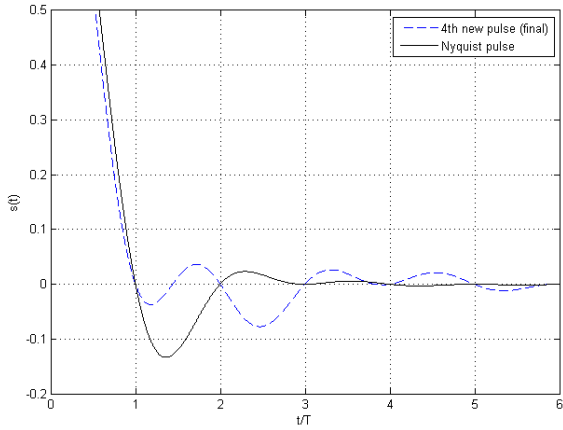
Διάγραμμα 95 (Για roll-off factor $\alpha=0.35$)



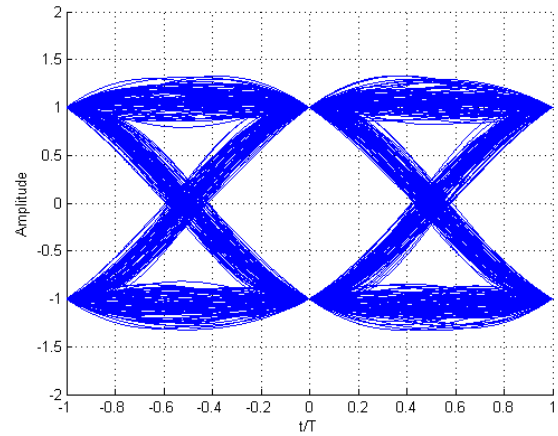
Διάγραμμα 96 (Για roll-off factor $\alpha=0.5$)



Διάγραμμα 97 (Για roll-off factor $\alpha=0.5$)



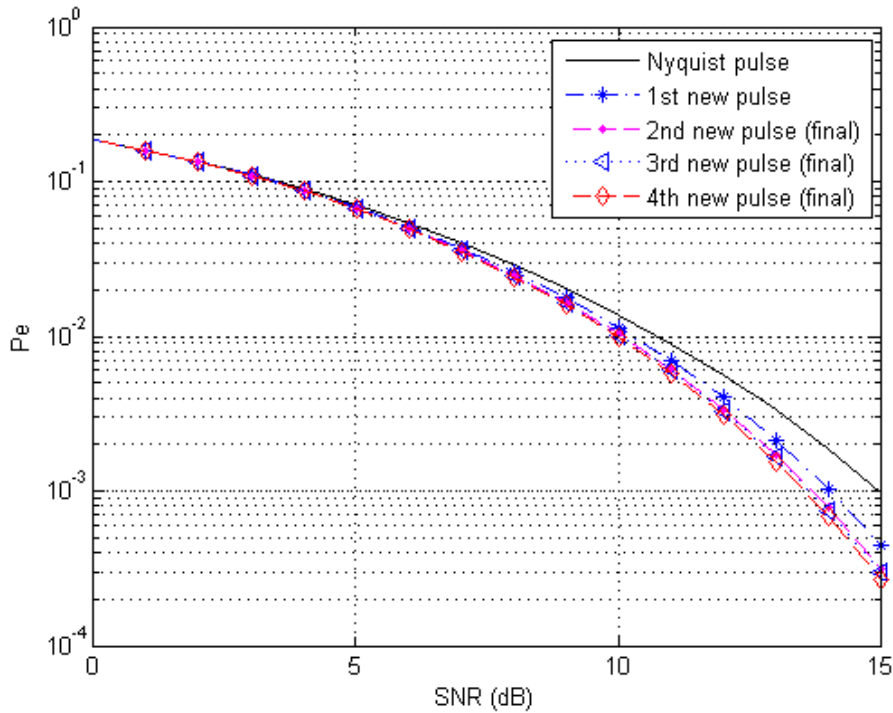
Διάγραμμα 98 (Για roll-off factor $\alpha=0.5$)



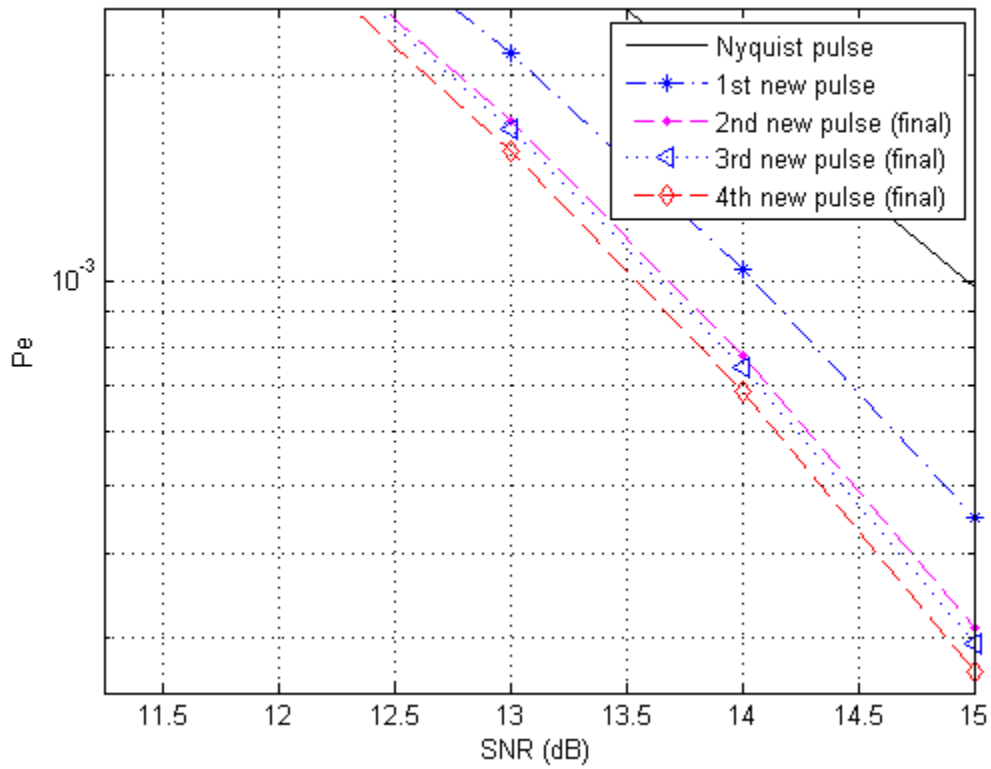
Διάγραμμα 99 (Για roll-off factor $\alpha=0.5$)

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε από τα διαγράμματα στο πεδίο του χρόνου οι μηδενισμοί συμβαίνουν σε ακέραια πολλαπλάσια της περιόδου $T_b = 1$, κάτι που πρέπει να ισχύει καθώς πρέπει να ικανοποιείται το θεώρημα του Nyquist.

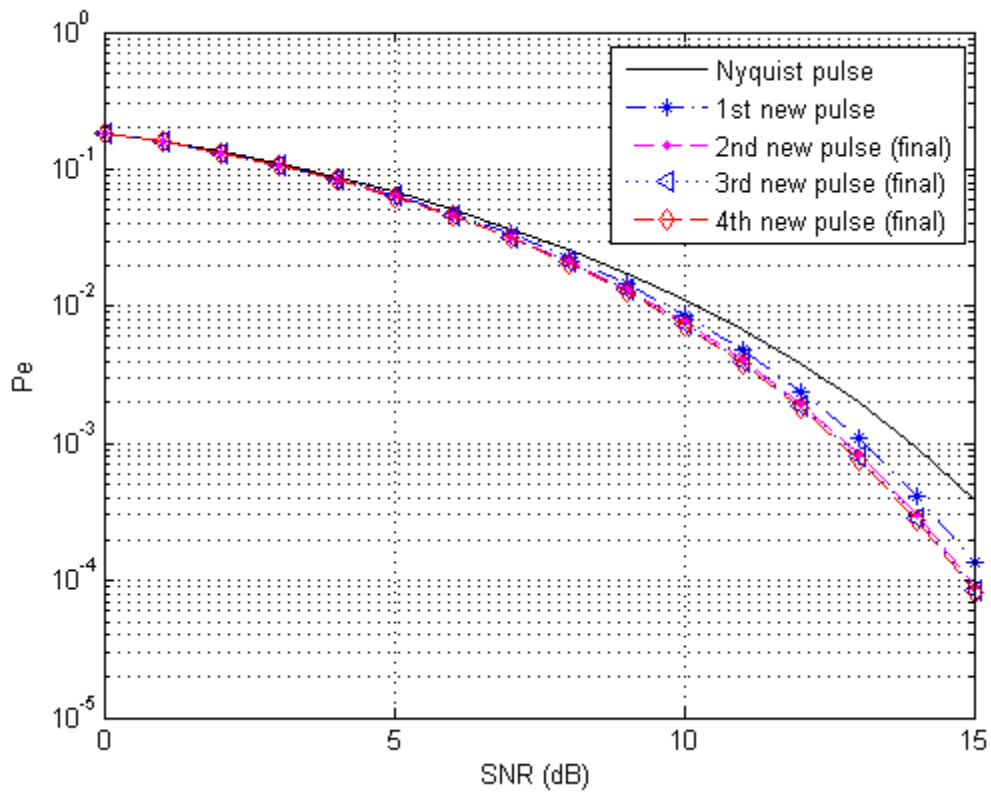
5.4.11 Συνοπτικά διαγράμματα πιθανότητας σφάλματος σε σύγκριση με τον Nyquist παλμό



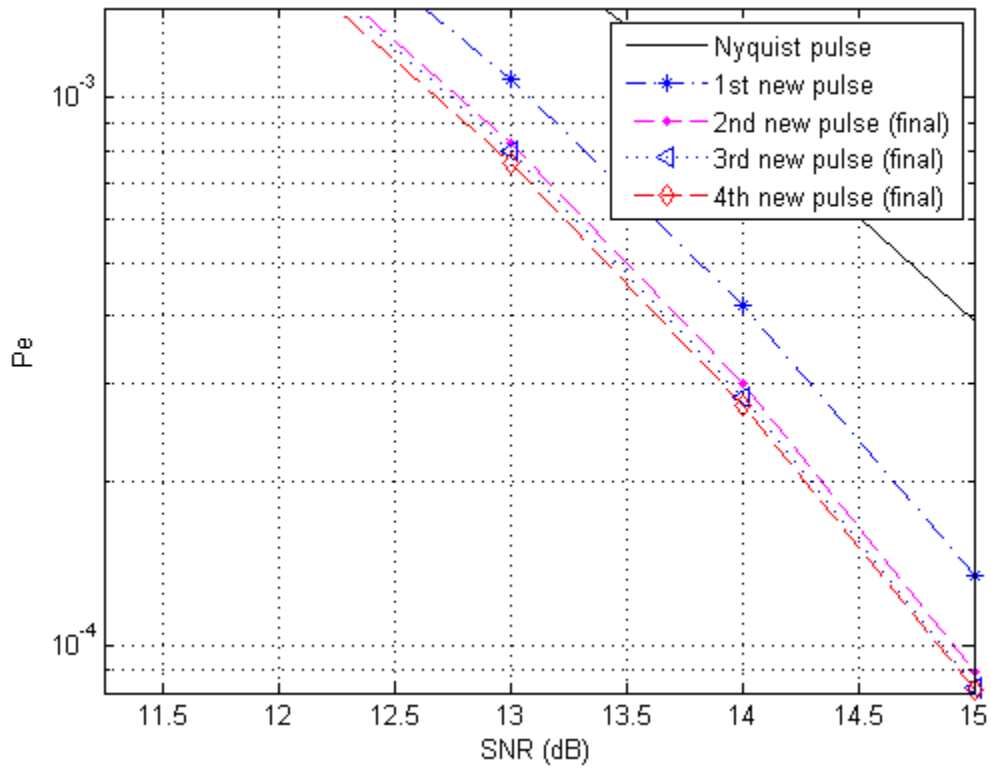
Διάγραμμα 100 (Για roll-off factor $\alpha=0.25$ και λόγο $t/T_b = 0.2$)



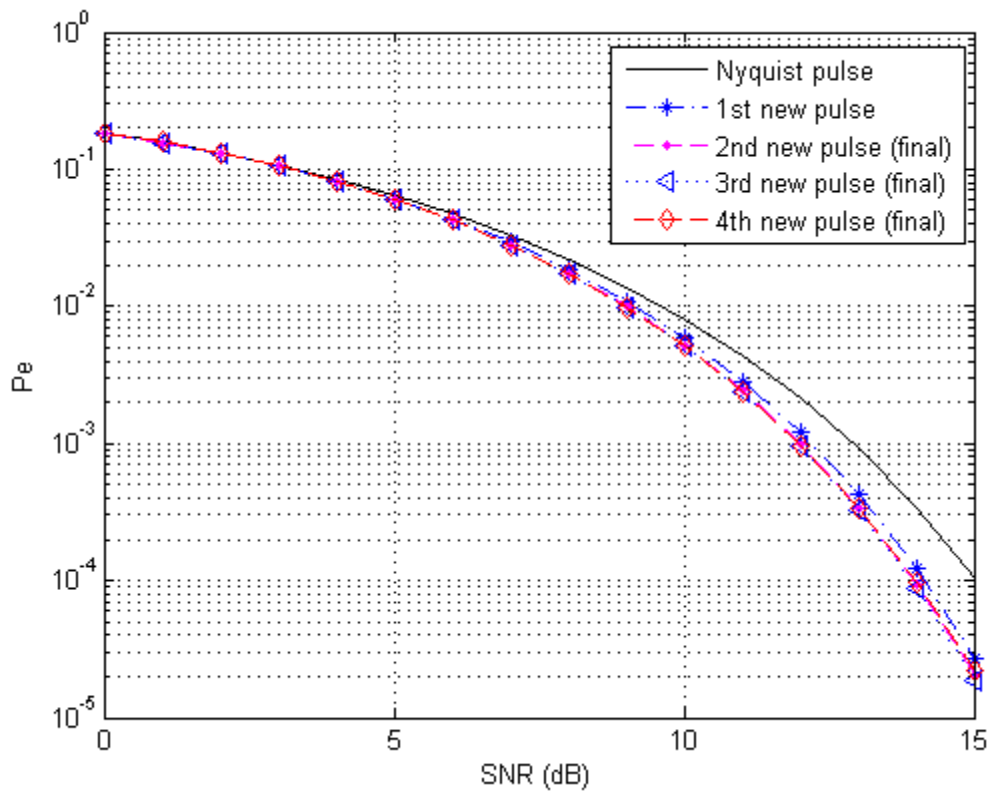
Διάγραμμα 101 (Για roll-off factor $\alpha=0.25$ και λόγο $t/T_b = 0.2$)



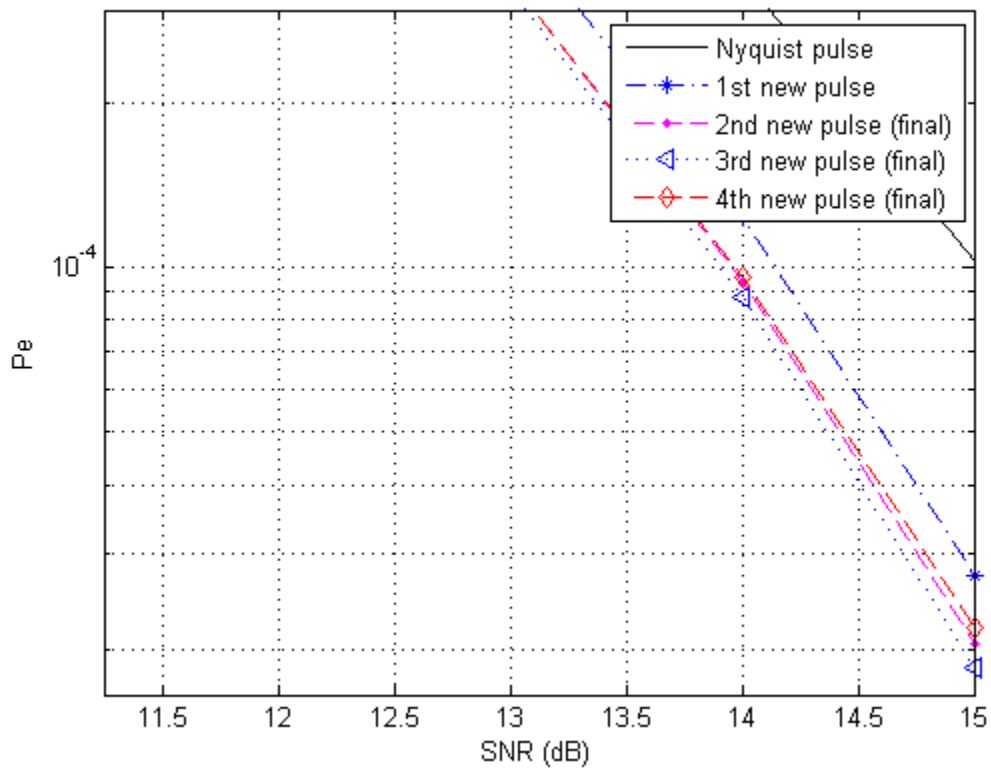
Διάγραμμα 102 (Για roll-off factor $\alpha=0.35$ και λόγο $t/T_b = 0.2$)



Διάγραμμα 103 (Για roll-off factor $\alpha=0.35$ και λόγο $t/T_B = 0.2$)



Διάγραμμα 104 (Για roll-off factor $\alpha=0.5$ και λόγο $t/T_B = 0.2$)



Διάγραμμα 105 (Για roll-off factor $\alpha=0.5$ και λόγο $t/T_B = 0.2$)

Όλα τα διαγράμματα που δείχνουν την πιθανότητα σφάλματος και των τεσσάρων τελικών παλμών που κατασκευάστηκαν σε σχέση με αυτήν του Nyquist παλμού βρίσκονται στο παράρτημα 4.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Γενικά Συμπεράσματα και Μελλοντικοί Στόχοι

6.1 Γενικά συμπεράσματα

• Ο παρακάτω πίνακας 14 δείχνει τα αποτελέσματα όλων των παλμών που κατασκευάσαμε στην εργασία αυτή συγκριτικά με τον Nyquist παλμό αλλά και μ'αυτούς των [2] , [3]:

- Πίνακας 14

PULSES	t/T_B	± 0.05	± 0.1	± 0.2	± 0.3
$a = 0.25$					
Nyquist	P_e	8.2189e-08	2.8184e-06	9.7462e-04	2.5914e-02
[2]		5.8117e-08	1.2980e-06	3.5678e-04	1.4524e-02
[3] fsech		7.5579e-08	2.3337e-06	7.7201e-04	2.2982e-02
[3] fexp		5.8117e-08	1.2980e-06	3.5678e-04	1.4524e-02
[3] farsech		5.3996e-08	1.1011e-06	2.8405e-04	1.2496e-02
1 st new		6.3137e-08	1.5495e-06	4.5165e-04	1.6908e-02
2 nd new final		5.5096e-08	1.1649e-06	3.1035e-04	1.3113e-02
3 rd new final		5.4278e-08	1.1245e-06	2.9502e-04	1.2700e-02
4 th new final		5.1719e-08	1.0348e-06	2.6891e-04	1.1689e-02
$a = 0.35$					
Nyquist	P_e	5.9997e-08	1.3896e-06	3.9084e-04	1.5481e-02
[2]		3.9253e-08	5.4021e-07	1.0129e-04	0.5888e-02
[3] fsech		5.4002e-08	1.0944e-06	2.8000e-04	1.2471e-02
[3] fexp		3.9253e-08	5.4021e-07	1.0129e-04	5.8880e-03
[3] farsech		3.5970e-08	4.4580e-07	7.6203e-05	4.6950e-03
1 st new		4.3276e-08	6.619e-07	1.3481e-04	7.3886e-03
2 nd new final		3.7015e-08	4.8601e-07	8.9630e-05	5.2740e-03
3 rd new final		3.6335e-08	4.6483e-07	8.3493e-05	4.9958e-03
4 th new final		3.4687e-08	4.4086e-07	8.2768e-05	4.8650e-03
$a = 0.5$					
Nyquist	P_e	3.9723e-08	5.4890e-07	1.0217e-04	0.6007e-02
[2]		2.4134e-08	1.8580e-07	2.0878e-05	0.1577e-02

[3] fsech	3.4949e-08	4.1186e-07	6.6009e-05	4.2284e-03
[3] fexp	2.4134e-08	1.8580e-07	2.0878e-05	1.5772e-03
[3] farsech	2.1875e-08	1.4916e-07	1.5344e-05	1.2253e-03
1 st new	2.6904e-08	2.3016e-07	2.7318e-05	1.9936e-03
2 nd new final	2.2790e-08	1.7074e-07	2.0451e-05	1.5855e-03
3 rd new final	2.2284e-08	1.6121e-07	1.8611e-05	1.4661e-03
4 th new final	2.1577e-08	1.6014e-07	2.2022e-05	1.8421e-03

- Στην εργασία αυτή κατασκευάστηκαν τέσσερις νέοι παλμοί με οι οποίοι εμφανίζουν βελτιωμένη πιθανότητα σφάλματος υπό την παρουσία jitter σε σχέση με αυτή του παλμού Nyquist. Η διαδικασία που ακολουθήθηκε για την κατασκευή τους έχει ακόμα αρκετά περιθώρια βελτίωσης και εξαρτάται από την υπολογιστική μας ισχύ. Ας δούμε όμως τι εννοούμε με τον όρο "υπολογιστική ισχύ". Οι παράμετροι που χρησιμοποιήσαμε c_1 , c_2 ορίστηκαν σύμφωνα με δική μας επιλογή. Θα μπορούσαμε για τις παραμέτρους c_1 και c_2 να χρησιμοποιήσουμε ακρίβεια τριών ή και παραπάνω δεκαδικών ψηφίων και όχι δύο όπως επιλέξαμε. Όμως αυτό θα σήμαινε και περισσότερες αριθμητικές πράξεις κάτι το οποίο φυσικά εξαρτάται από τις επεξεργαστικές δυνατότητες του υπολογιστή που διαθέτουμε. Έτσι λοιπόν επιλέξαμε να ορίσουμε με τέτοιο τρόπο όλες τις παραμέτρους ώστε να είναι ανεκτή η εκτέλεση όλων των απαιτούμενων πράξεων από τον υπολογιστή μας.

Επίσης ορίσαμε $k = 1 - a + \frac{a}{p_1}$, με $p_1 \in \mathbb{N} - \{1\}$ και $d = k + \frac{1}{p_2}(1 - k)$, με $p_2 \in \mathbb{N} - \{1\}$, αλλά

δεν θα μας εμπόδιζε τίποτα να ορίσουμε τα k, d με διαφορετικό τρόπο συναρτήσει πάλι των p_1, p_2 .

Τα k, d είναι ουσιαστικά δύο συναρτήσεις που εξαρτώνται από τα p_1, p_2 αντίστοιχα και έτσι έχουμε θεωρητικά πάρα πολλές επιλογές στον τρόπο ορισμού τους.

Ας σταθούμε όμως σε μία πολύ σημαντική παρατήρηση που προκύπτει από τους πίνακες 10, 11, 12 και 13. Οι τιμές των p_1, p_2 βλέπουμε ότι είναι κατά κύριο λόγο αρκετά μεγαλύτερες του αριθμού 2 και πολύ περισσότερο για την κατασκευή των βέλτιστων παλμών τρία και τέσσερα επιλέξαμε τελικά $p_1 = 47$ και $p_2 = 37$. Η επιλογή αυτή σημαίνει πως τα σημεία με τετημημένες τα k, d και $2 - k$ και $2 - d$ αντίστοιχα, έχουν απομακρυνθεί αρκετά από τον αριθμό 1, δηλαδή το

- σημείο όπου $f = B$ ή $S(B) = \frac{1}{2}$, καθώς όσο αυξάνονται οι τιμές των p_1, p_2 , τότε $k \rightarrow 1-a$, $d \rightarrow k$ και $2-k \rightarrow 1+a$ και $2-d \rightarrow 2-k$ αντίστοιχα. Μπορούμε να παρατηρούμε ότι ο παλμός 2 του πίνακα 9 που προκύπτει αν $p_1 = 2$, καθώς τότε $k = 1 - \frac{a}{2}$ και $2-k = 1 + \frac{a}{2}$ που είναι οι τετμημένες των σημείων (x_2, y_2) και (x_4, y_4) του διαγράμματος 39. Βλέποντας τώρα τα αποτελέσματα του πίνακα 14, έχουμε ότι η βελτίωση που καταφέραμε στους επόμενους παλμούς που κατασκευάσαμε ήταν σημαντική. Γιατί όμως με το να απομακρυνόμαστε από το σημείο $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ η πιθανότητα σφάλματος γίνεται όλο και πιο μικρή; Πρακτικά δηλαδή η απομάκρυνση αυτή σημαίνει ότι σε μια περιοχή γύρω από το σημείο $\left(1, \frac{1}{2}\right)$, η καμπύλη της συνάρτησης μεταφοράς έχει την τάση να γίνεται ευθεία και η καμπυλότητά της να γίνεται μικρότερη.

