ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΛΟΠΟΝΝΗΣΟΥ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Μεταπτυχιακή εργασία

Θεωρία Παιγνίων και προβλήματα βελτιστοποίησης

Σπυριδούλα Χωραΐτη
2009035

Επιβλέποντες:

Νίκος Πλατής
Λέκτορας

Γρηγόρης Καραγιώργος
Επίκουρος Καθηγητής ΑΤΕΙ Καλαμάτας

Τρίπολη, Μάιος 2013

Περίληψη

Η Θεωρία Παιγνίων είναι ένα σύνολο μοντέλων που χρησιμοποιείται σαν βασικό εργαλείο για την κατανόηση, ανάλυση, εξήγηση και μοντελοποίηση καταστάσεων, καταστάσεις στις οποίες αλληλεπιδρούν νοήμονες οντότητες προκειμένου να πάρουν μια απόφαση δράσης η οποία μεγιστοποιεί την ωφέλειά τους. Η αφαιρετικότητά τους, επιτρέπει να χρησιμοποιηθούν για τη μελέτη ενός ευρέος φάσματος φαινομένων. Η επιθυμητή έκβαση των καταστάσεων αυτών είναι μια τελική κατάσταση ισορροπίας (Ισορροπία Nash) όπου κανένας από τους εμπλεκόμενους (παίχτες) στην αλληλεπίδραση δεν έχει κίνητρο να αλλάξει την απόφαση δράσης του. Η Εξελικτική Θεωρία Παιγνίων βασίζεται στις αρχές της εξέλιξης της Δαρβινικής Θεωρίας και μελετά την έκβαση του παιγνίου μέσω της εξέλιξής του καθώς παίζεται σε βάθος χρόνου μέσα από πολλές γενεές. Πρωταγωνιστές δεν είναι πλέον οι ορθολογικοί παίχτες αλλά οι ίδιες οι στρατηγικές, οι οποίες περνούν στις επόμενες γενεές ή πεθαίνουν ανάλογα με το πόσο καλές είναι. Η στρατηγική η οποία θα επιβιώσει μέσα από τη διαδικασία εξέλιξης είναι η Εξελικτικά Σταθερή Στρατηγική δηλαδή η επιθυμητή τελική κατάσταση. Η Θεωρία Παιγνίων μπορεί να χρησιμοποιηθεί εξίσου, για τη μοντελοποίηση δύσκολων προβλημάτων συνδυαστικής βελτιστοποίησης, προβλημάτων που η δυσκολία τους έγκειται στο ότι ανήκουν στην κλάση NP. Το πρόβλημα του Περιοδεύοντος Πωλητή είναι ένα από τα πιο διάσημα προβλήματα συνδυαστικής βελτιστοποίησης καθώς, η εύρεση της συντομότερης διαδρομής που θα κάνει ο πωλητής προκειμένου να επισκεφθεί μια ακριβώς φορά την κάθε πόλη αρμοδιότητάς του, και να επιστρέψει στην πόλη αφετηρίας, απαιτεί εκθετικό χρόνο καθώς αυξάνονται οι πόλεις. Στην εργασία αυτή προσεγγίζεται το πρόβλημα του Περιοδεύοντος Πωλητή από τη σκοπιά της Θεωρίας Παιγνίων και μελετάται κατά πόσον μπορούν να εφαρμοστούν οι αρχές της. Ορίζεται το παίγνιο μέσω της Εξελικτικής Θεωρίας Παιγνίων,και παρουσιάζεται το εξελικτικό παίγνιο του προβλήματος του Περιοδεύοντος Πωλητή.

Abstract

Game Theory is a set of models and is used for understanding, analysing and also modelling situations in which people interact while they have to make a decision that optimize their profit.Their ablativeness allows the study of problems in wider categories. The desirable result of this kind of situations is a stable situation that is called Nash Equilibrium, in which no involver has the motive to diverse his decision. Evolutionary Game Theory relies in Darwin's Theory of Evolution and studies the game through generations as time passes. Rational player and his way of thinking is not instrumental in Evulutionary Game, instead focuses at the strategies and their off-springs that die or survive depending of their fitness through generations.The strategy that survives after the evolutionary process is the Evolutionary Stable Strategy. Game Theory can also be used in order to modelize difficult combinatorial optimization problems. The well known Travelling Sales man Problem (TSP) is one of the most famous problem of this category. The present study examines whereas the principals of Game Theory can be applied or not and approaches the TSP problem through the aspect of Evolutionary Game Theory. This approach turn the heuristic methods and local search to advantages.Finally the Evolutionary game of Travelling Sales man Problem is presented through this viewpoint.