Το ερώτημα αυτό που προκύπτει από την συγκεκριμένη παρατήρηση, και δεν μπορεί να είναι τυχαίο, τουλάχιστον σ'αυτήν την εργασία δεν θα απαντηθεί, ανοίγει όμως το δρόμο για μία επιπλέον μελέτη με στόχο την απάντηση αυτού του ερωτήματος.

- Με την εργασία αυτή δημιουργήσαμε όχι απλά νέους καλύτερους παλμούς από τον παλμό Nyquist, αλλά ολόκληρες οικογένειες παλμών που να εμφανίζουν βελτιωμένη πιθανότητα σφάλματος υπό την παρουσία jitter σε σχέση με τον Nyquist παλμό, χρησιμοποιώντας τις παραμέτρους c_1, p_1, c_2, p_2 .
- Επιλέξαμε για τον προσδιορισμό της συνάρτησης μεταφοράς των νέων παλμών πολυωνμικές συναρτήσεις τρίτου βαθμού γιατί είναι συναρτήσεις όπου μπορούμε εύκολα να εργαστούμε καθώς επειδή ο βαθμός τους είναι μικρός, οι υπολογισμοί των παραγώγων, των συντελεστών και γενικότερα όλων των στοιχείων που χρειάστηκαν, είχαν μικρή πολυπλοκότητα.
- Οι νέοι παλμοί που κατασκευάστηκαν υπερέχουν και αυτών που κατασκευάστηκαν στα [2], [3], όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε στα αποτελέσματα του πίνακα 14.

6.2 Μελλοντικοί στόχοι

Σαν μελλοντικός στόχος, βάσει της εργασίας αυτής, είναι να κατασκευάσουμε και νέους παλμούς ακόμα καλύτερους από αυτούς που κατασκευάσαμε μέχρι τώρα. Η κατασκευή αυτή θα μπορούσε να βασιστεί στις κατασκευές που πραγματοποιήσαμε στην εργασία αυτή και να εισάγουμε και $2n$, $n \in \mathbb{N}$ ακόμα σημεία συμμετρικά ως προς τη μονάδα, σταθεροποιώντας κάθε φορά τα δύο προηγούμενα σημεία, αυξάνοντας όμως και την πολυπλοκότητα των υπολογισμών καθώς για κάθε δύο σημεία που προσθέτουμε αυξάνεται και το μέγεθος του συστήματος της σχέσης (5.26) που θα πρέπει να επιλύσουμε.

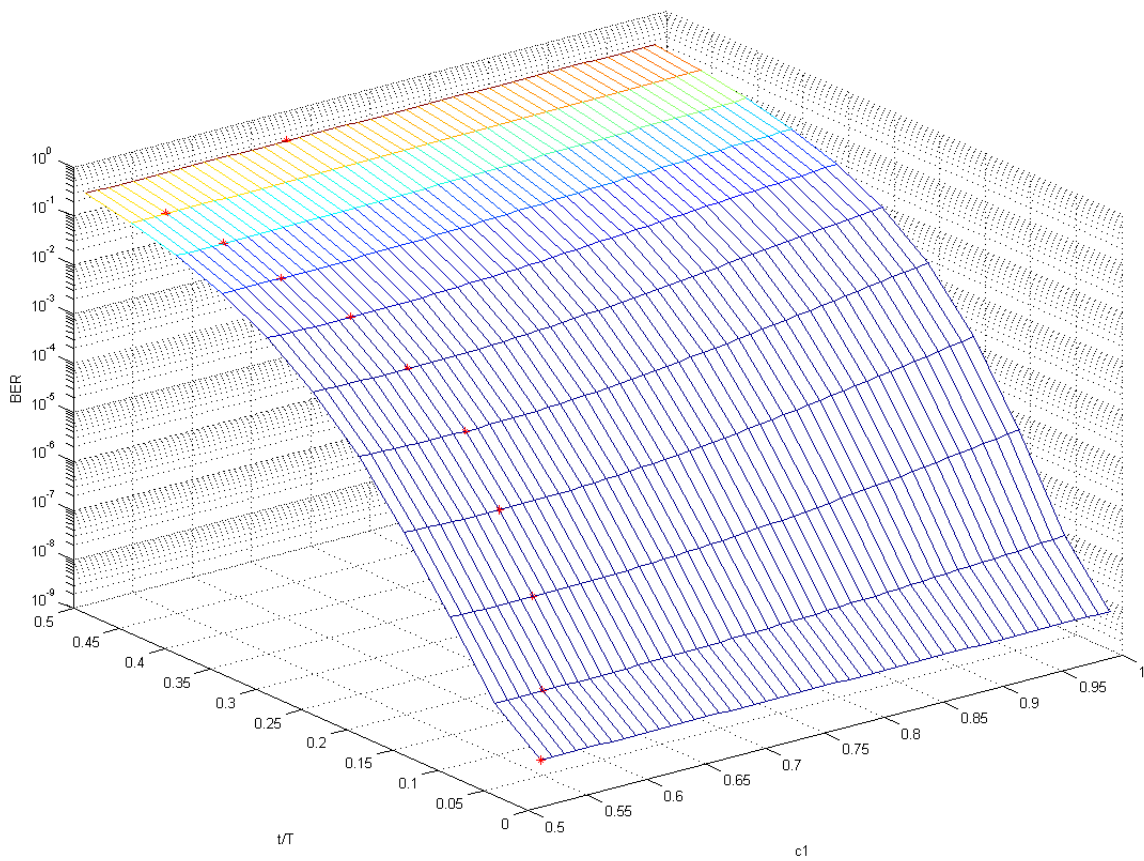
Επίσης θα μπορούσαμε αντί να χρησιμοποιήσουμε πολυωνυμικές συναρτήσεις τρίτου βαθμού για να προσδιορίσουμε την συνάρτηση μεταφοράς των νέων παλμών να χρησιμοποιήσουμε άλλου είδους συναρτήσεις, εκθετικές, λογαριθμικές, τριγωνομετρικές κλπ.. Αυτό που θα αλλάξει είναι ο τρόπος προσδιορισμού της συνάρτησης μεταφοράς, η πολυπλοκότητα των πράξεων καθώς και τα τελικά αποτελέσματα της πιθανότητας σφάλματος φυσικά.

Τέλος αξίζει να δούμε μελλοντικά τον τρόπο που μπορούν να υλοποιηθούν οι παλμοί που κατασκευάσαμε, το οποίο αποτελεί και έναν ακόμα από τους επόμενους στόχους μας.

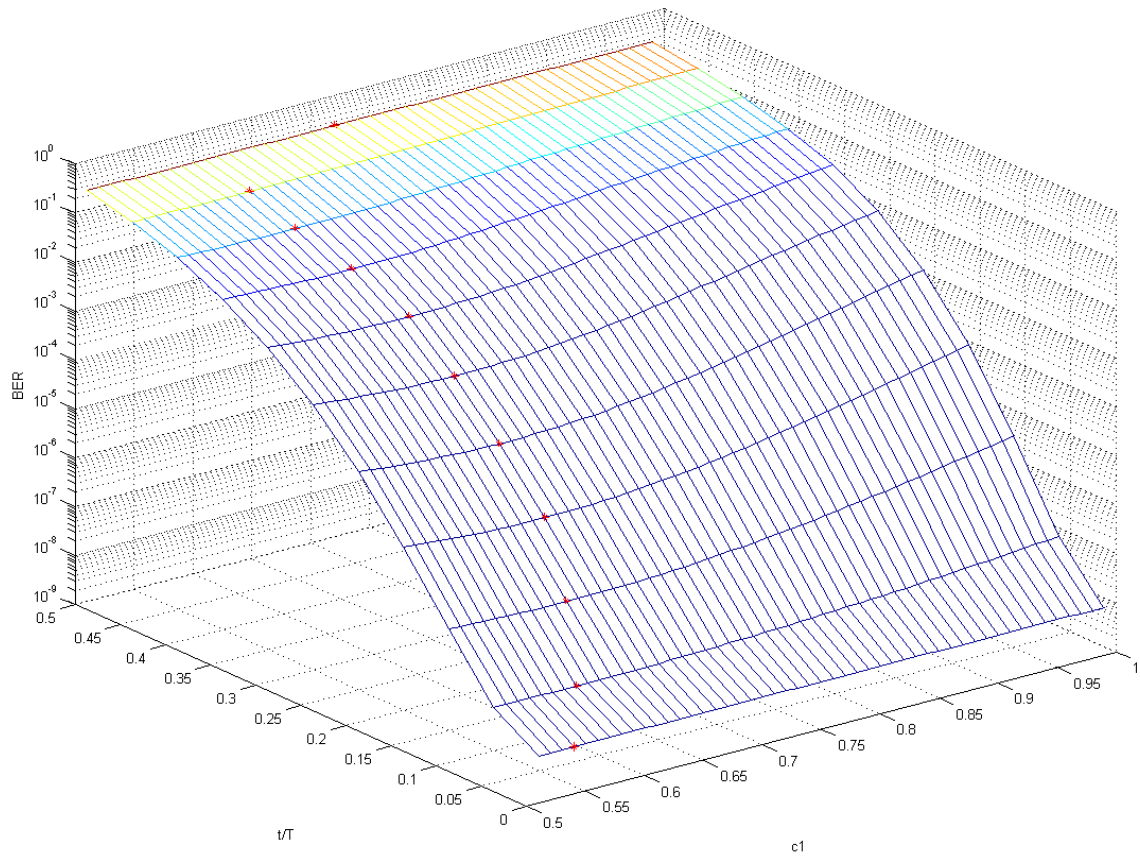
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1

Διαγράμματα βέλτιστης λύσης για τον δεύτερο νέο παλμό

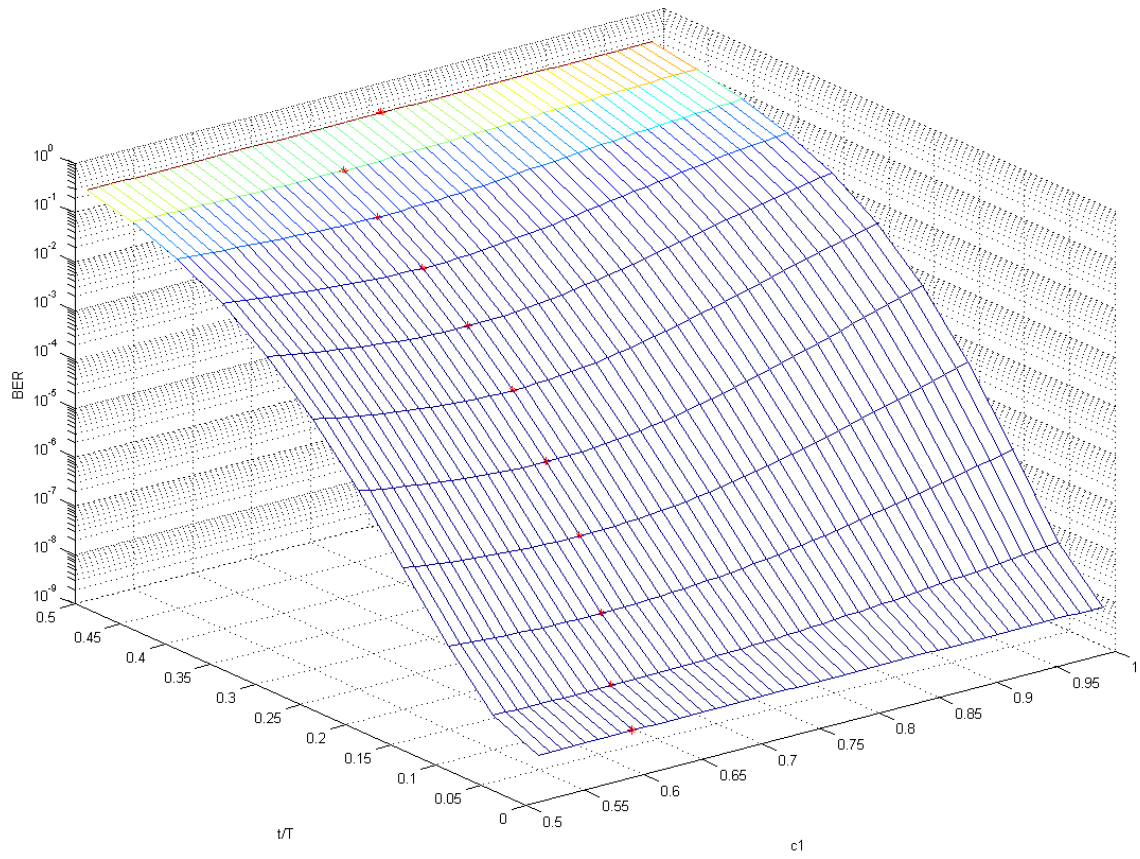
- Για roll-off factor ίσο με 0.25



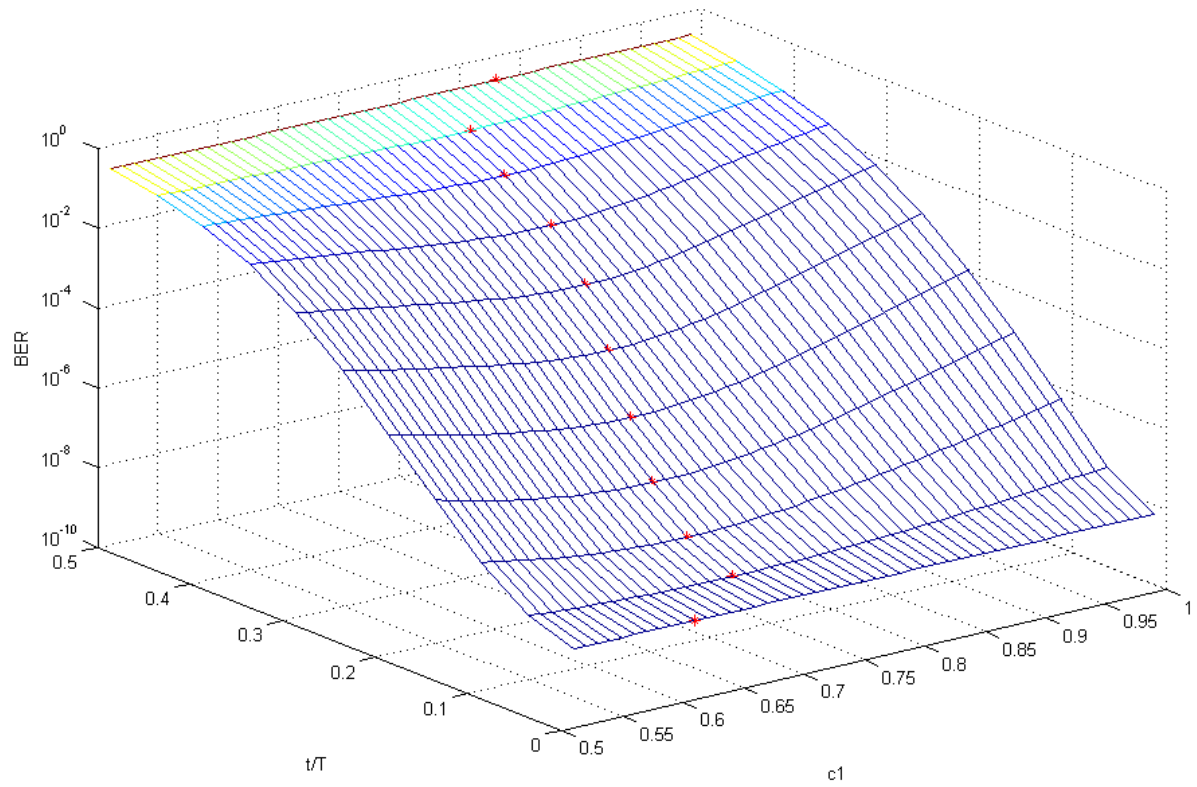
- Για roll-off factor ίσο με 0.35



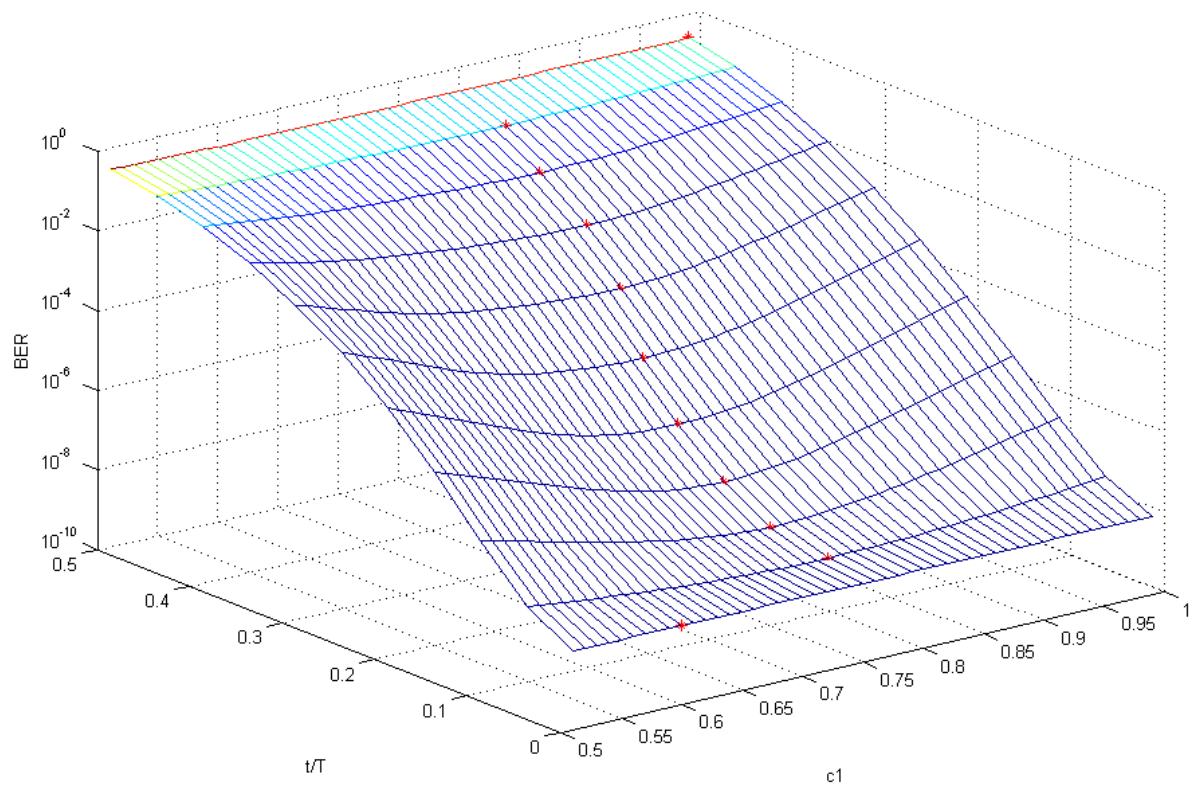
- Για roll-off factor ίσο με 0.5



- Για roll-off factor ίσο με 0.75



- Για roll-off factor ίσο με 1

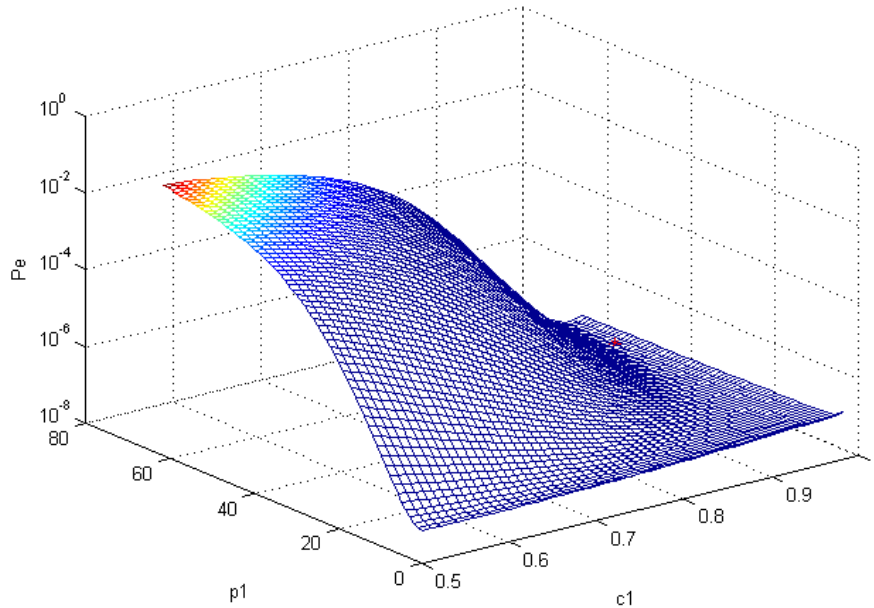


ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2

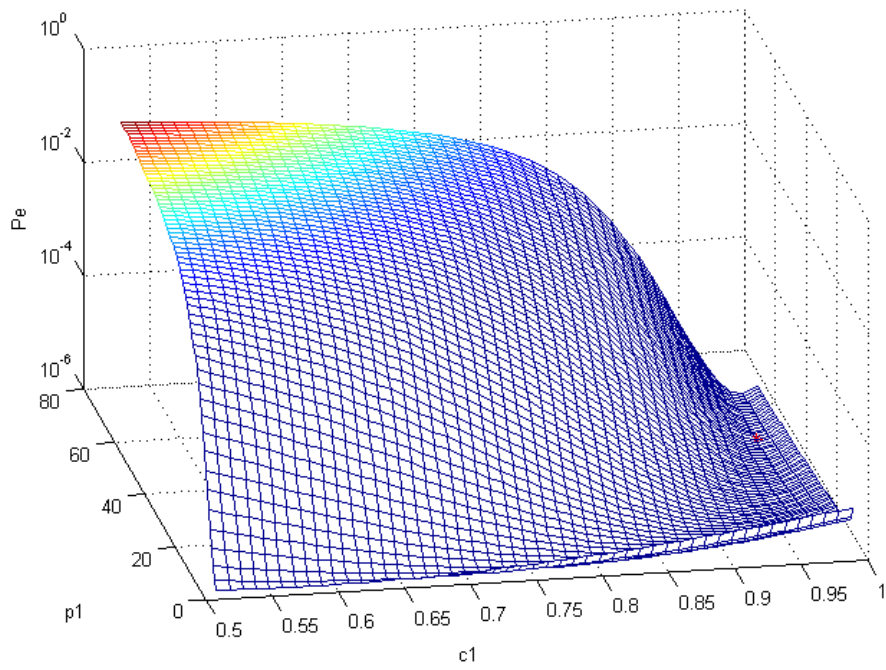
Διαγράμματα επιλογής βέλτιστων τιμών για τις παραμέτρους c_1 και p_1 για τον τρίτο νέο παλμό

- Για roll-off factor ίσο με 0.25

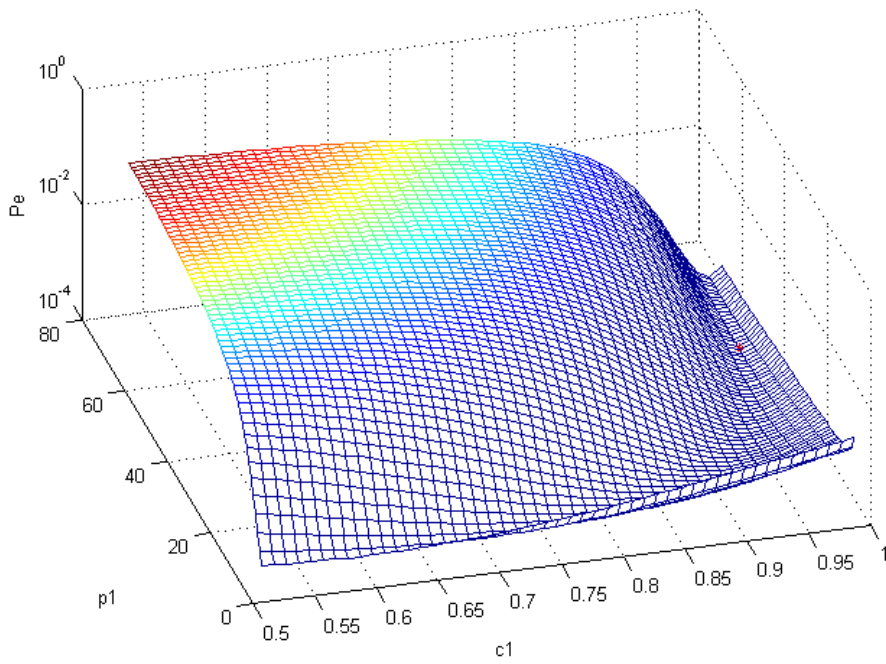
$$t/T_B = \pm 0.05$$



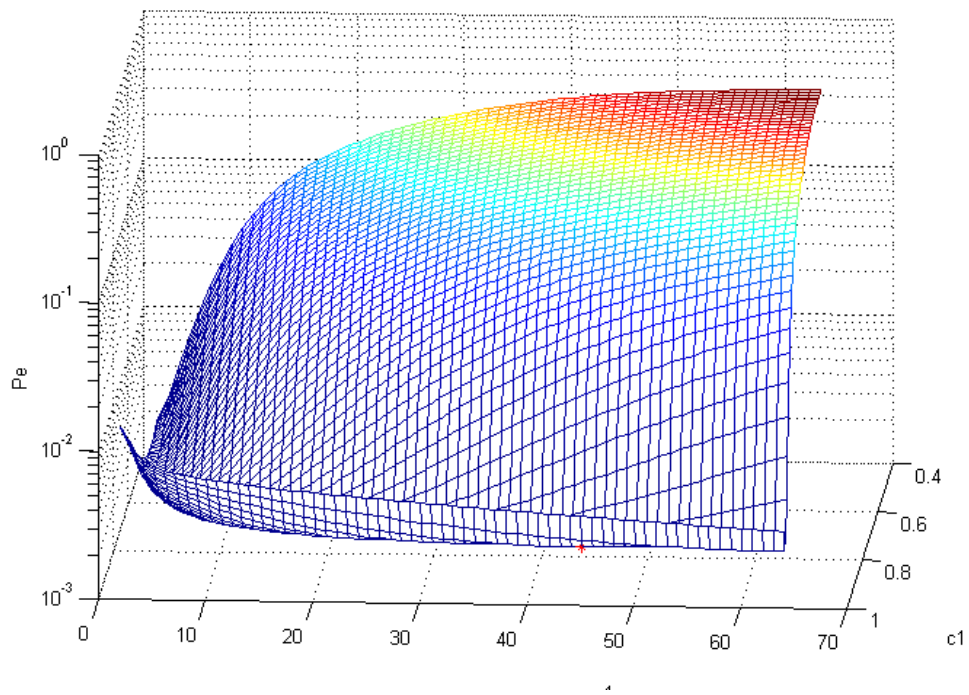
$$t/T_B = \pm 0.1$$



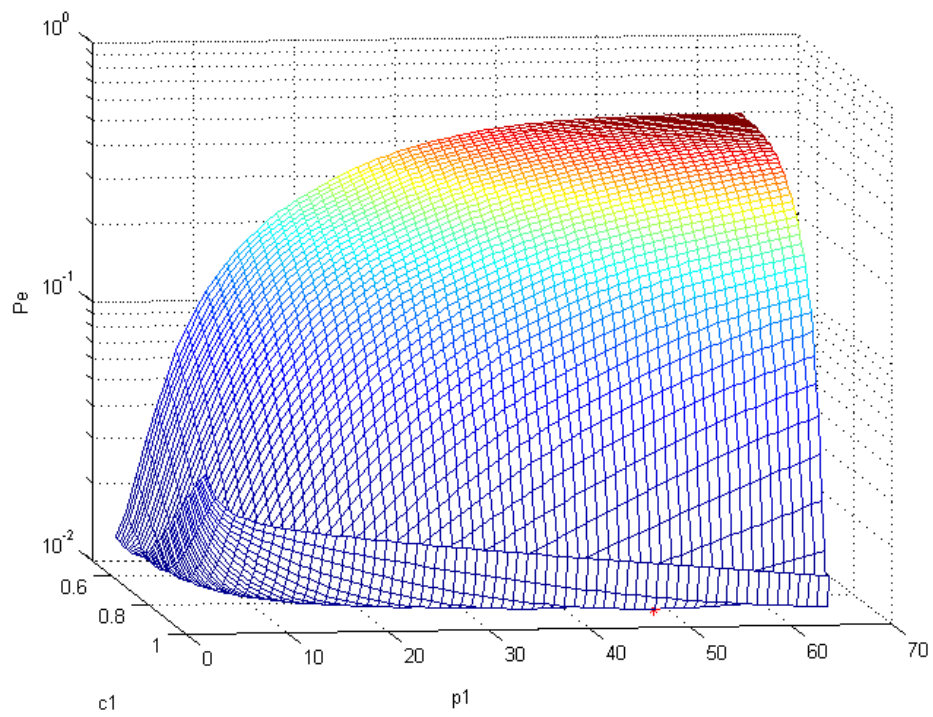
$$t/T_B = \pm 0.2$$



$$t/T_B = \pm 0.25$$

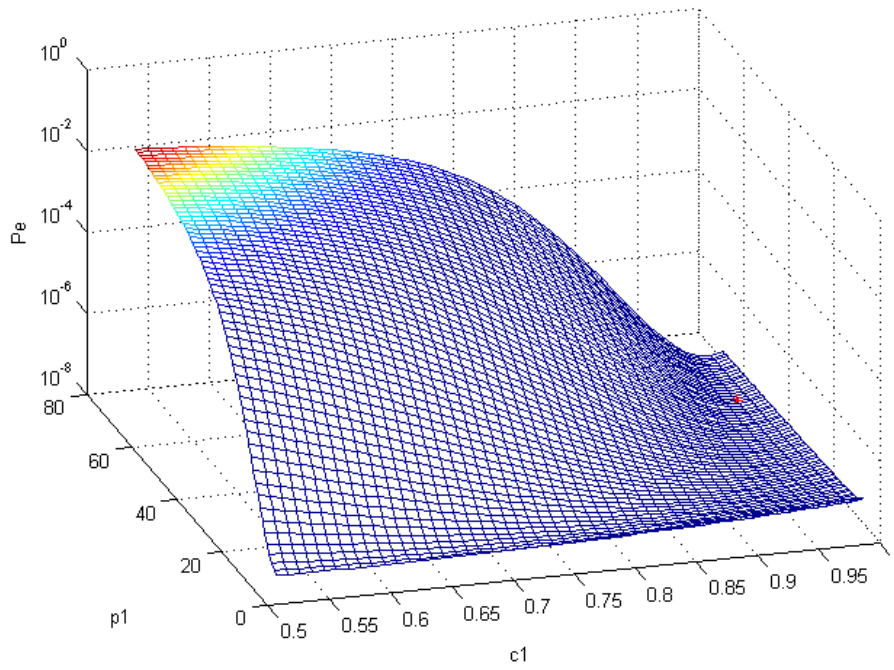


$$t/T_B = \pm 0.3$$

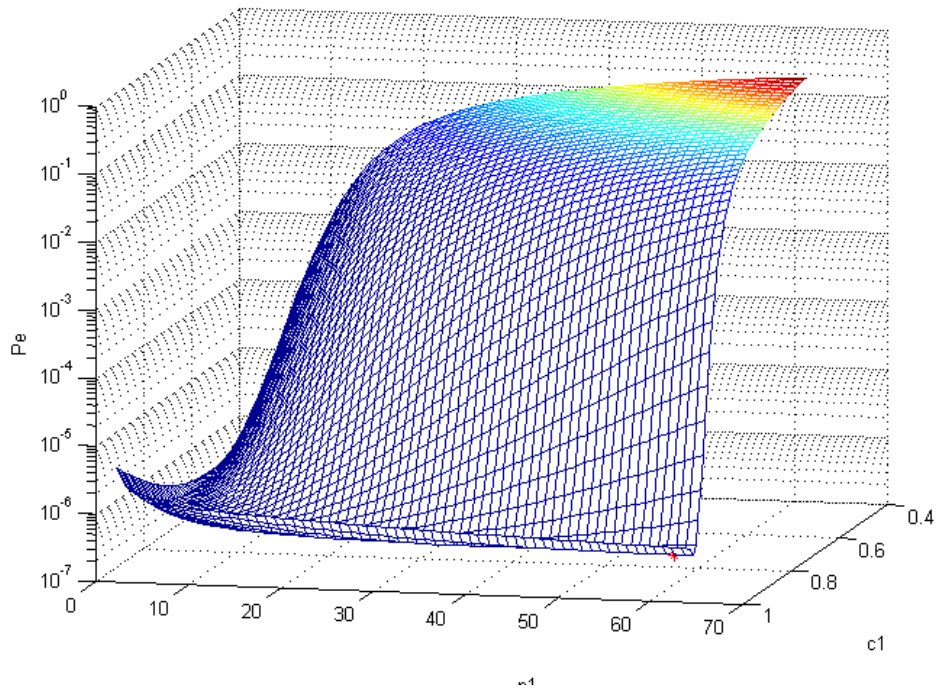


- Για roll-off factor ίσο με 0.35

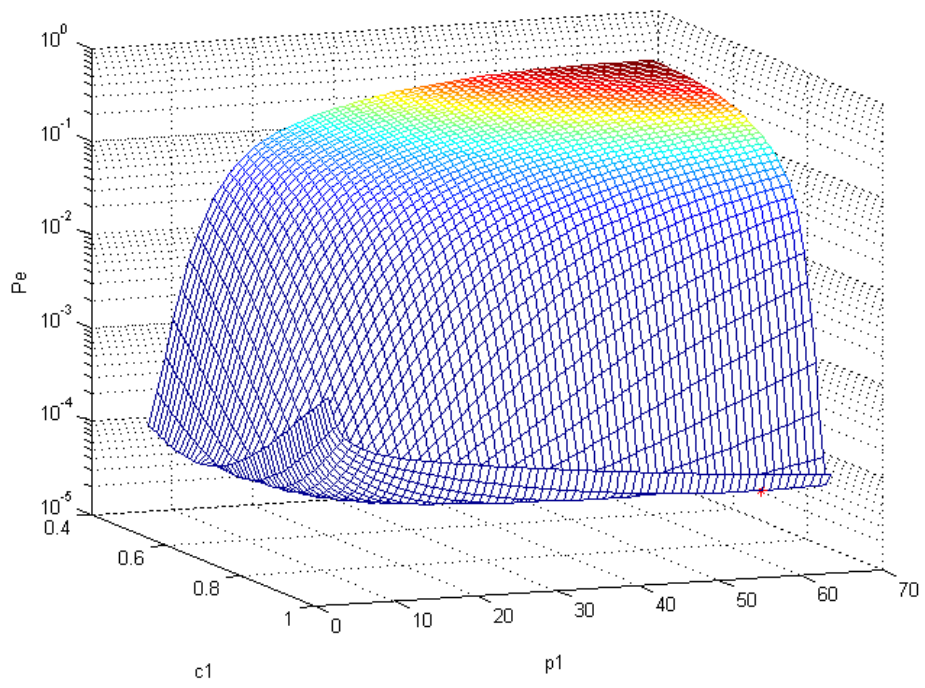
$$t/T_B = \pm 0.05$$



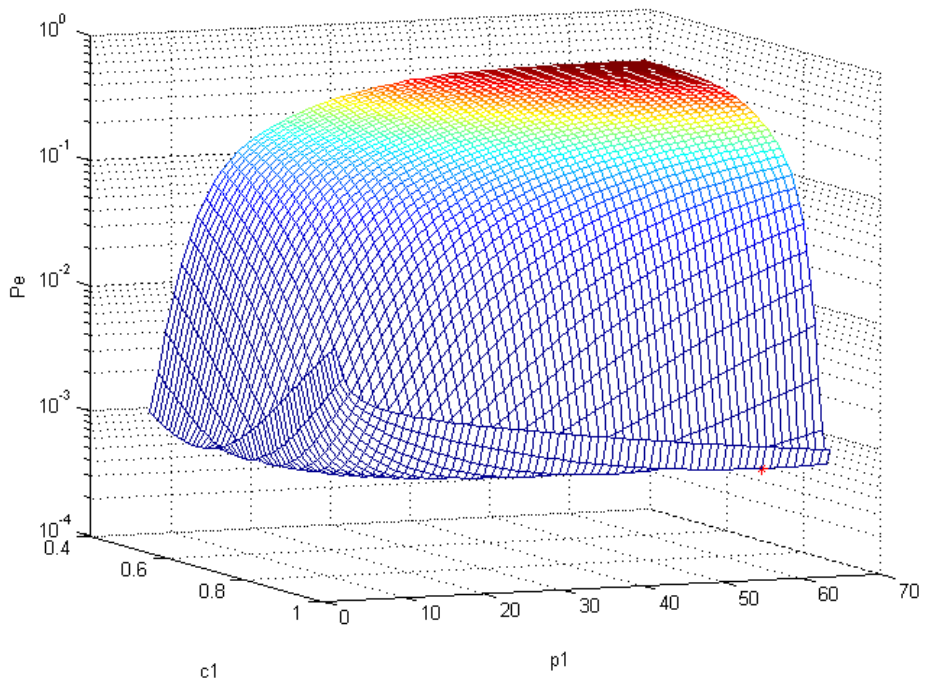
$$t/T_B = \pm 0.1$$



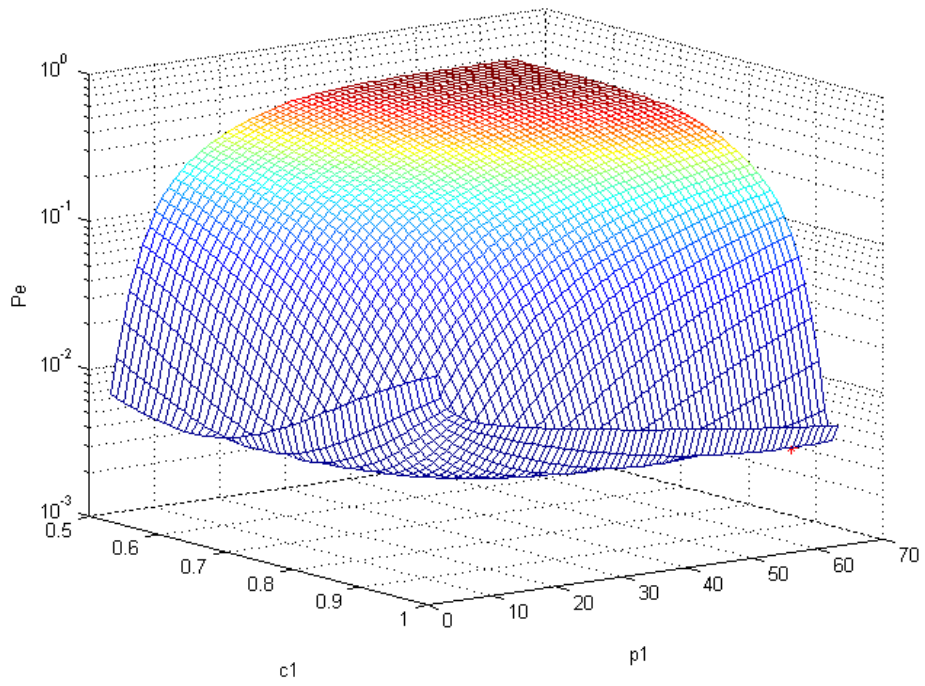
$$t/T_B = \pm 0.2$$



$$t/T_B = \pm 0.25$$

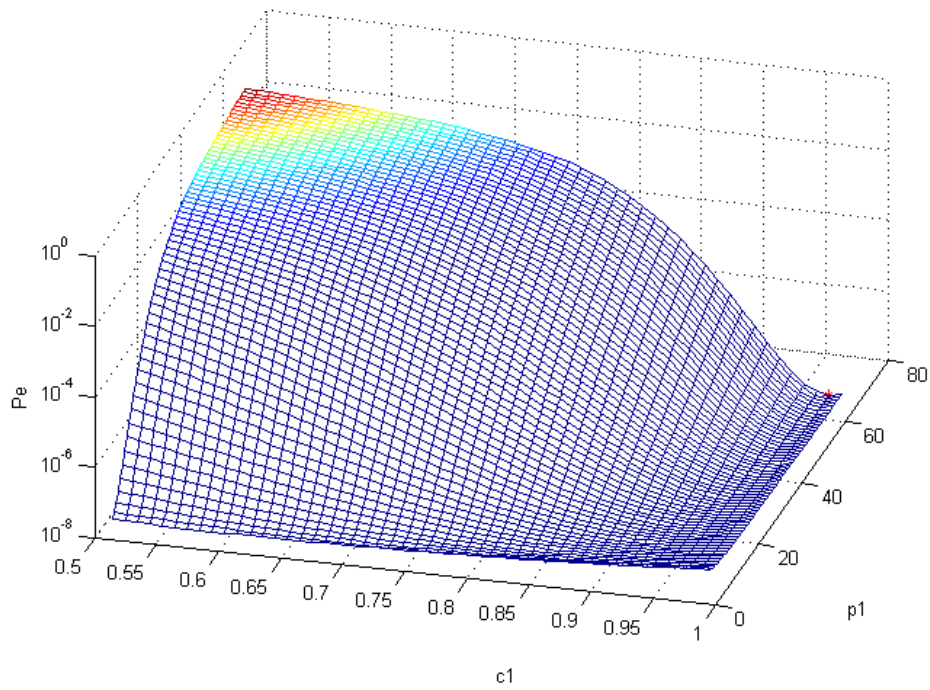


$$t/T_B = \pm 0.3$$

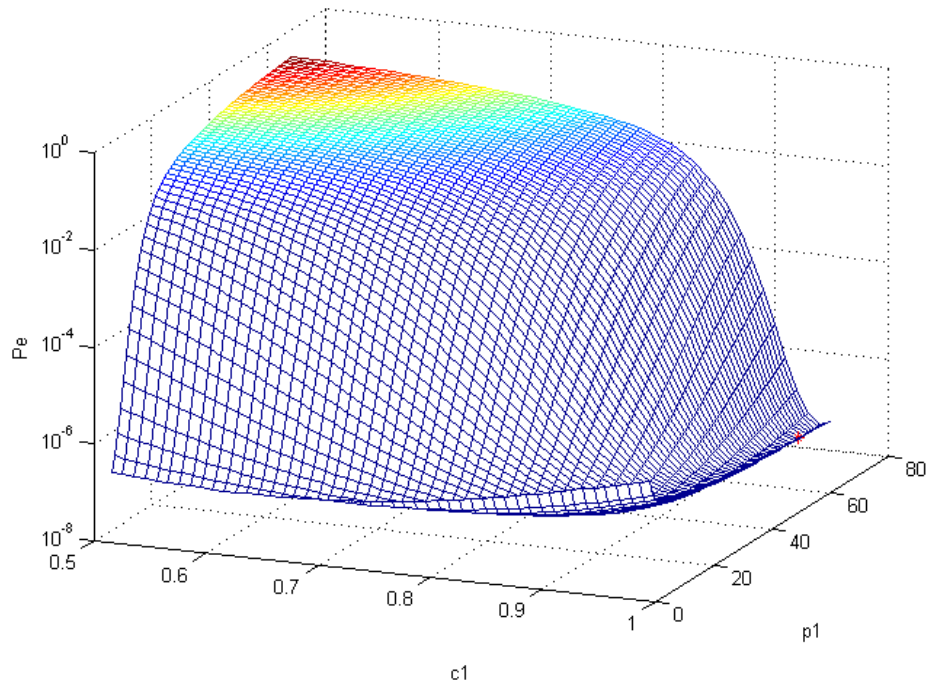


- Για roll-off factor ίσο με 0.5

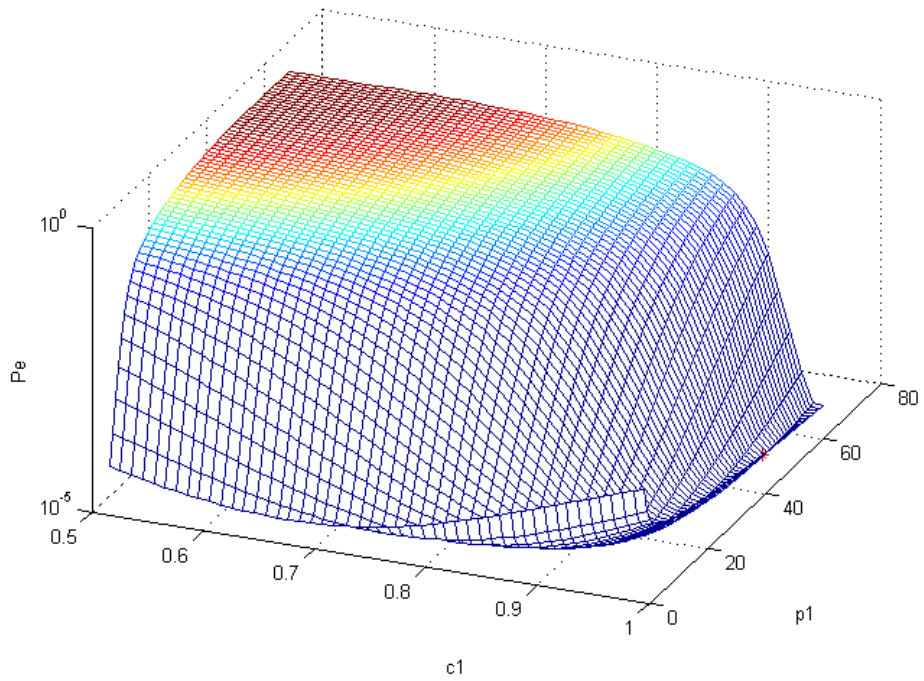
$$t/T_B = \pm 0.05$$



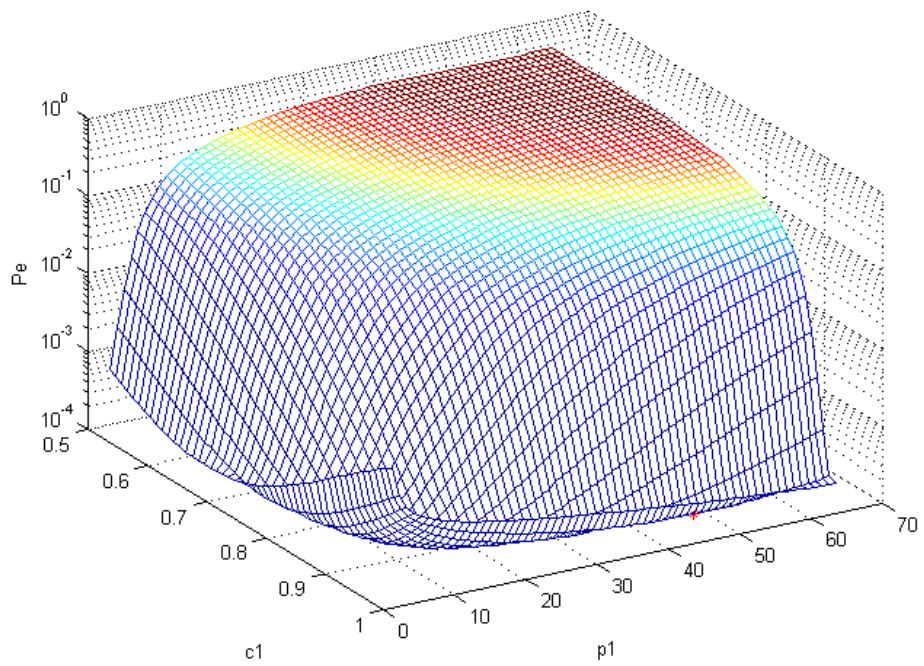
$$t/T_B = \pm 0.1$$



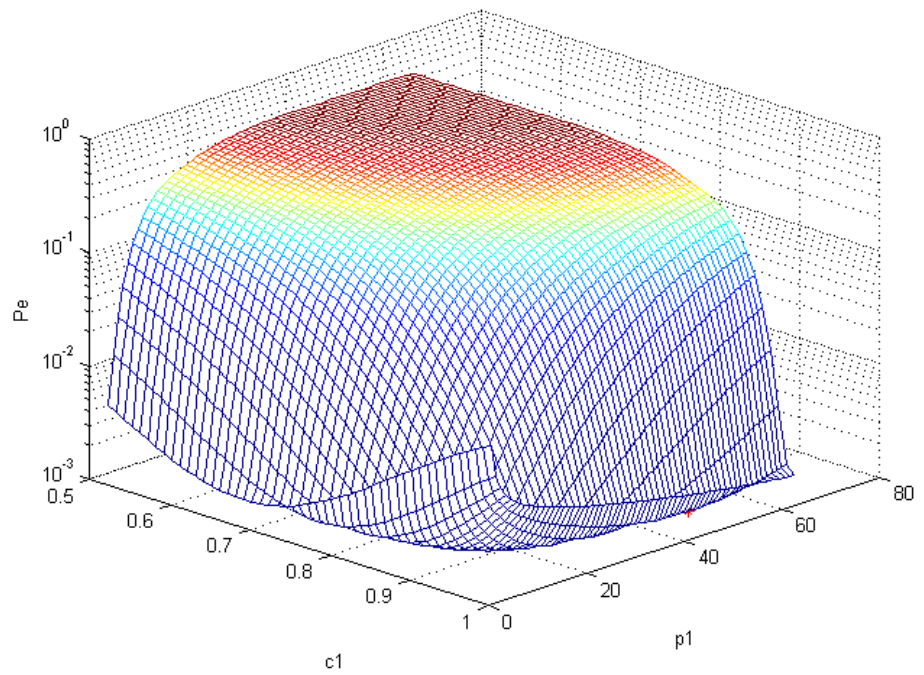
$$t/T_B = \pm 0.2$$



$$t/T_B = \pm 0.25$$