Η συμπαράσταση της οικογενειάς μου, των φίλων μου και των καθηγητών μου οι οποίοι στάθηκαν δίπλα μου καθόλη τη διάρκεια των σπουδών μου έως και τώρα ήταν καθοριστική. Χωρίς εσάς η παρούσα εργασία δεν θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί.

Σας Ευχαριστώ.

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Η παρούσα μελέτη πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια της εκπόνησης της διπλωματικής εργασίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών (κατεύθυνση «Τεχνολογία Λογισμικού») του Τμήματος Επιστήμης και Τεχνολογίας Υπολογιστών του Πανεπιστημίου Πελοποννήσου.

Το υπό μελέτη πρόβλημα καθώς και ο τομέας της επιστήμης που ερευνήθηκαν επιλέχθηκαν λόγω της παραλληλίας τους με την ζωή, η οποία θα μπορούσε να χαρακτηριστεί σαν ένα παιχνίδι στα πλαίσια του οποίου ερχόμαστε καθημερινά αντιμέτωποι με τις συνέπειες των αποφάσεών μας, αποφάσεις που πρέπει να παρθούν και ορισμένες φορές μας τοποθετούν σε διλήμματα. Το ταξίδι του Πλανόδιου Πωλητή αντιπροσωπεύει αφενός μεν τις καθημερινές μάχες στις οποίες ο απολογισμός των απωλειών ή κερδών αποσκοπεί στο βέλτιστο, αφετέρου δε το ταξίδι της ζωής όπου καθώς κλείνει ο κύκλος από την ανυπαρξία στην ανυπαρξία (σαν την επιστροφή του Πλανόδιου Πωλητή στην πόλη από όπου ξεκίνησε) γίνεται αναπόληση του ταξιδιού και συγχρόνως απολογισμός του τι κερδίσαμε και τι χάσαμε σύμφωνα με τις αποφάσεις που πήραμε.

Κεφάλαιο 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Συνεισφορά της παρούσας εργασίας

Η Θεωρία Παιγνίων μελετά την έκβαση ενός παιγνίου, και μπορεί να χρησιμοποιηθεί εξίσου για τη μοντελοποίηση δύσκολων προβλημάτων συνδυαστικής βελτιστοποίησης, προβλημάτων που η δυσκολία τους έγκειται στο ότι ανήκουν στην κλάση NP (Υπολογιστικά σε μη πολυωνυμικό χρόνο).

Το πρόβλημα του Περιοδεύοντος Πωλητή (Traveling Salesman Problem, TSP) είναι ένα από τα πιο διάσημα προβλήματα συνδυαστικής βελτιστοποίησης, καθώς η εύρεση της συντομότερης διαδρομής που θα κάνει ο πωλητής προκειμένου να επισκεφθεί μια ακριβώς φορά την κάθε πόλη αρμοδιότητάς του, και να επιστρέψει στην πόλη αφετηρίας, απαιτεί εκθετικό χρόνο καθώς αυξάνονται οι πόλεις.

Στην εργασία αυτή προσεγγίζεται το πρόβλημα του Περιοδεύοντος Πωλητή από τη σκοπιά της Θεωρίας Παιγνίων και μελετάται κατά πόσον μπορούν να εφαρμοστούν σε αυτό οι αρχές της . Ορίζεται το παίγνιο μέσω της Εξελικτικής Θεωρίας Παιγνίων (ΕΘΠ), όπου πρωταγωνιστές είναι οι στρατηγικές και όχι οι παίχτες.