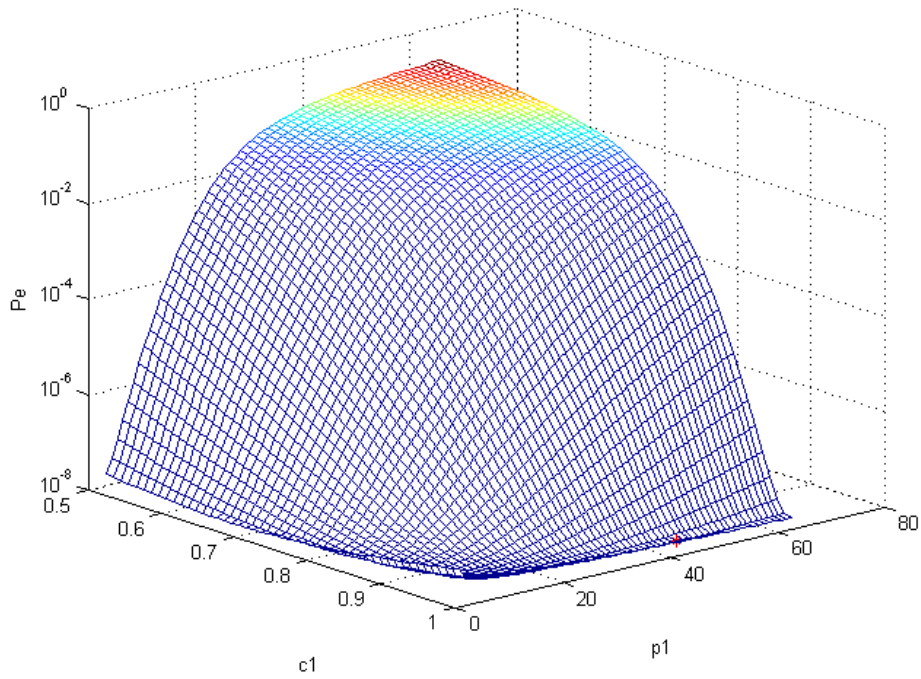


$$t/T_B = \pm 0.3$$

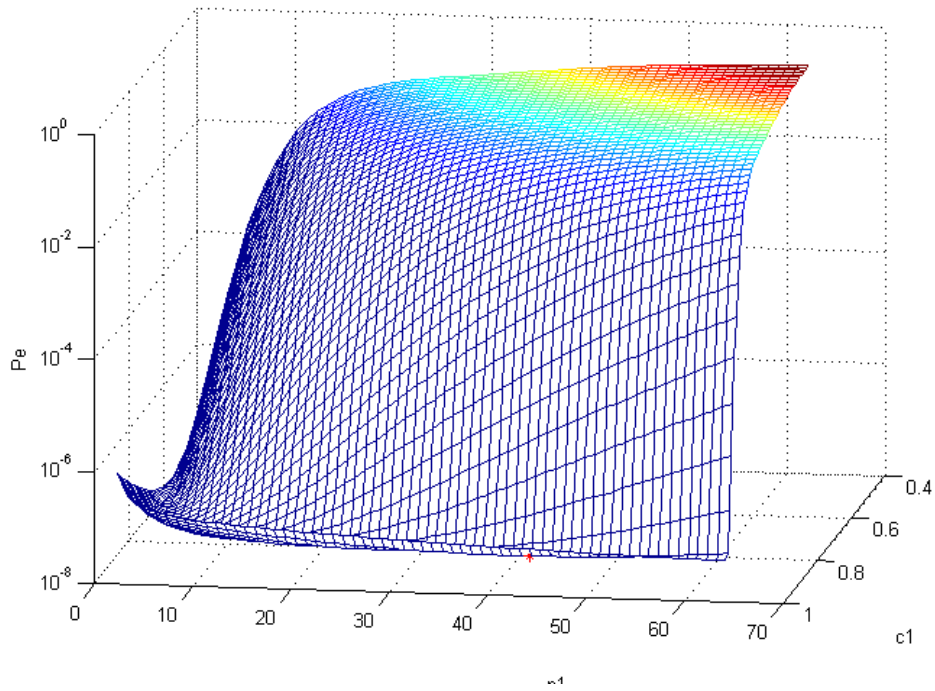


- Για roll-off factor ίσο με 0.75

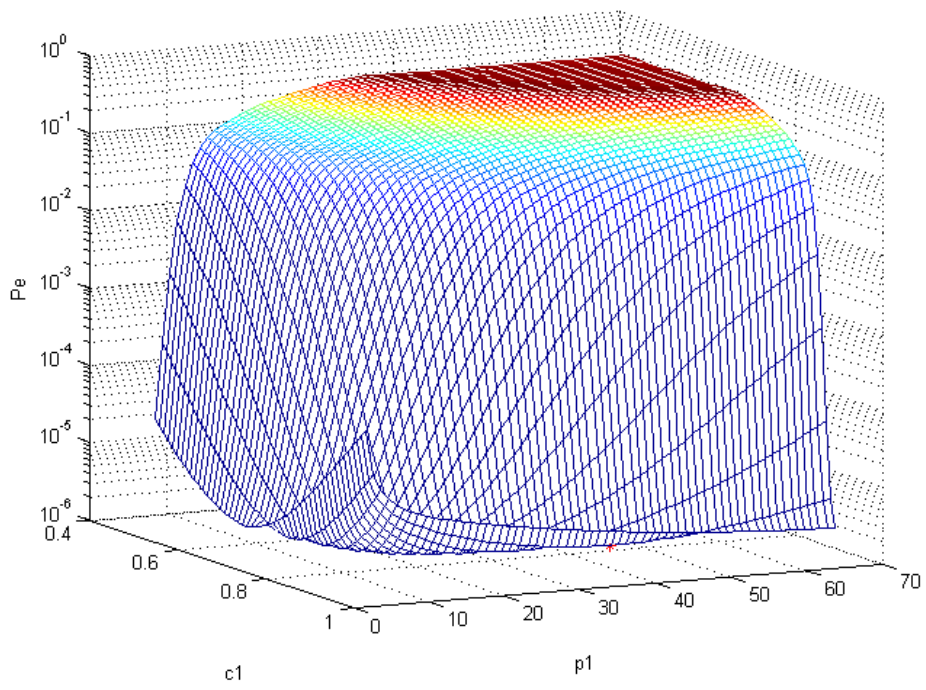
$$t/T_B = \pm 0.05$$



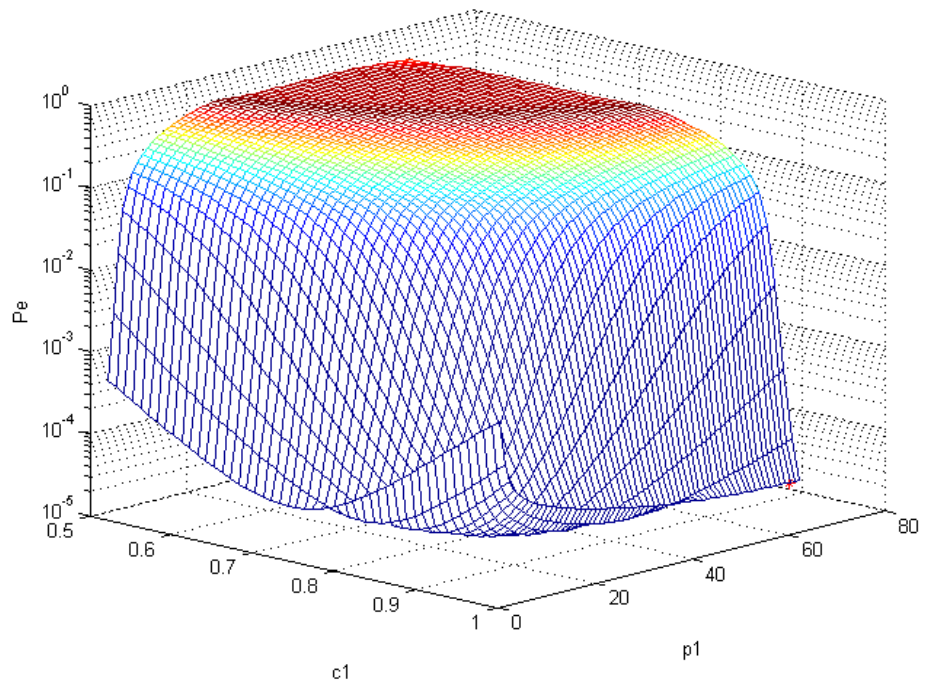
$$t/T_B = \pm 0.1$$



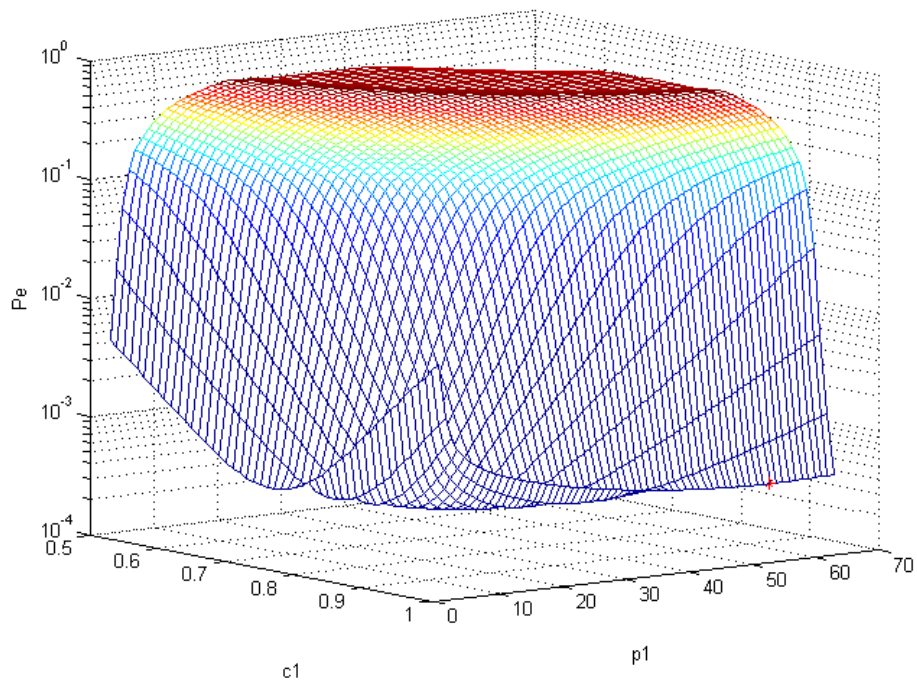
$$t/T_B = \pm 0.2$$



$$t/T_B = \pm 0.25$$

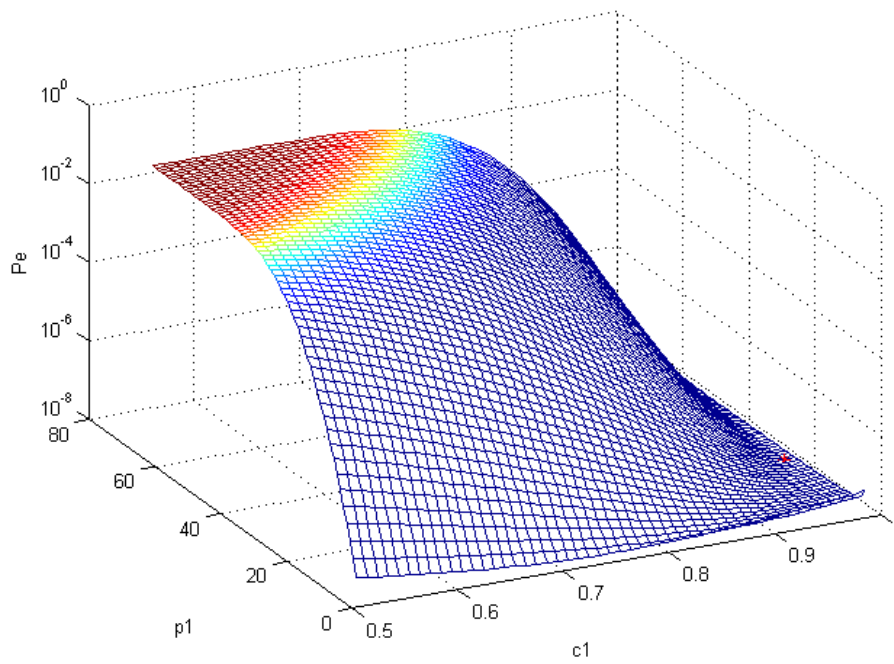


$$t/T_B = \pm 0.3$$

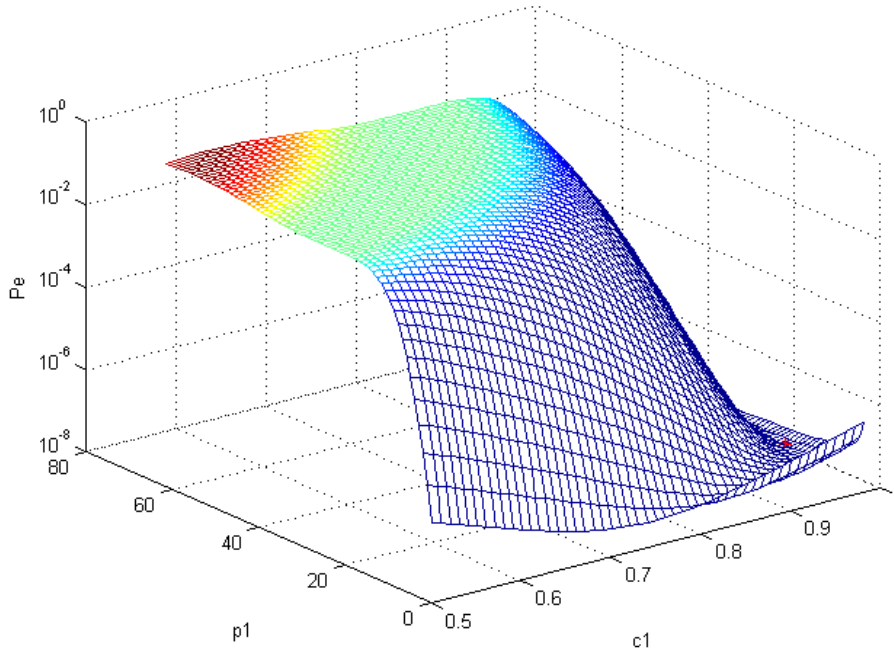


- Για roll-off factor ίσο με 1

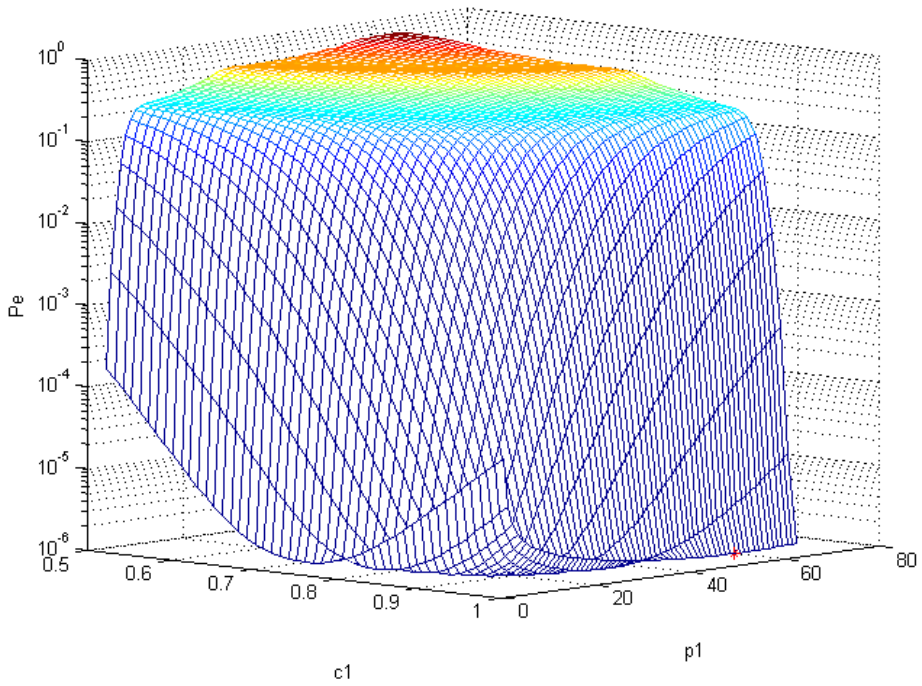
$$t/T_B = \pm 0.05$$



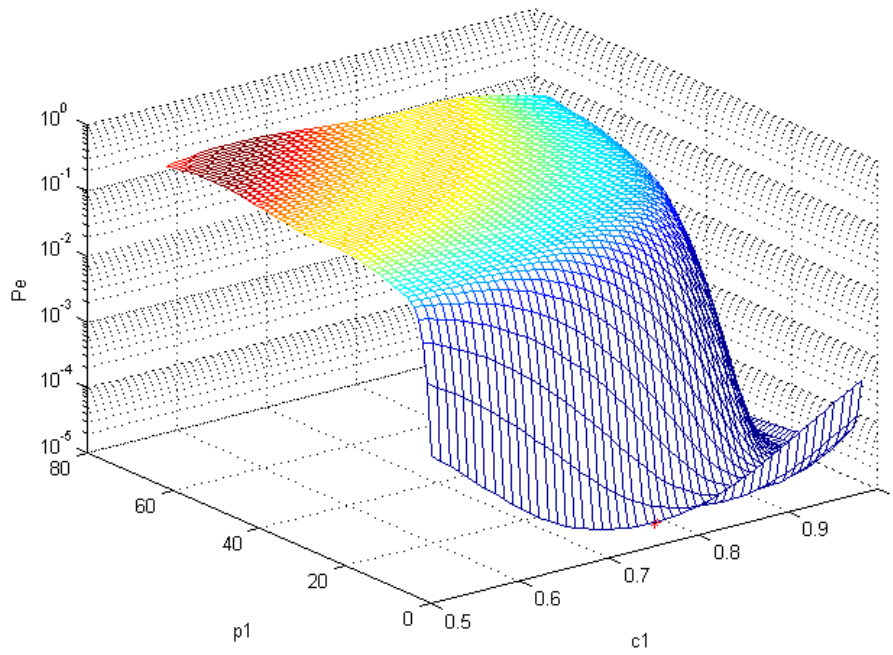
$$t/T_B = \pm 0.1$$



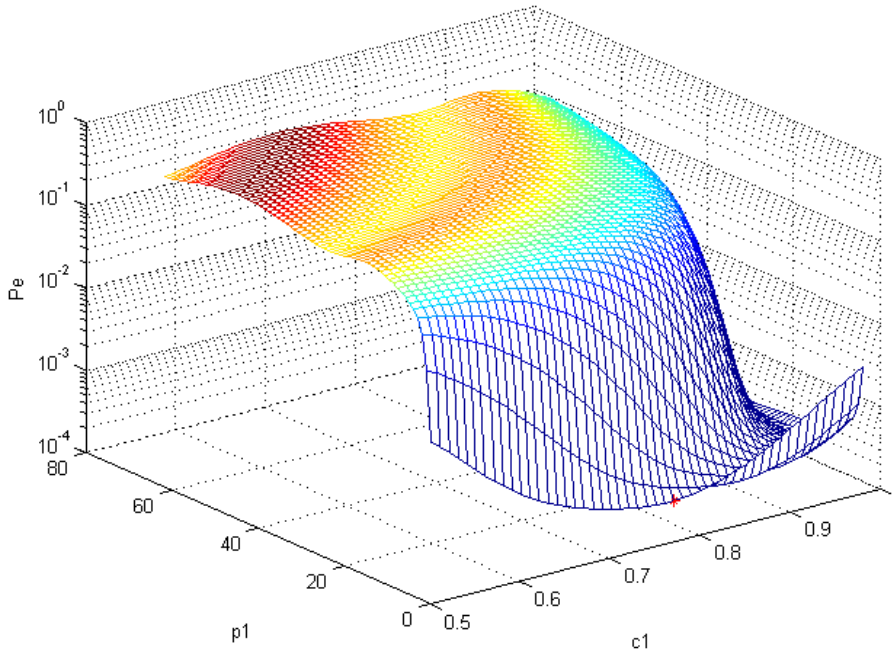
$$t/T_B = \pm 0.2$$



$$t/T_B = \pm 0.25$$



$$t/T_B = \pm 0.3$$

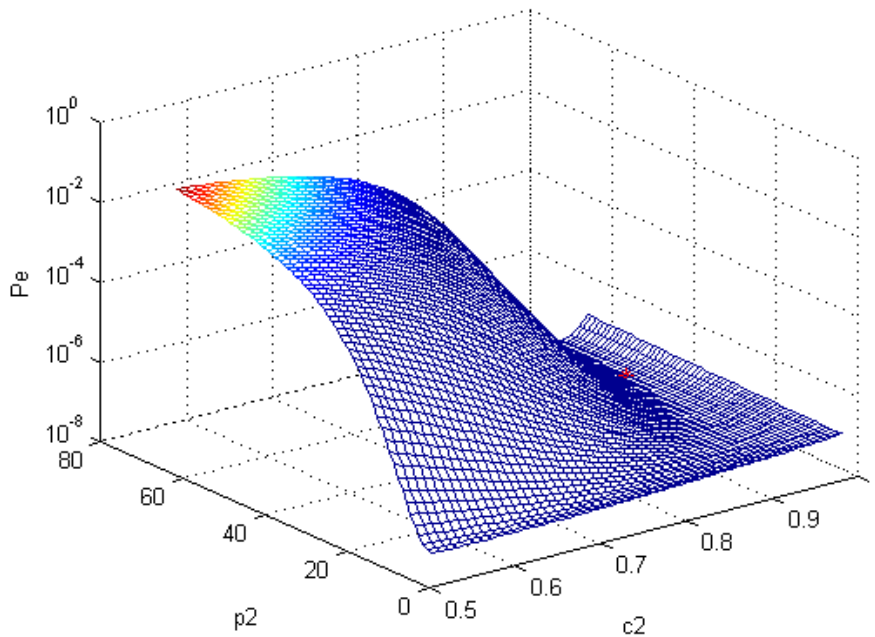


ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 3

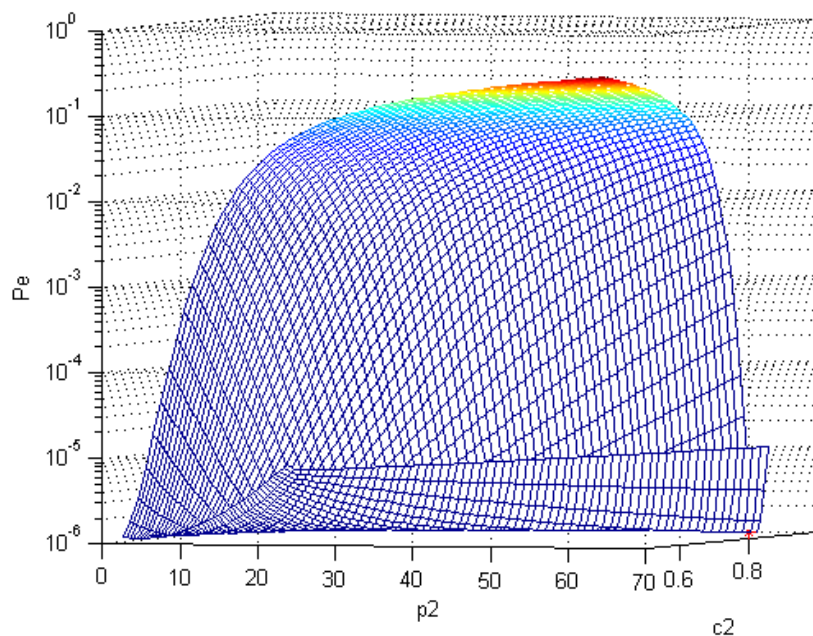
Διαγράμματα επιλογής βέλτιστων τιμών για τις παραμέτρους c_2 και p_2 για τον τέταρτο νέο παλμό

- Για roll-off factor ίσο με 0.25

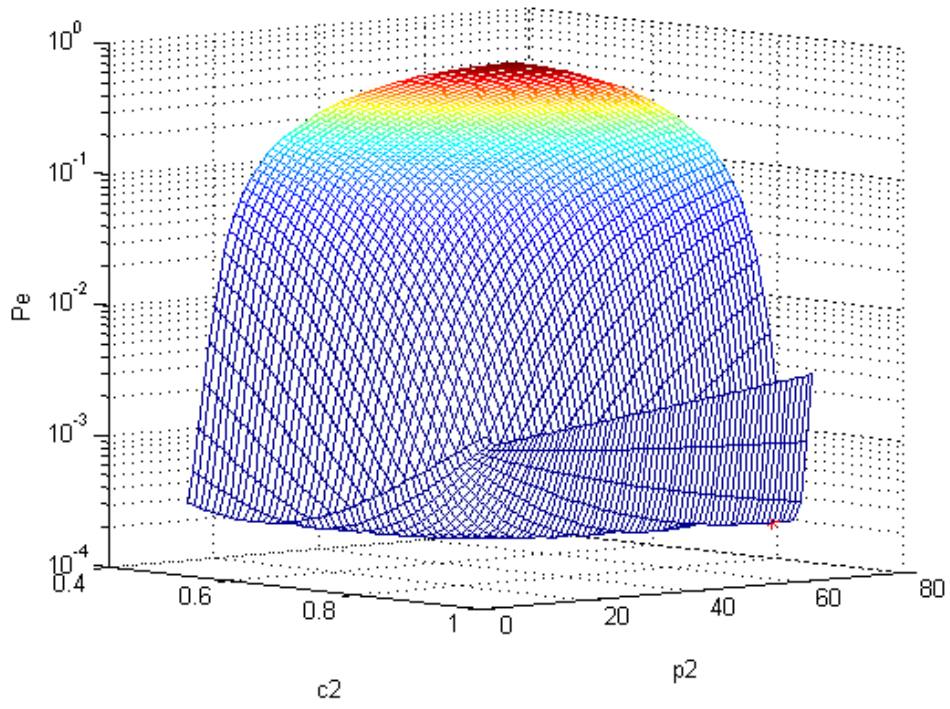
$$t/T_B = \pm 0.05$$



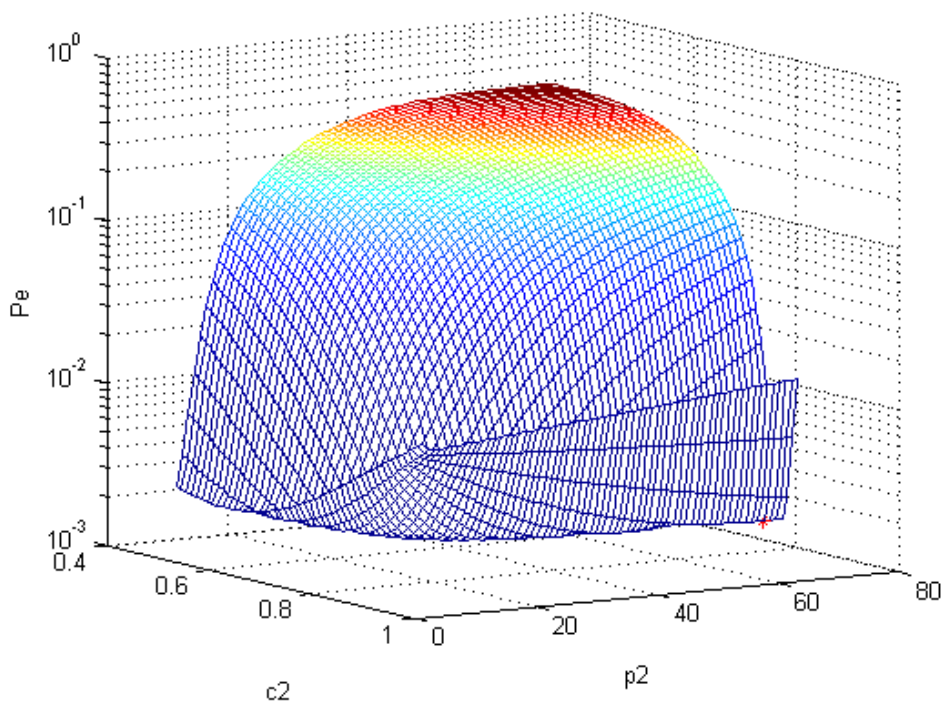
$$t/T_B = \pm 0.1$$



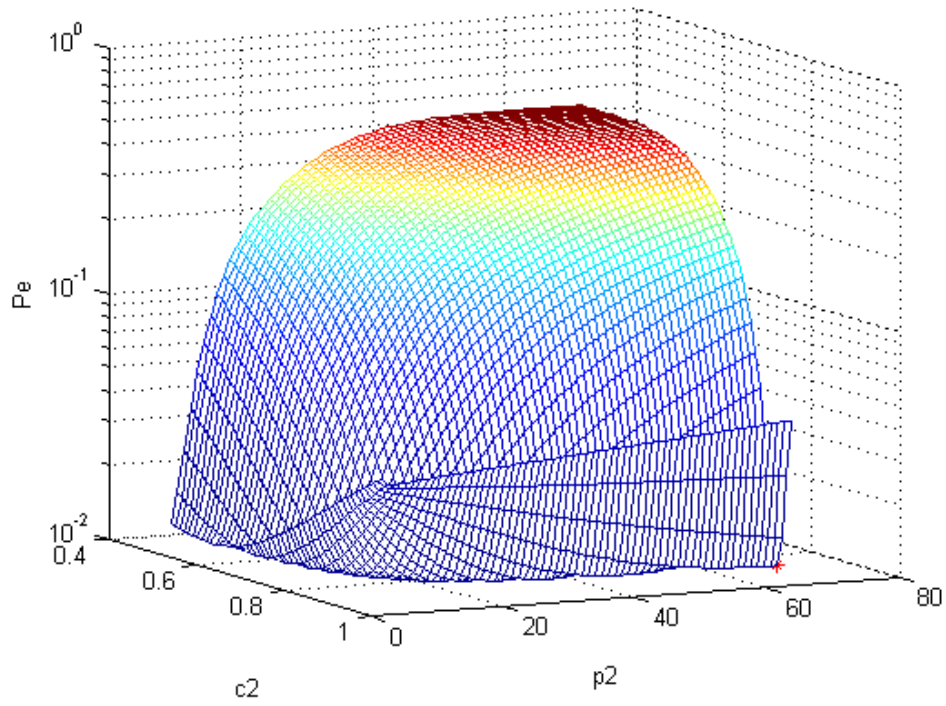
$$t/T_B = \pm 0.2$$



$$t/T_B = \pm 0.25$$

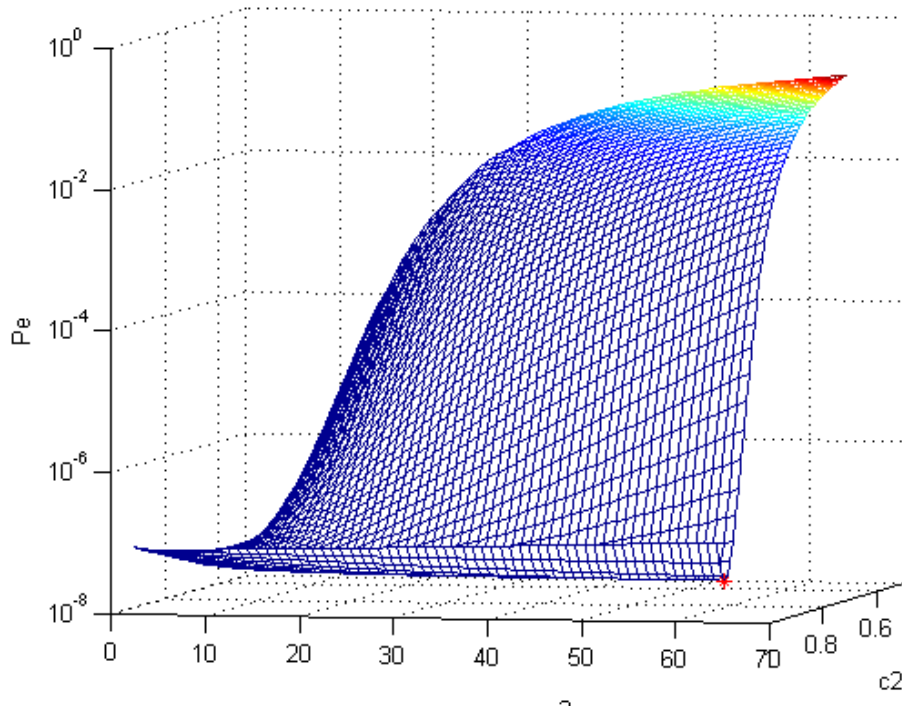


$$t/T_B = \pm 0.3$$

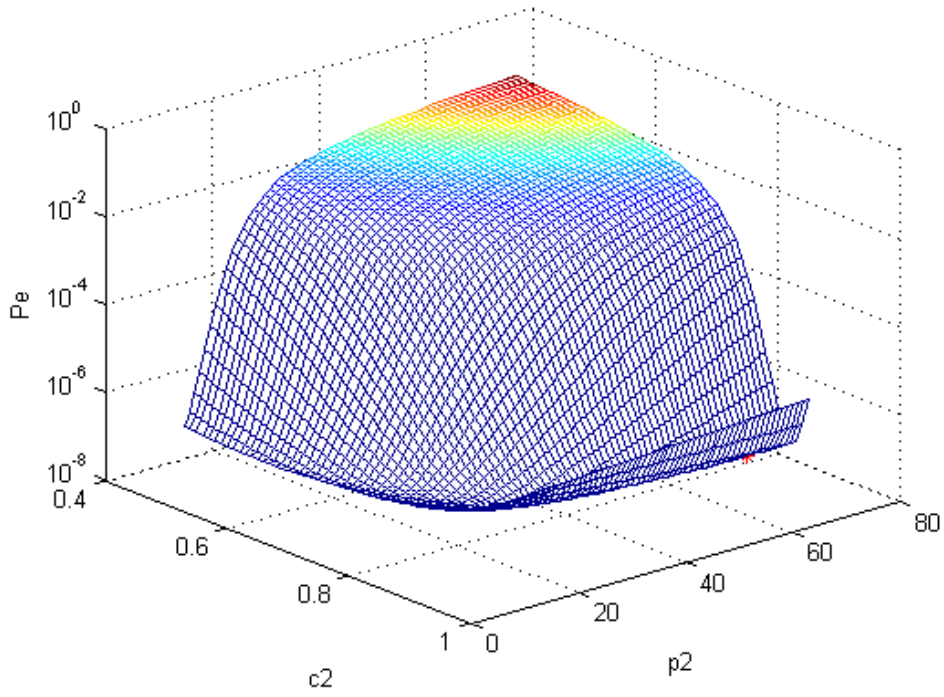


- Για roll-off factor ίσο με 0.35

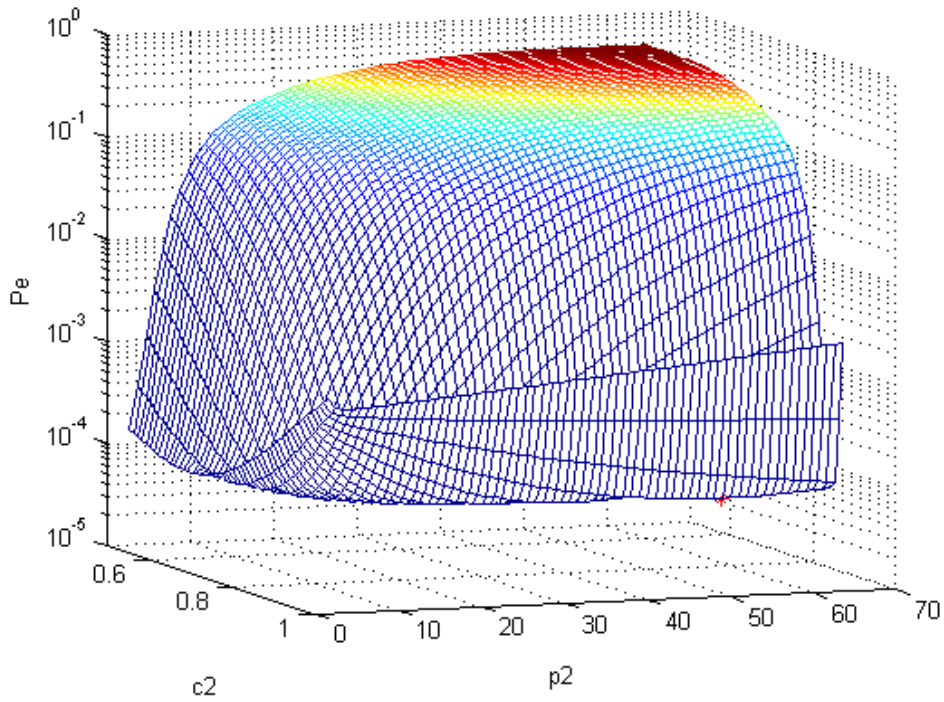
$$t/T_B = \pm 0.05$$



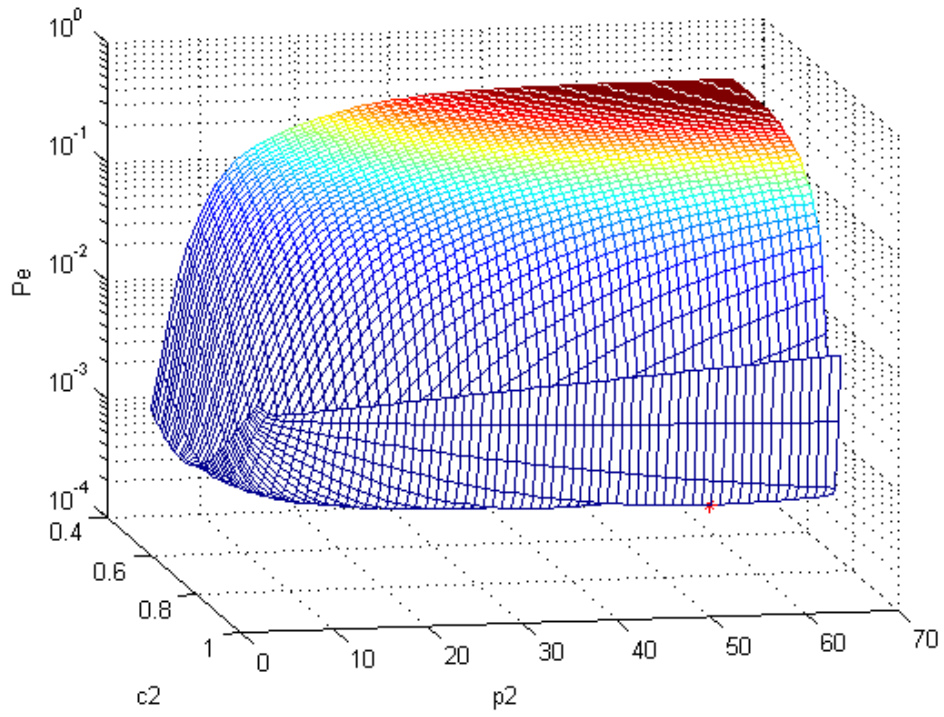
$$t/T_B = \pm 0.1$$



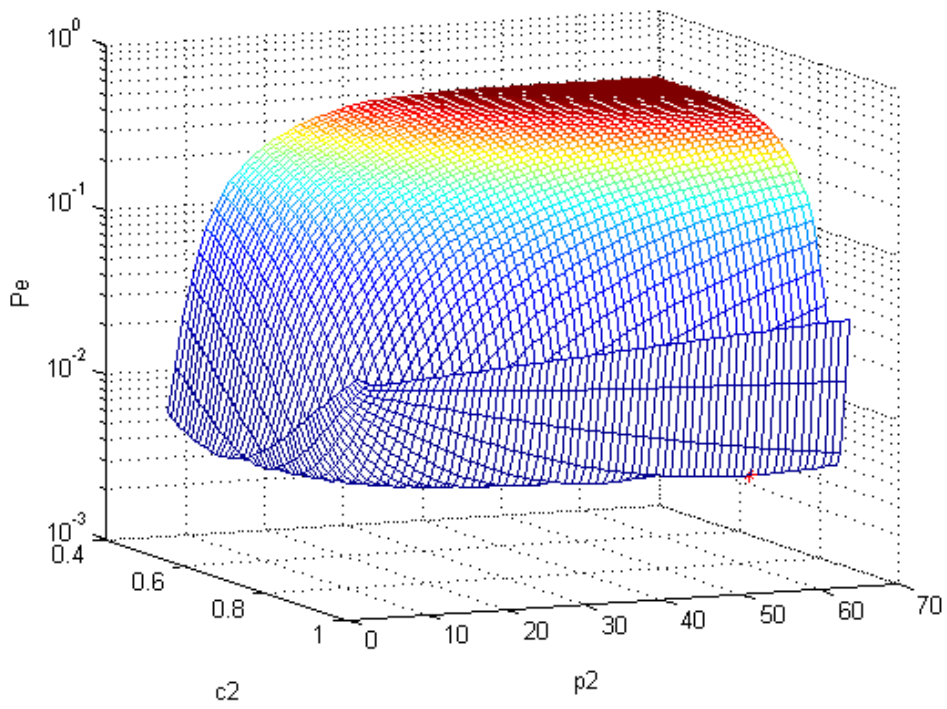
$$t/T_B = \pm 0.2$$



$$t/T_B = \pm 0.25$$

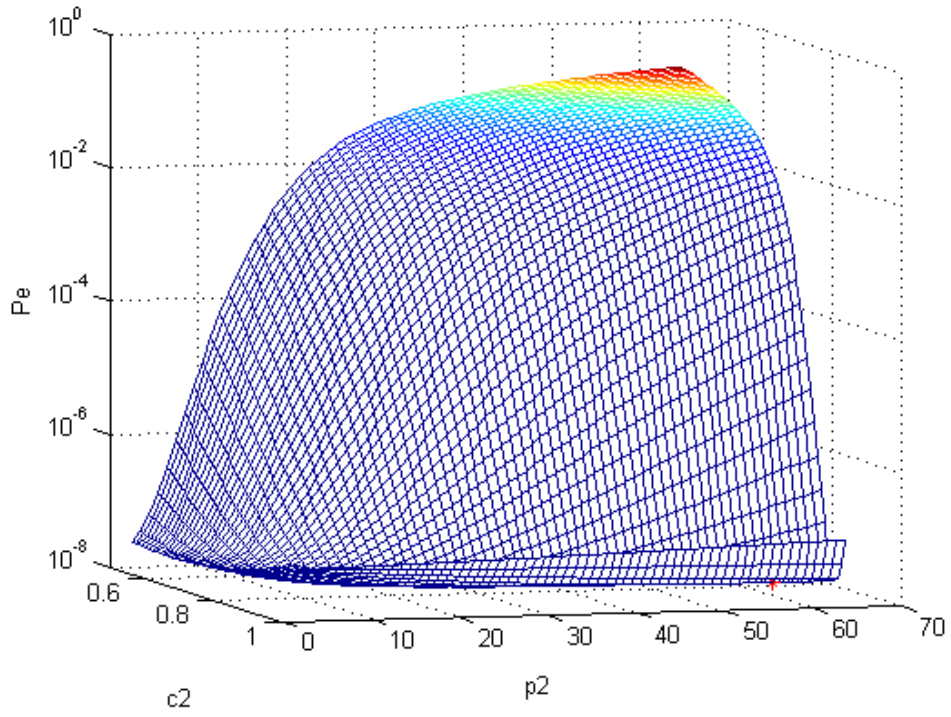


$$t/T_B = \pm 0.3$$

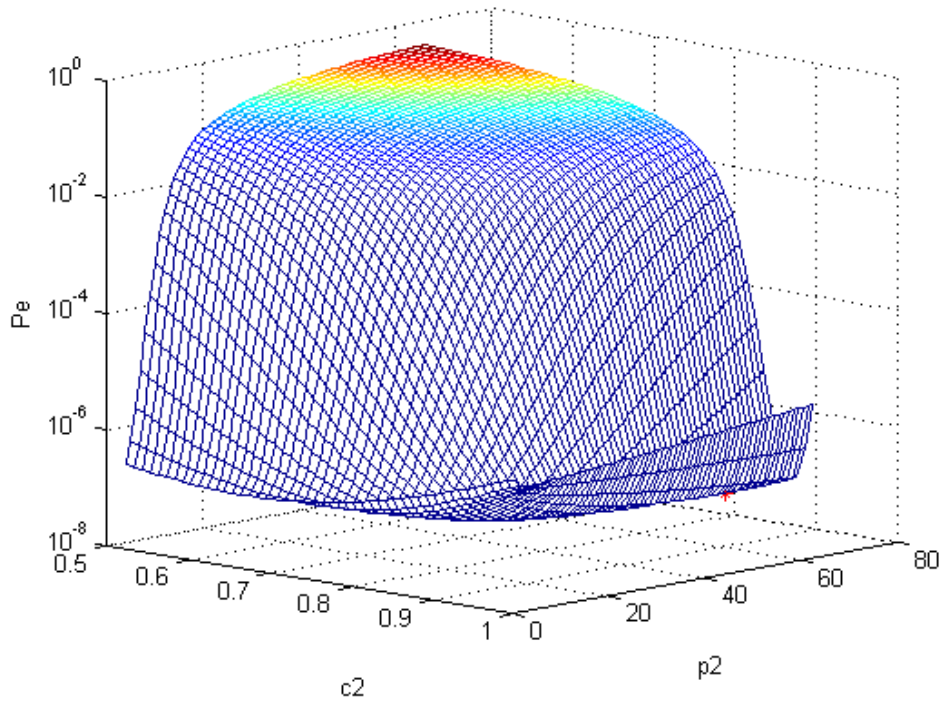


- Για roll-off factor ίσο με 0.5

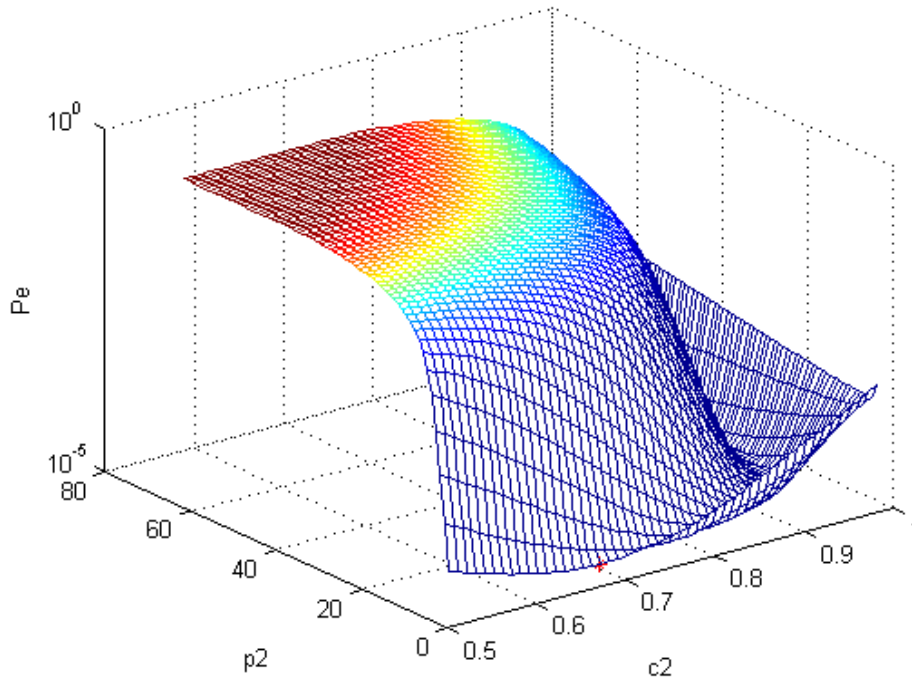
$$t/T_B = \pm 0.05$$



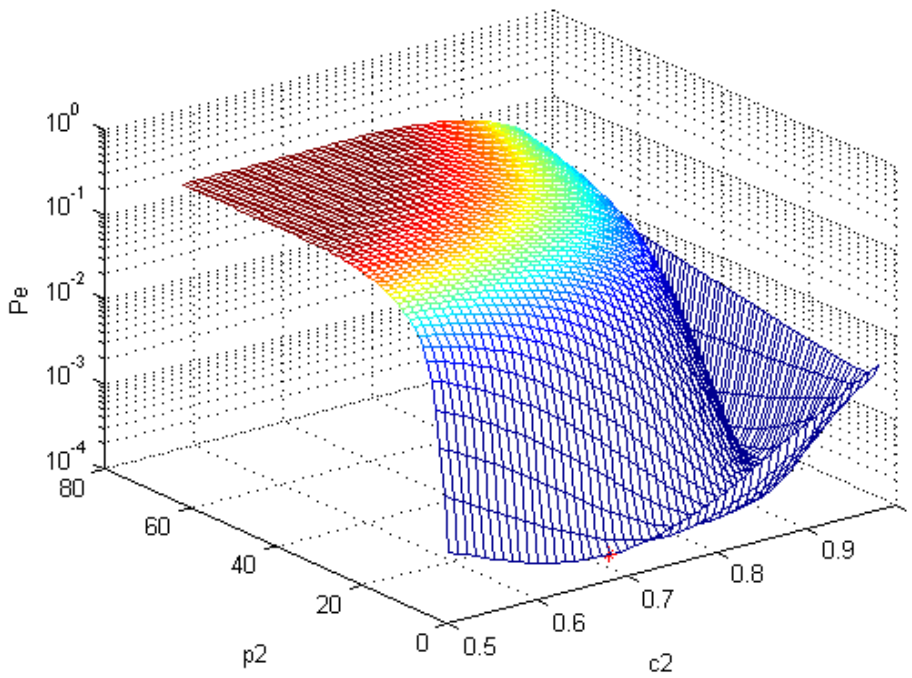
$$t/T_B = \pm 0.1$$



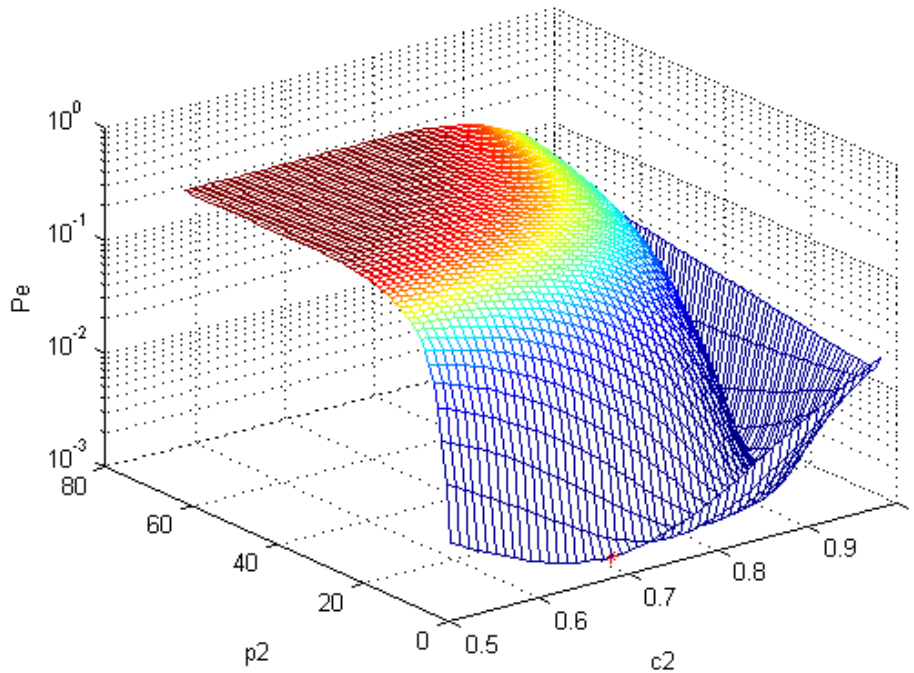
$$t/T_B = \pm 0.2$$



$$t/T_B = \pm 0.25$$