1.2 Δομή της εργασίας

Στο δεύτερο κεφάλαιο της εργασίας γίνεται γνωριμία με τη Θεωρία Παιγνίων και αναπτύσσονται οι βασικές αρχές της. Ορίζεται τι είναι στρατηγική και στρατηγικό παίγνιο και παρουσιάζονται χαρακτηριστικά στρατηγικά παίγνια. Τέλος γίνεται λόγος για τις βέλτιστες απαντήσεις και ορίζεται η αυστηρά κυρίαρχη στρατηγική.

Στο τρίτο κεφάλαιο ορίζεται η Ισορροπία Nash (Nash Equilibrium, NE) καθαρής στρατηγικής και η Ισορροπία Nash μικτής στρατηγικής και μελετώνται χαρακτηριστικα παίγνια ως προς την ύπαρξη Ισορροπίας Nash.

Στο τέταρτο κεφάλαιο γίνεται λόγος για την απροσδιοριστία, φαινόμενο το οποίο παρατηρείται όταν υπάρχουν πολλαπλές ισορροπίες Nash και αδυναμία επιλογής μίας εξ αυτών. Παρουσιάζεται μια σειρά από εκλεπτύνσεις οι οποίες έχουν σκοπό τη μείωση του συνόλου των Ισορροπιών Nash.

Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η Εξελικτική Θεωρία Παιγνίων, οι βασικές αρχές της καθώς και οι λόγοι για τους οποίους η κλασική Θεωρία Παιγνίων δεν αρκεί για την αντιμετώπιση ενός συνόλου από παίγνια. Επίσης παρουσιάζονται χαρακτηριστικά στρατηγικά παίγνια σαν Εξελικτικά Παίγνια. Ορίζεται η Εξελικτικά Σταθερή Στρατηγική (ΕΣΣ) ενώ στη συνέχεια σχετίζεται με την Ισορροπία Nash.

Στο έκτο κεφάλαιο γίνεται λόγος για τα προβλήματα συνδυαστικής βελτιστοποίησης καθώς και οι τρόποι αντιμετώπισής τους. Παρουσιάζεται το Πρόβλημα του Περιοδεύοντος Πωλητή όπως και προηγούμενοι τρόποι αντιμετώπισής του. Προσεγγίζεται το πρόβλημα εφαρμόζοντας της αρχές της Εξελικτικής Θεωρίας Παιγνίων κανοντας χρήση χαρακτηριστικων και κριτηρίων του αλγοριθμου Lin Kernighan και τροποποιήσεων αυτού, και παρουσιάζεται το εξελικτικό παίγνιο του υπό μελέτη προβλήματος.

Κεφάλαιο 2

ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ

2.1 Τι είναι η Θεωρία Παιγνίων

[OR94],[Osb02],[Βαρ07]

Η Θεωρία Παιγνίων μας βοηθά να καταλάβουμε καταστάσεις στις οποίες οι άνθρωποι παίρνουν αποφάσεις ενώ αλληλεπιδρούν. Αποτελείται από μια συλλογή μοντέλων όπου το κάθε ένα από αυτά είναι μια γενίκευση που χρησιμοποιούμε για να καταλάβουμε τις παρατηρήσεις και τις εμπειρίες μας. Ένα μοντέλο είναι μια γενίκευση παρόμοιων καταστάσεων, όταν έχουν αφαιρεθεί οι λεπτομέρειες που χαρακτηρίζουν την κάθε μια από αυτές κρατώντας τις γενικές αρχές που εφαρμόζονται σε όλες τους. Η Θεωρία Παιγνίων αντανακλά το παιχνίδι της ζωής, στην καθημερινότητα της οποίας παίχτες είναι οι άνδρες, οι γυναίκες, τα παιδιά, οι επιχειρήσεις κτλ., που αντιμετωπίζουν καταστάσεις λιγότερο ή περισσότερο σοβαρές ή σημαντικές ενώ πρέπει να πάρουν κάποιες αποφάσεις σύμφωνα με τις οποίες θα πορευτούν, και οι οποίες καθορίζουν την ωφέλειά τους, δηλαδή το κέρδος τους.

Ουσιαστικά μοντελοποιώντας καταστάσεις και φαινόμενα με τη μορφή παιχνιδιού, το οποίο αποτελείται από : **Τους παίχτες, το σύνολο των κινήσεων που μπορεί να κάνει ο κάθε παίχτης, το σύνολο των κανόνων του παιχνιδιού και μια συνάρτηση ωφέλειας** είναι εφικτό να προβλεφθεί η έκβαση της κατάστασης στην οποία εμπλέκονται οι νοήμονες οντότητες.