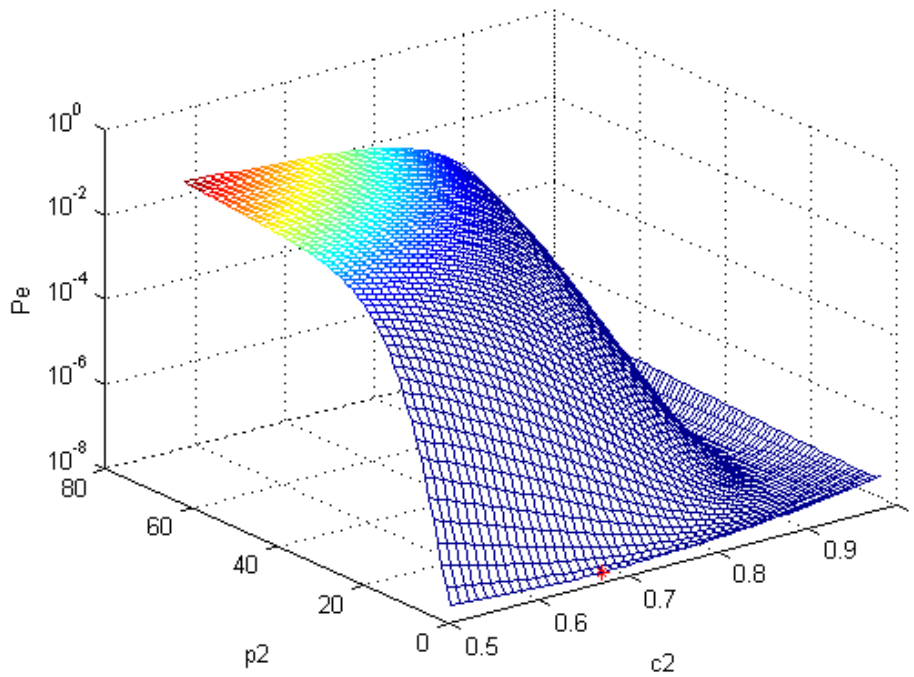


$$t/T_B = \pm 0.3$$

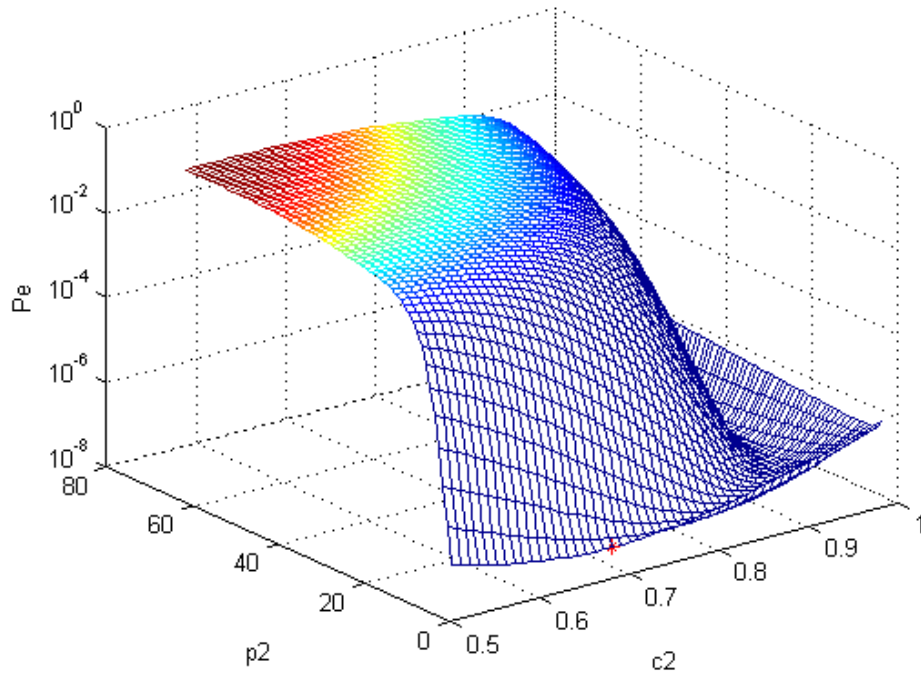


- Για roll-off factor ίσο με 0.75

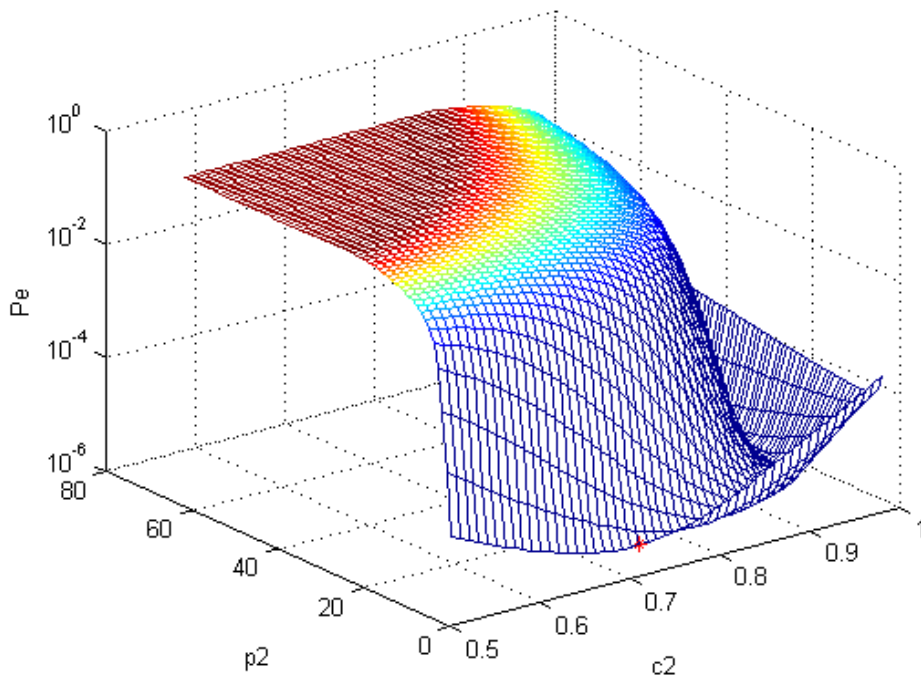
$$t/T_B = \pm 0.05$$



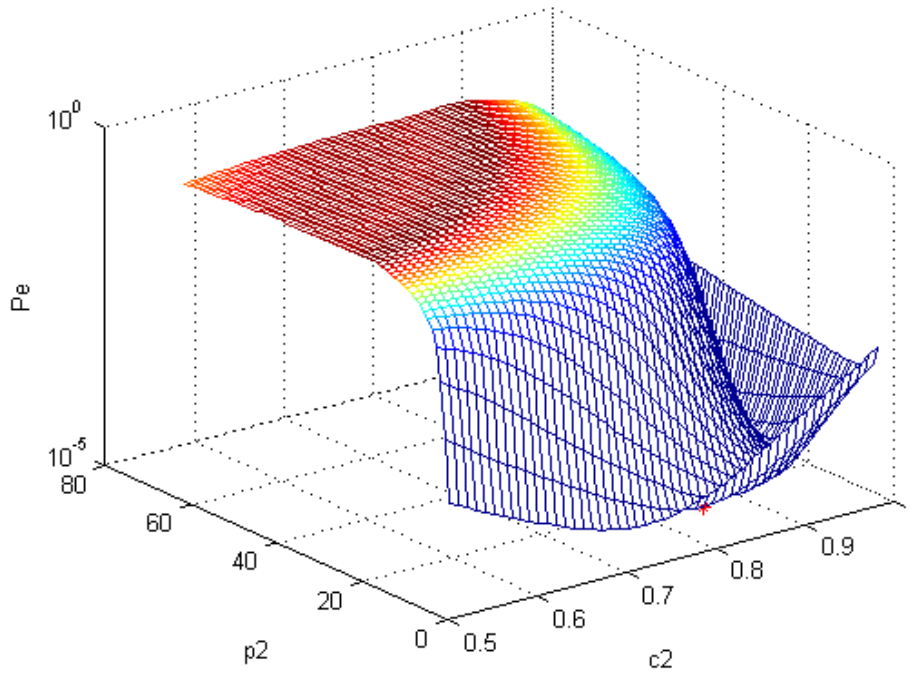
$$t/T_B = \pm 0.1$$



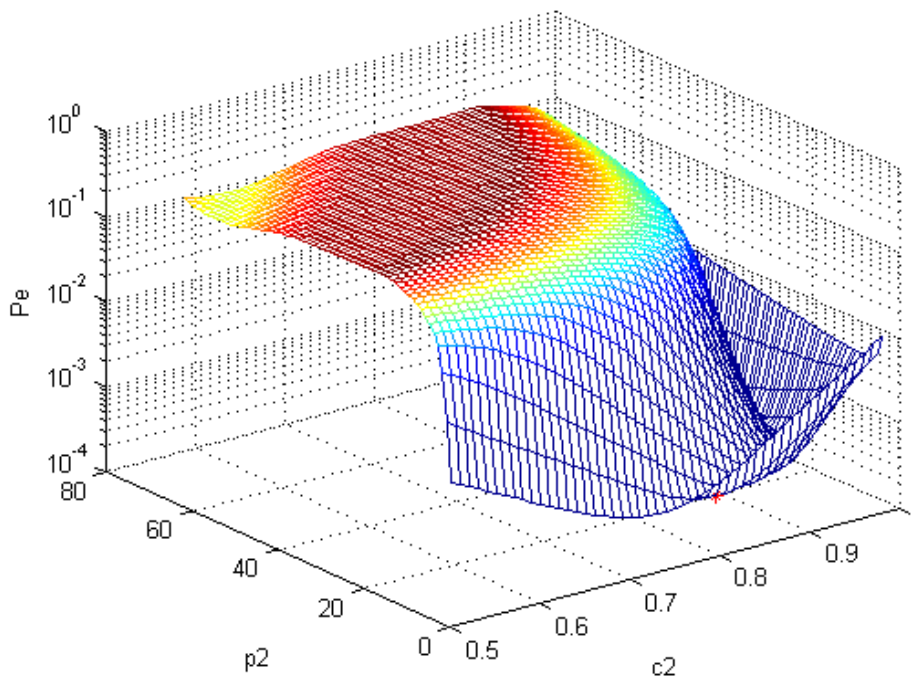
$$t/T_B = \pm 0.2$$



$$t/T_B = \pm 0.25$$

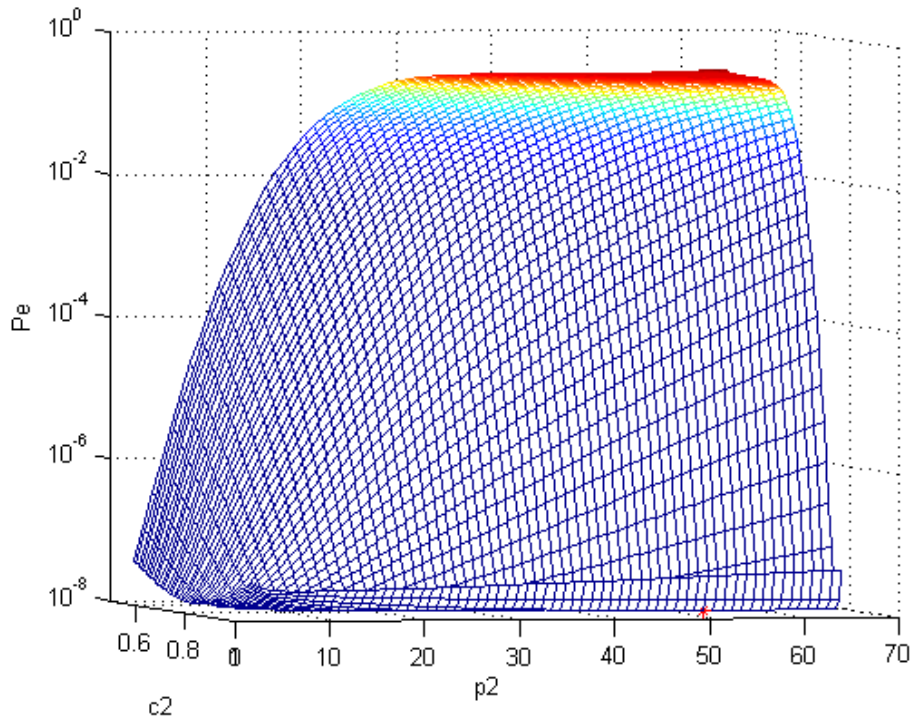


$$t/T_B = \pm 0.3$$

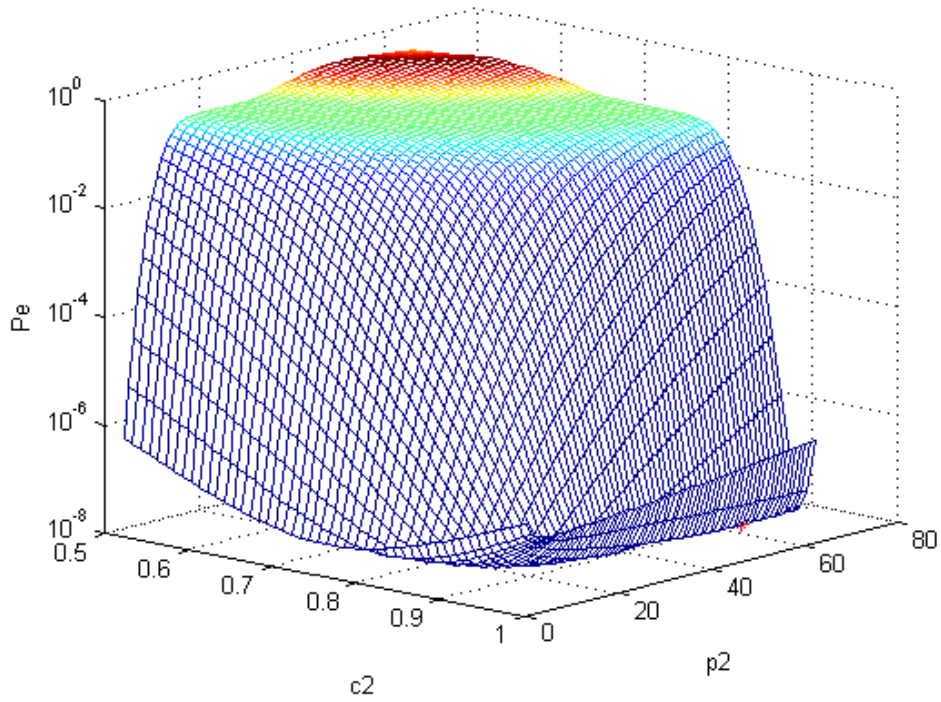


- Για roll-off factor ίσο με 1

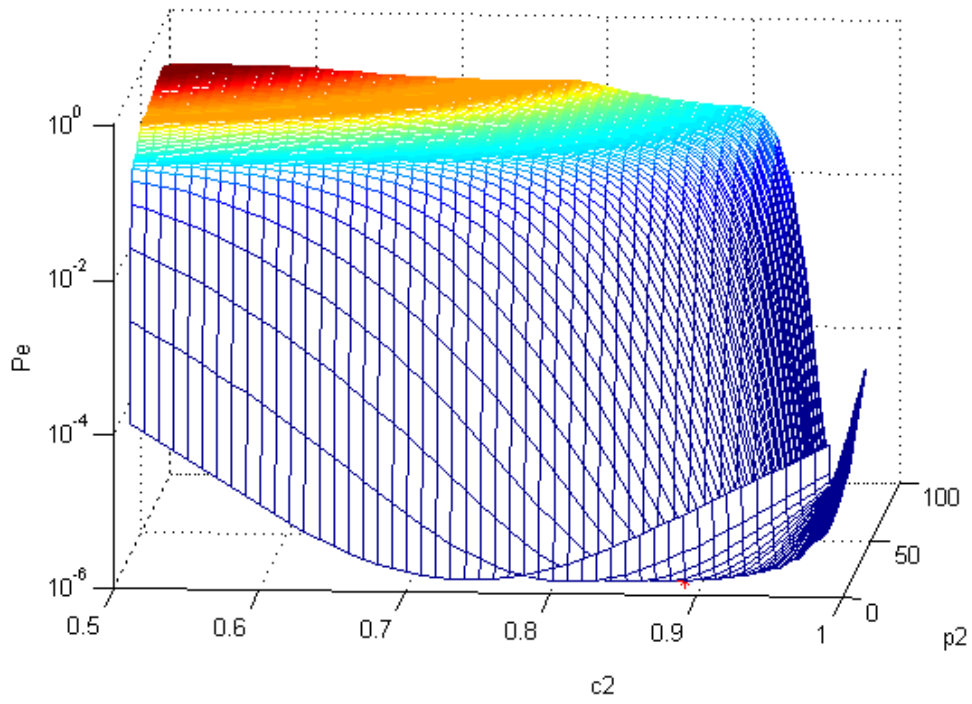
$$t/T_B = \pm 0.05$$



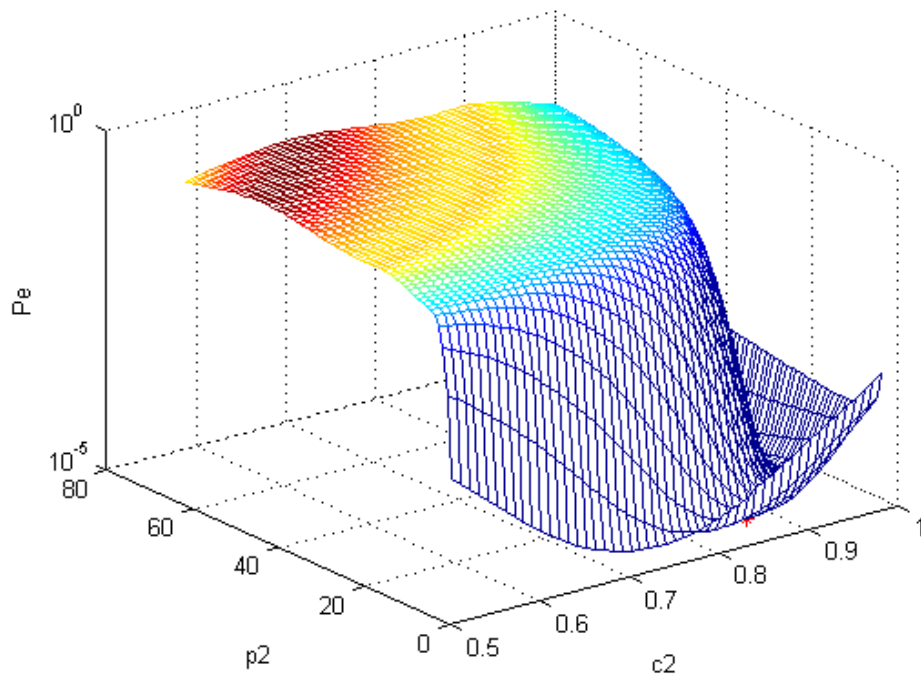
$$t/T_B = \pm 0.1$$



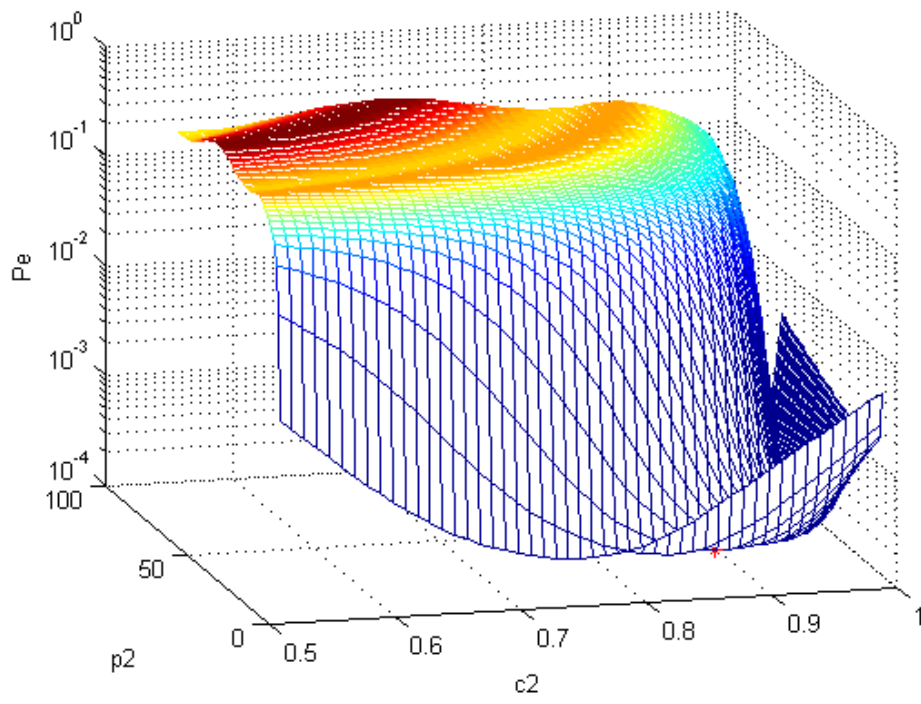
$$t/T_B = \pm 0.2$$



$$t/T_B = \pm 0.25$$



$$t/T_B = \pm 0.3$$

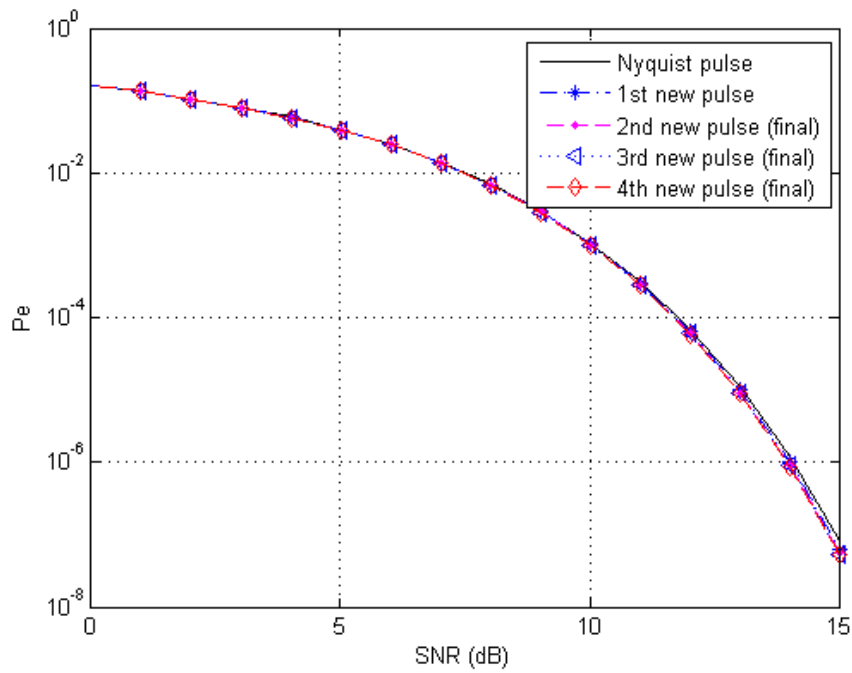


ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 4

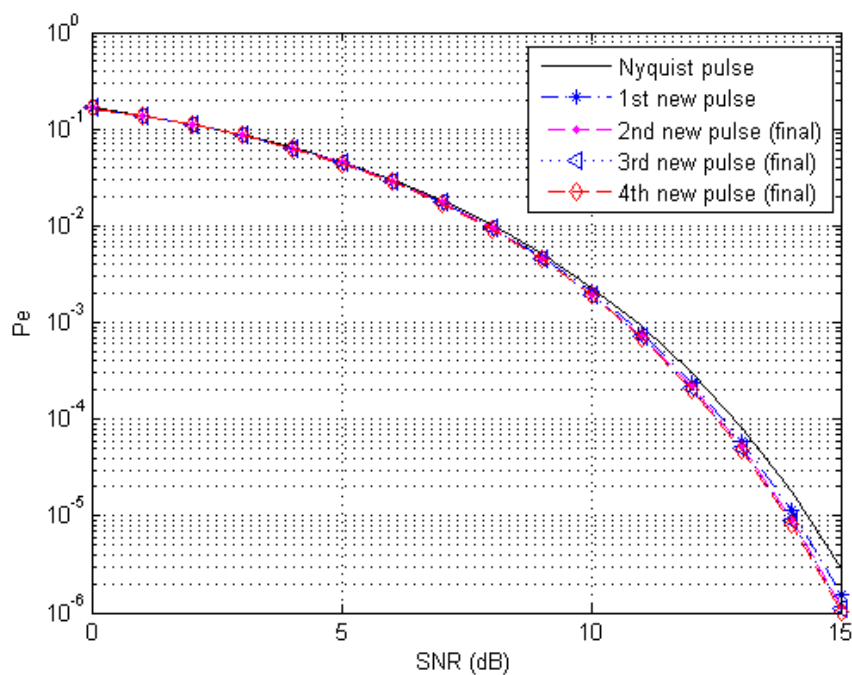
Διαγράμματα πιθανότητας σφάλματος για όλους τους νέους παλμούς που κατασκευάσαμε

- Για roll-off factor ίσο με 0.25

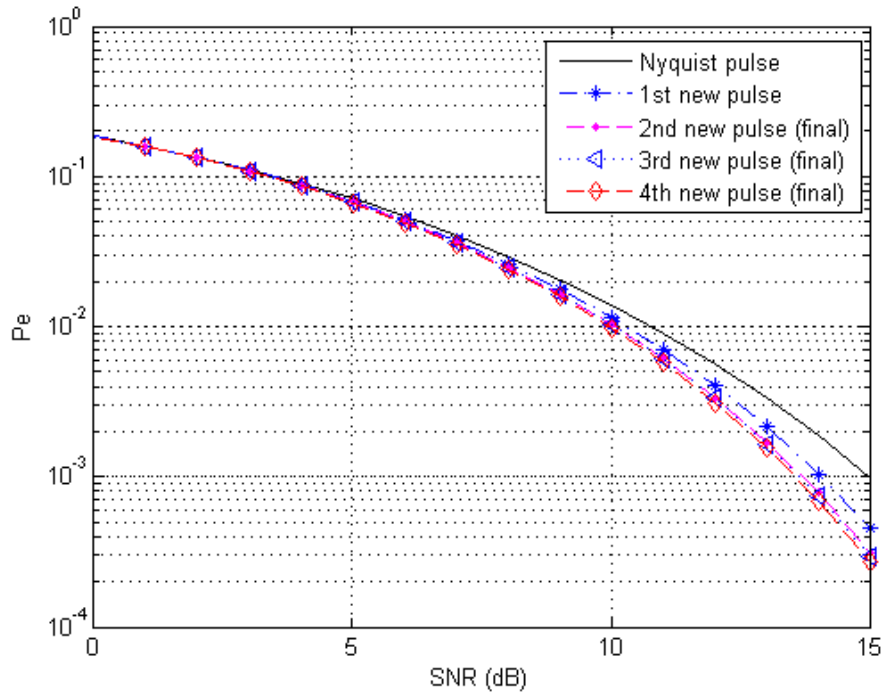
$$t/T_B = \pm 0.05$$



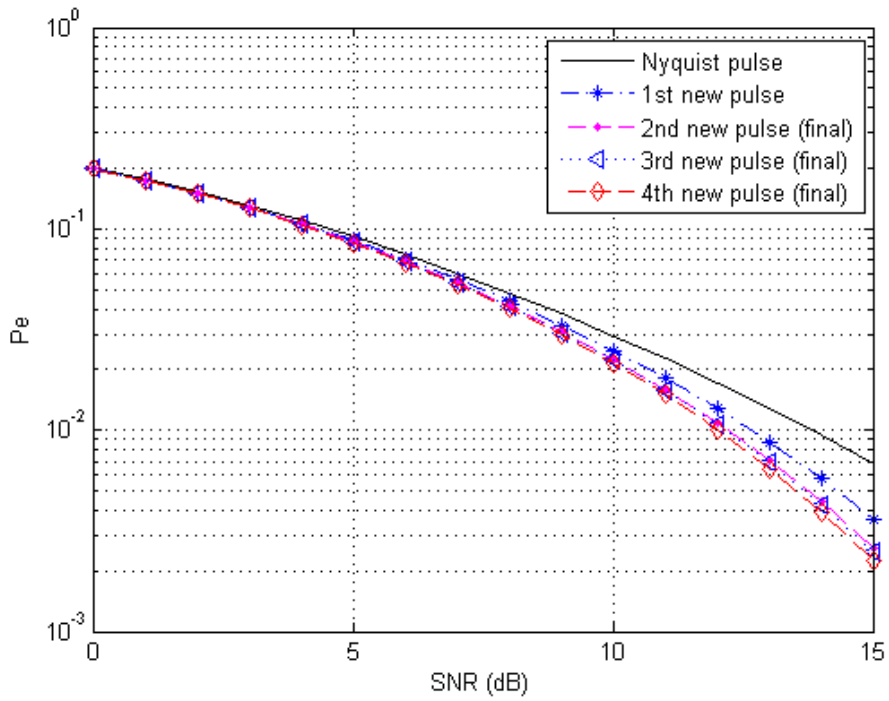
$$t/T_B = \pm 0.1$$



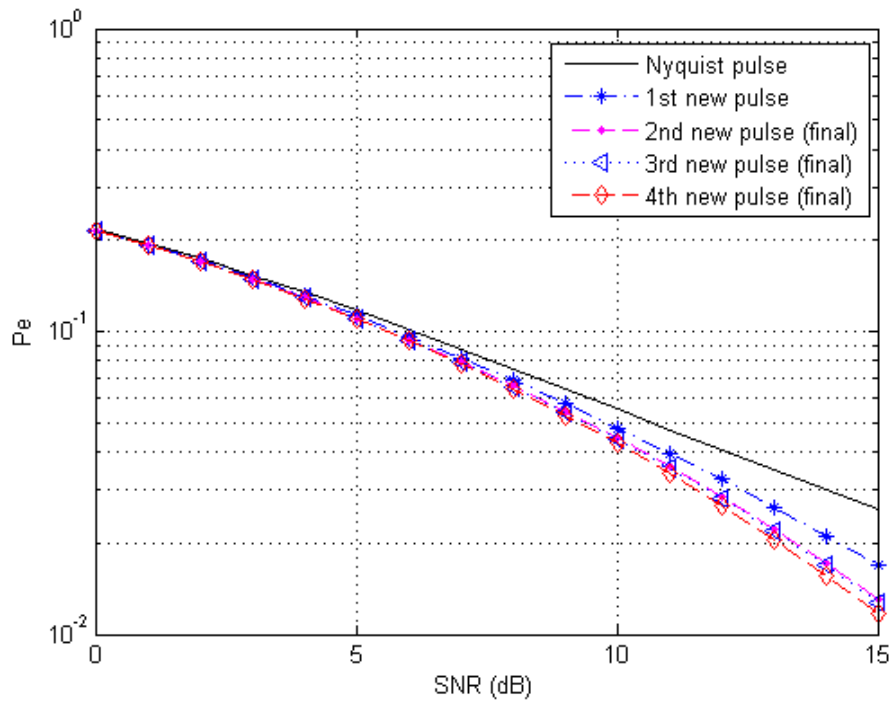
$$t/T_B = \pm 0.2$$



$$t/T_B = \pm 0.25$$

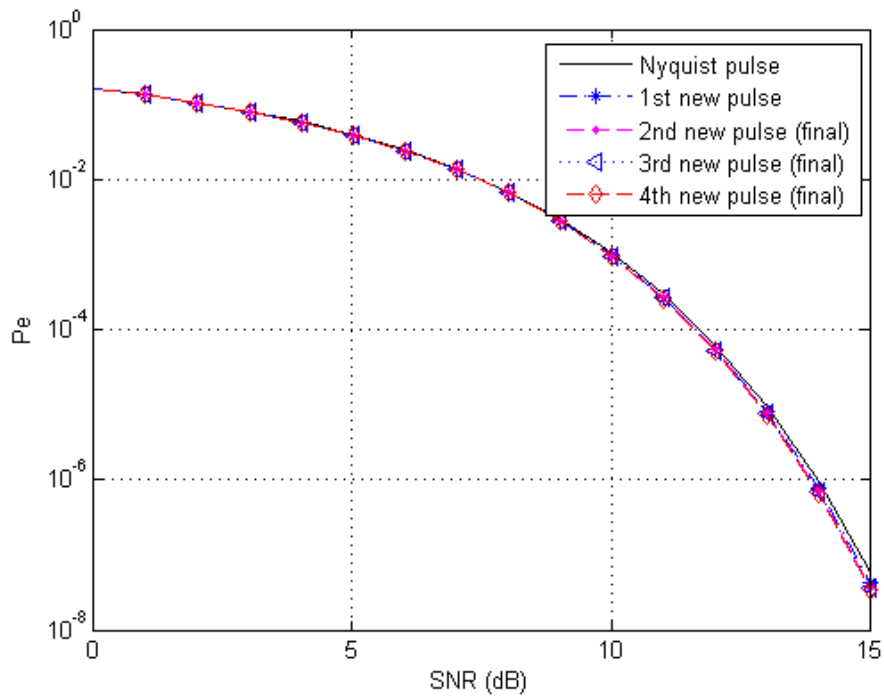


$$t/T_B = \pm 0.3$$

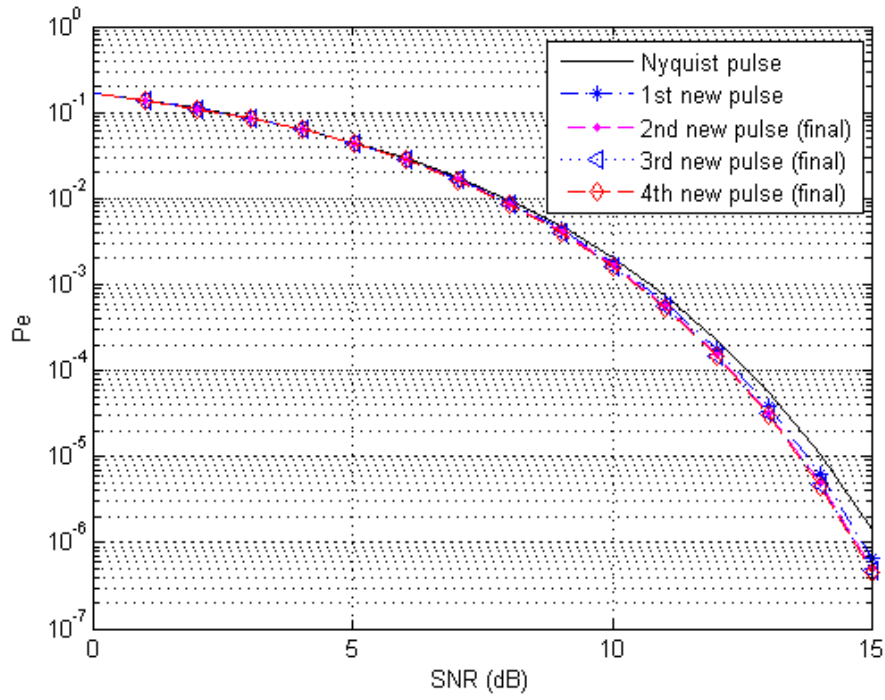


- Για roll-off factor ίσο με 0.35

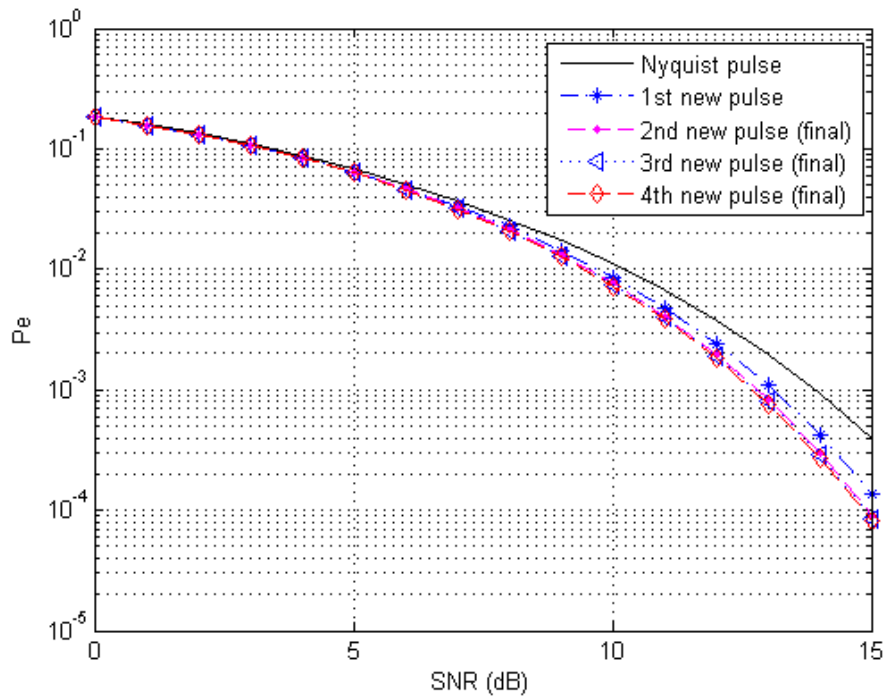
$$t/T_B = \pm 0.05$$



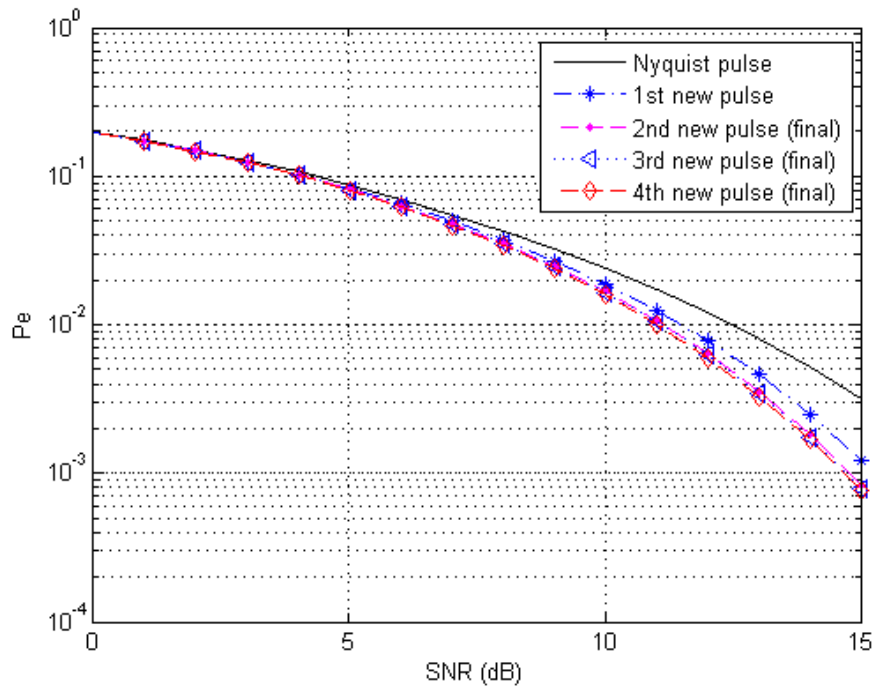
$$t/T_B = \pm 0.1$$



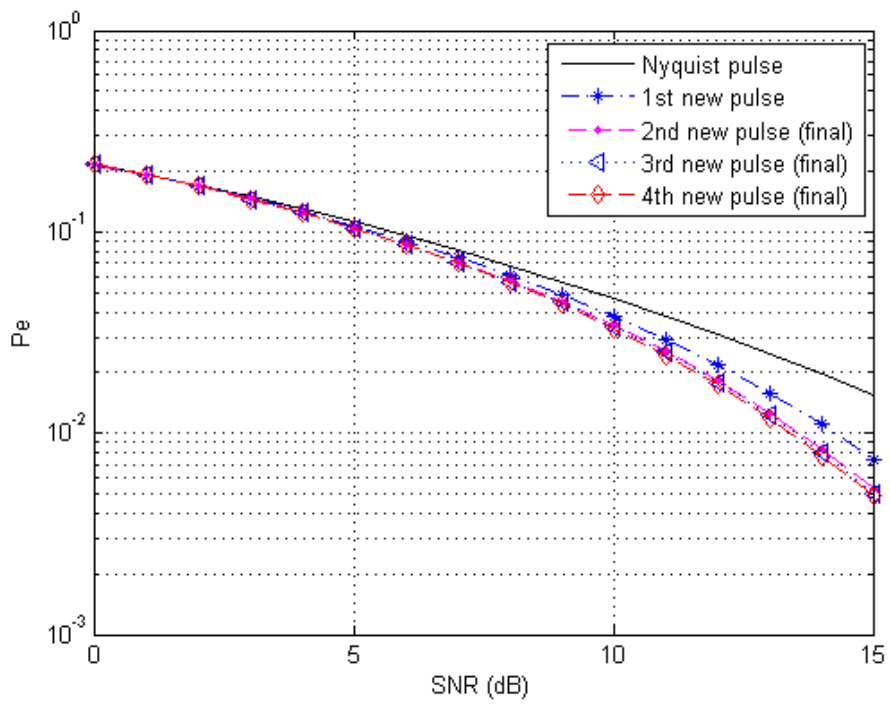
$$t/T_B = \pm 0.2$$



$$t/T_B = \pm 0.25$$

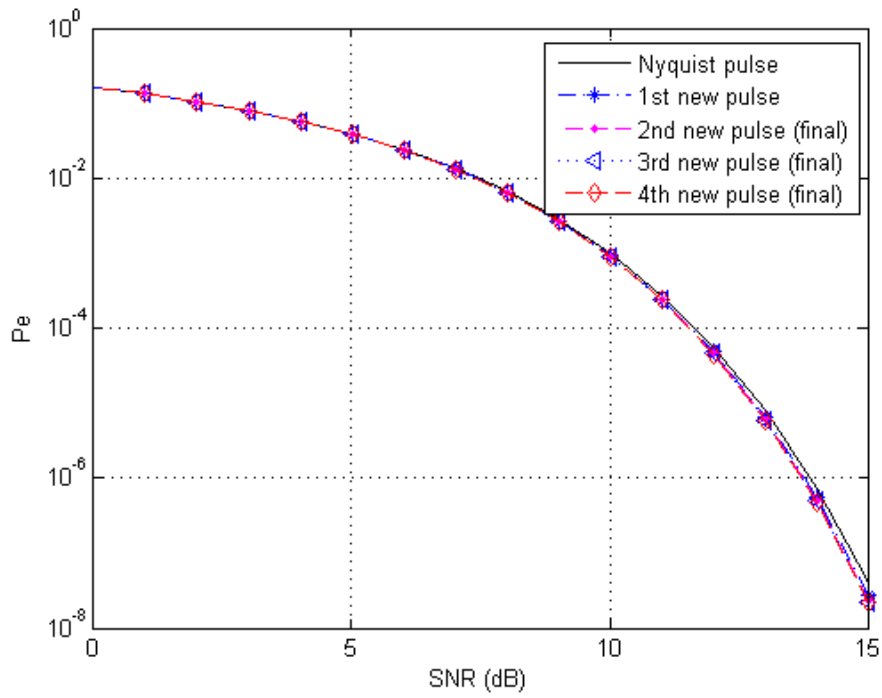


$$t/T_B = \pm 0.3$$

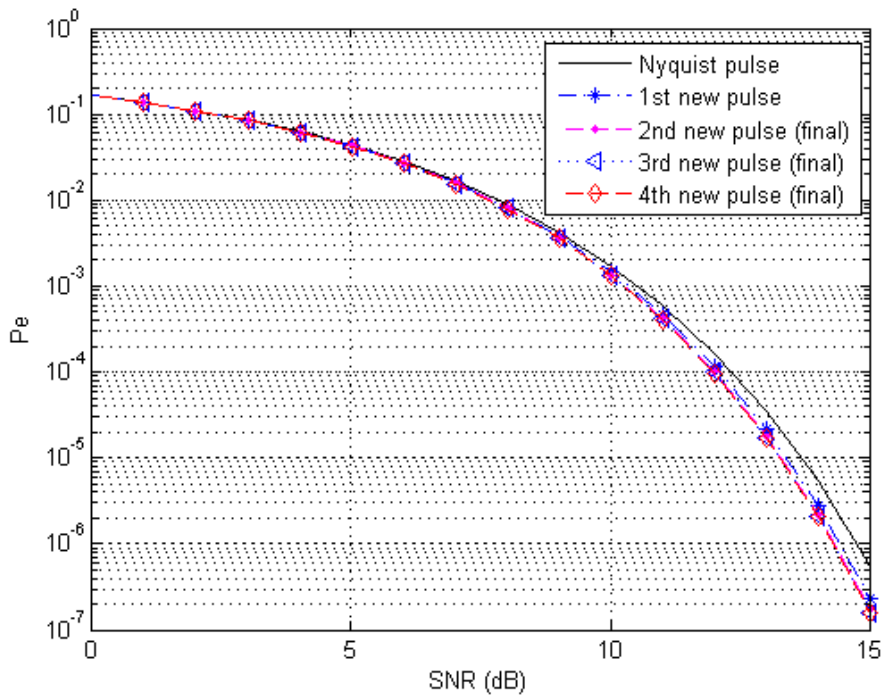


- Για roll-off factor ίσο με 0.5

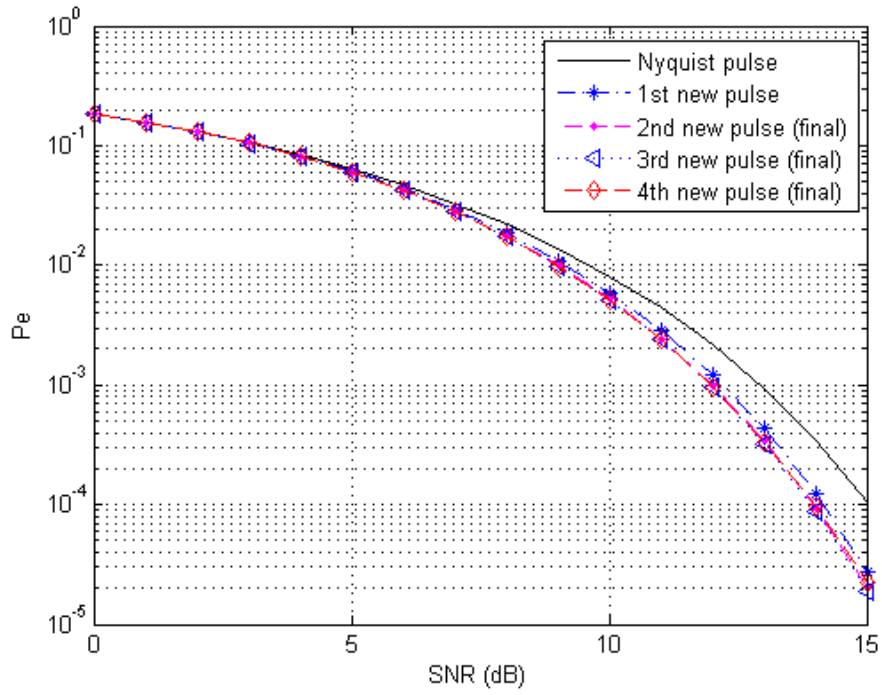
$$t/T_B = \pm 0.05$$



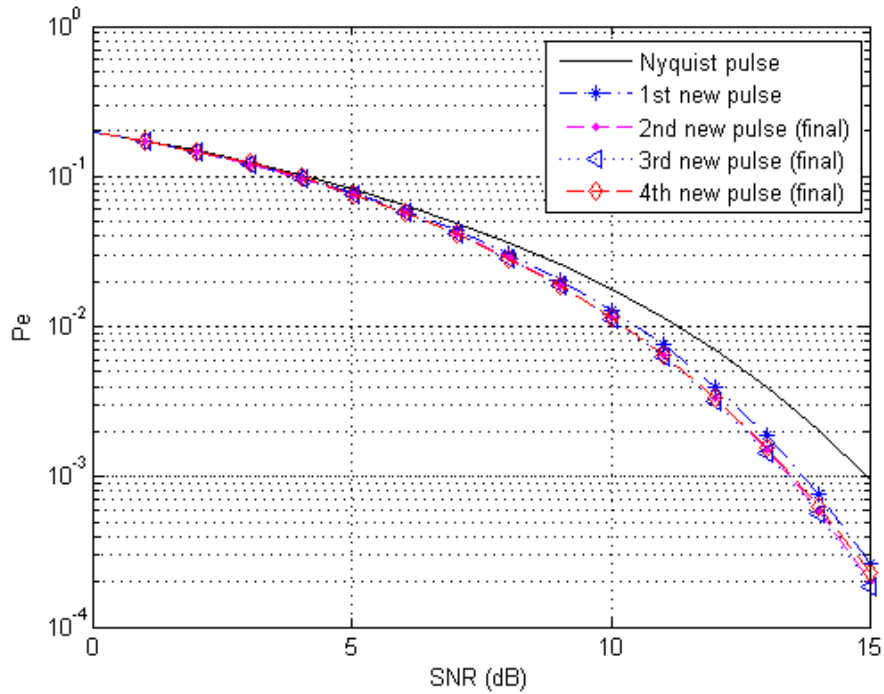
$$t/T_B = \pm 0.1$$



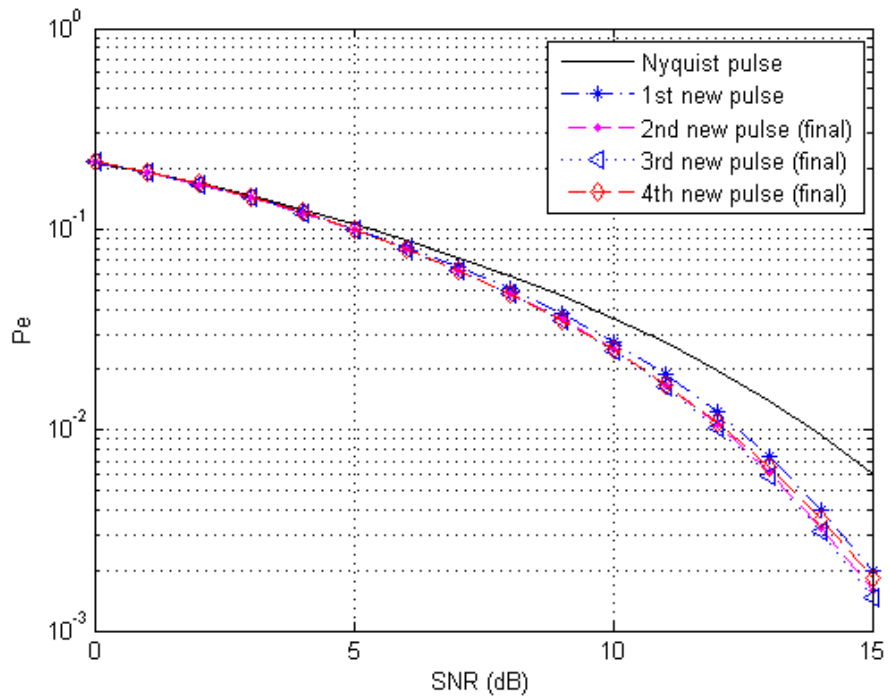
$$t/T_B = \pm 0.2$$



$$t/T_B = \pm 0.25$$

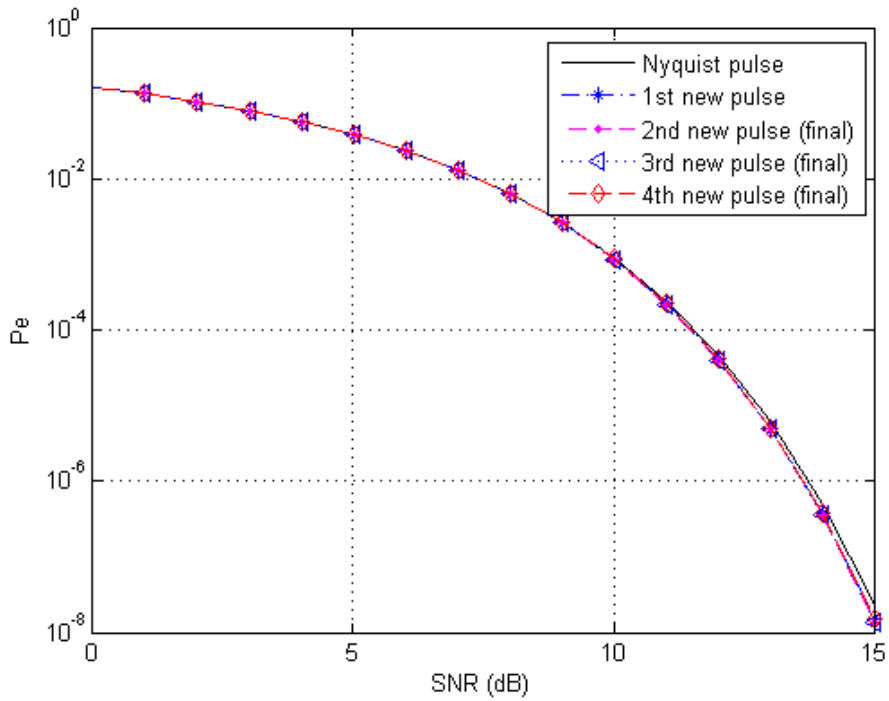


$$t/T_B = \pm 0.3$$

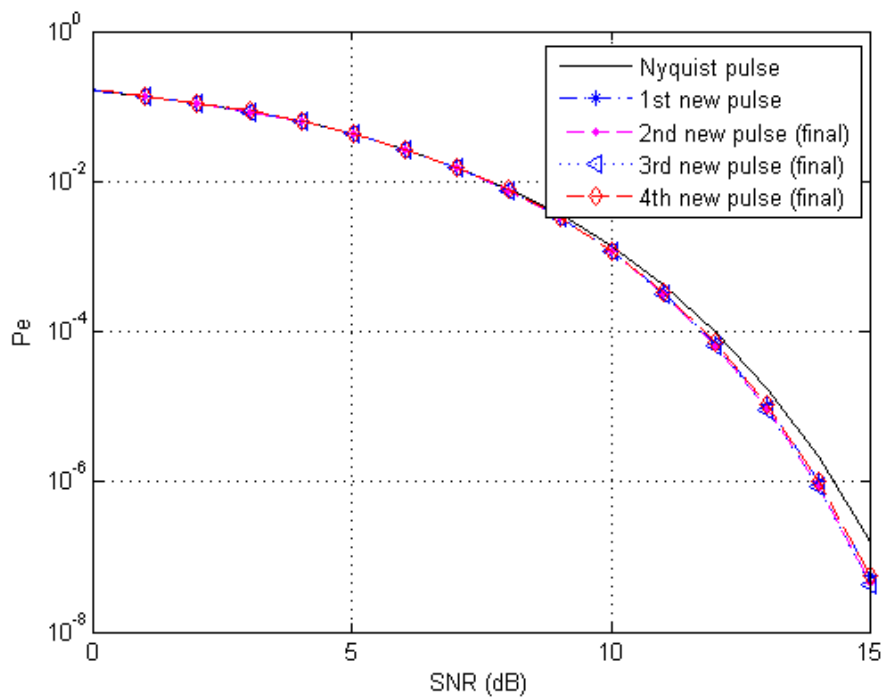


- Για roll-off factor ίσο με 0.75

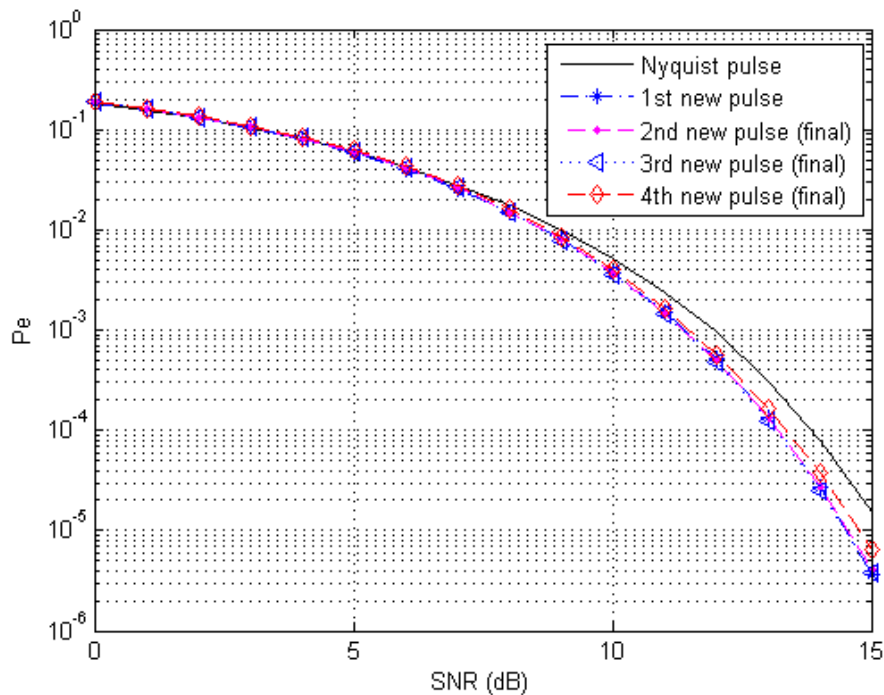
$$t/T_B = \pm 0.05$$



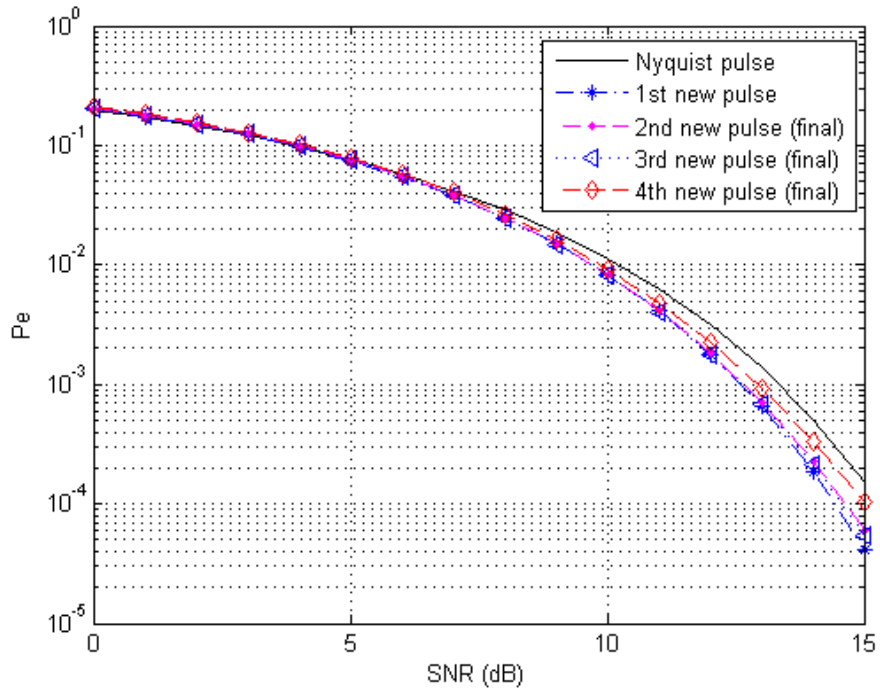
$$t/T_B = \pm 0.1$$



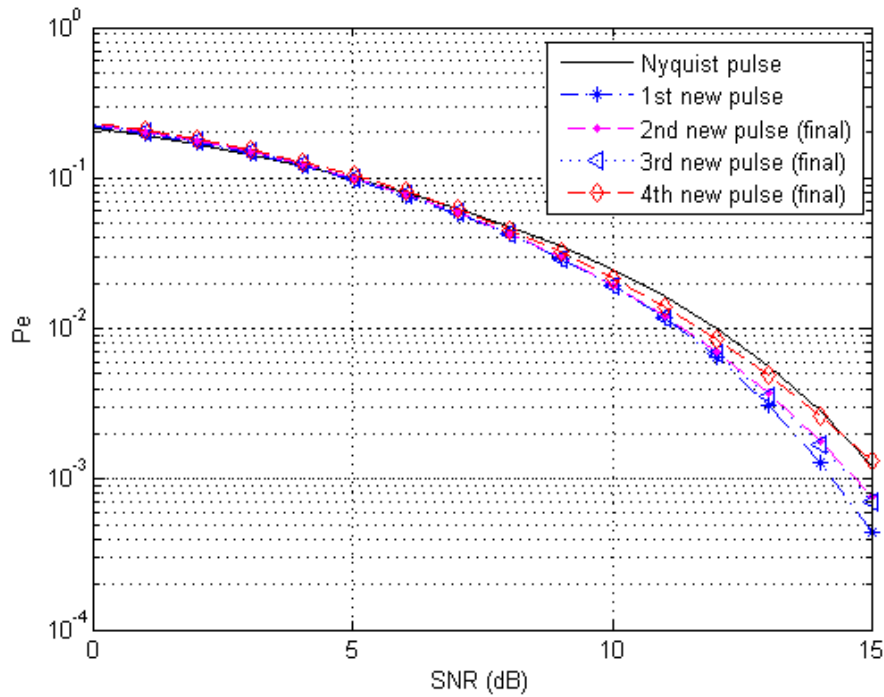
$$t/T_B = \pm 0.2$$



$$t/T_B = \pm 0.25$$

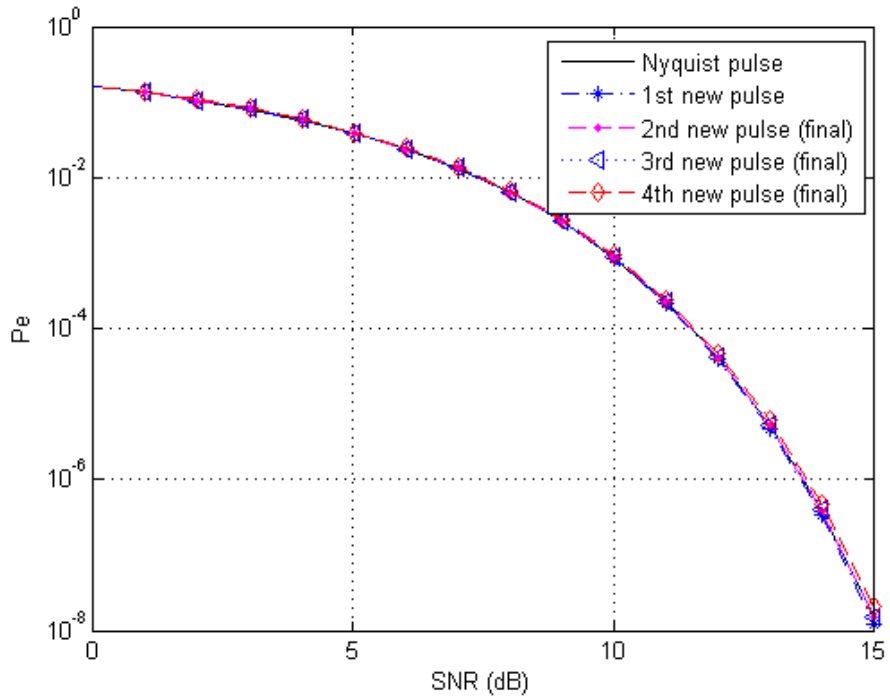


$$t/T_B = \pm 0.3$$

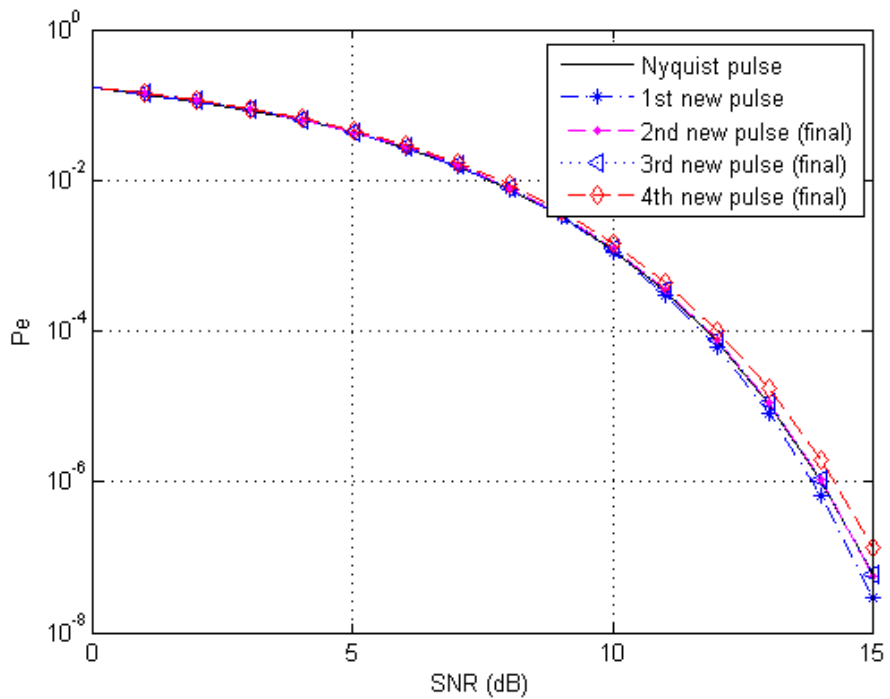


- Για roll-off factor ίσο με 1

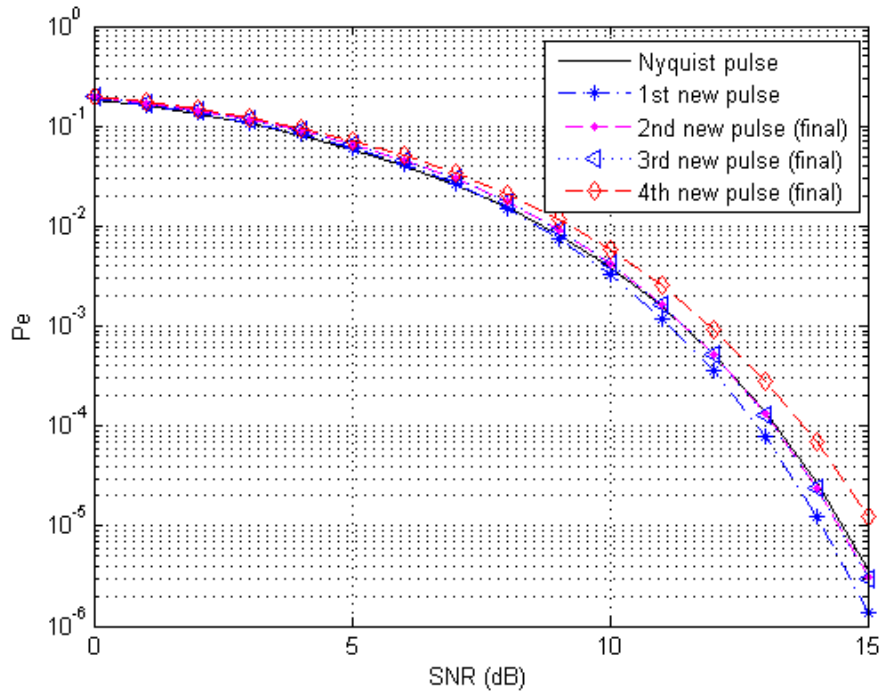
$$t/T_B = \pm 0.05$$



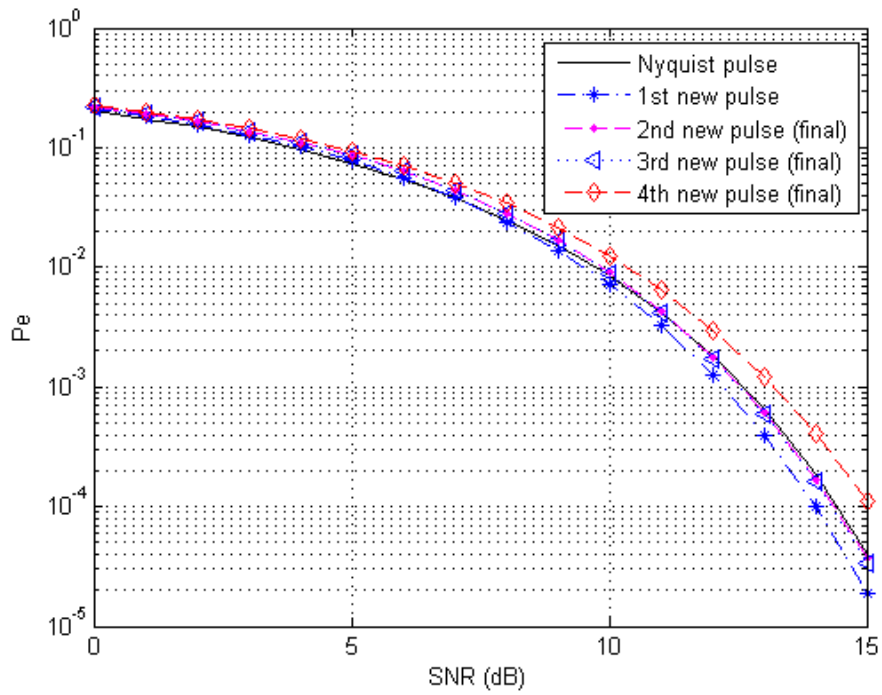
$$t/T_B = \pm 0.1$$



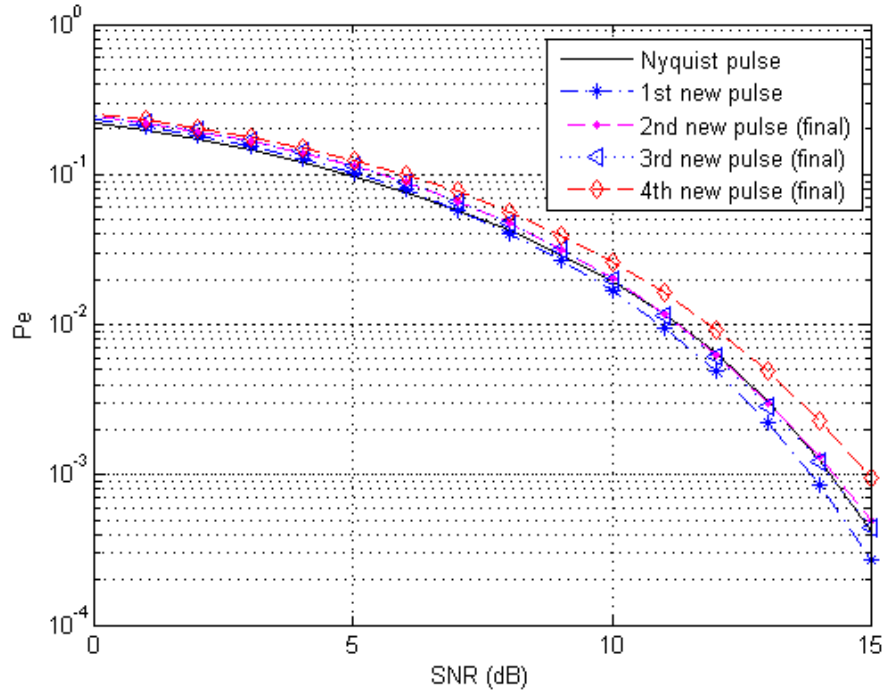
$$t/T_B = \pm 0.2$$



$$t/T_B = \pm 0.25$$



$$t/T_B = \pm 0.3$$



ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- [1] Norman C. Beaulieu, <<The Evaluation of Error Probabilities for Intersymbol and Cochannel Interference>>, IEEE Transactions on Communications, Vol. 39, No. 12, December 1991.
- [2] Norman C. Beaulieu, Christopher C. Tan, and Mohamed Oussama Dammen, <<A ‘‘Better Than’’ Nyquist Pulse>>, IEEE Communications Letters, Vol. 5, No. 9, September 2001.
- [3] Antonio Assalini and Andrea M. Tonello, <<Improved Nyquist Pulses>>, IEEE Communications Letters, Vol. 8, No. 2, February 2004.
- [4] Nicolae Dumitru Alexandru and Alexandra Ligia Onerfei Balan, <<Improved Nyquist Filters with Piece-Wise Parabolic Frequency Characteristics>>, IEEE Communications Letters, Vol. 15, No. 5, May 2011.
- [5] Νικόλαος Χ. Σαγιάς, <<Ψηφιακές Επικοινωνίες>>, Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου, Τμήμα Επιστήμης και Τεχνολογίας Τηλεπικοινωνιών, Σημειώσεις (2009-2010).
- [6] Κωνσταντίνος Σλαβάκης, <<Μετάδοση Σημάτων μέσω Καναλιών Περιορισμένου Εύρους Ζώνης και Διασυμβολική Παρεμβολή>>, Πανεπιστήμιο Πελοποννησου, Τμήμα Επιστήμης και Τεχνολογίας Τηλεπικοινωνιών, Σημειώσεις (2009-2010).
- [7] J. Proakis and M. Salehi , <<Συστήματα Τηλεπικοινωνιών>> , Εθνικό Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, (2002).
- [8] Γιώργος Φούσκας, <<Ψηφιακές Επικοινωνίες>>, Τόμος Β΄ , Ελληνικό ανοικτό πανεπιστήμιο, Πάτρα (2002).