Οι παίχτες είναι οι προσομοιώσεις των νοημόνων οντοτήτων που αλληλεπιδρούν. Το σύνολο των κινήσεων αντιστοιχούν στο σύνολο επιλογών που έχουν στη διάθεσή τους οι νοήμονες οντότητες. Το σύνολο των κανόνων καθορίζουν τις επιτρεπτές κινήσεις των παιχτών, και η συνάρτηση ωφέλειας είναι ο τρόπος με τον οποίο αξιολογείται ως προς το κέρδος η κάθε κίνηση. Με άλλα λόγια η συνάρτηση ωφέλειας αποδίδει μια αριθμητική τιμή εξόφληση (payoff) που αντιστοιχεί στο πόσο ωφελημένος θα είναι ο παίχτης αν επιλέξει την κίνηση.

Στη θεωρία Παιγνίων θεωρείται ότι ένα παιχνίδι έχει λυθεί όταν η μελέτη του παιγνίου αυτού καταλήγει σε σαφείς προβλέψεις για την έκβαση του. Συχνά ο όρος ισορροπία χρησιμοποιείται ως συνώνυμο του «λύση» .

2.2 Ιστορική Αναδρομή

[NM44], [Nas50b], [Nas50a], [ΚΣ02]

Οι πρώτες θεωρητικές ιδέες τέθηκαν από το Newman το 1928 στο άρθρο του για τα αυστηρά ανταγωνιστικά παίγνια μηδενικού αθροίσματος. Το 1944 οι Newman και Mongersten καθιέρωσαν τη Θεωρία Παιγνίων σαν επιστήμη με το βιβλίο τους Theory of games and economic behavior.

Λίγα χρόνια αργότερα ο Nash θεμελίωσε την επιστήμη της Θεωρίας Παιγνίων. Όντας ακόμα μεταπτυχιακός φοιτητής, στη διπλωματική του εργασία απέδειξε την ύπαρξη μιας τουλάχιστον μικτής Ισορροπία Nash για κάθε στρατηγικό παίγνιο περιορισμένων στρατηγικών. Έκτοτε η ΘΠ εξελίχθηκε και συναντάται σε εκτεταμένες εφαρμογές σε πολλούς επιστημονικούς κλάδους

2.3 Βασικές αρχές της Θεωρίας Παιγνίων

[OR94] ,[Βαρ07]

2.3.1 Η θεωρία της ορθολογικής συμπεριφοράς

Η θεωρία της ορθολογικής συμπεριφοράς είναι ένα βασικό στοιχείο της Θεωρίας Παιγνίων. και παρατηρείται εκ των υστέρων από τον τρόπο που έχει δράσει ο παίχτης.

Ο παίχτης είναι ορθολογικός όταν δρα με μοναδικό σκοπό το προσωπικό του όφελος και τη μεγιστοποίηση αυτού. Η συμπεριφορά του παίχτη είναι ορθολογική με την έννοια ότι πριν δράσει έχει λάβει γνώση των εναλλακτικών λύσεών του, των μορφών προσδοκιών των υπολοίπων παιχτών, έχει σαφείς προτιμήσεις και επιλέγει τη δράση του σκοπίμως μετά από κάποια διαδικασία βελτιστοποίησης.

Σύμφωνα λοιπόν με την θεωρία της ορθολογικής συμπεριφοράς, ο κάθε παίχτης επιλέγει από ένα σύνολο διαθέσιμων κινήσεων αυτή που είναι σύμφωνη με τις προτιμήσεις του. Ο παίχτης γνωρίζει τη σειρά των προτιμήσεών του μέσω μιας συνάρτησης η οποία δεν κάνει τίποτε άλλο από το να αντιστοιχεί μια αριθμητική τιμή στο όφελος που θα αποκομίσει ο παίχτης αν επιλέξει την κάθε κίνηση, γι’ αυτό και καλείται συνάρτηση ωφέλειας. Μέσω της συνάρτησης ωφέλειας οι προτιμήσεις διατάσσονται, με την πρώτη σε προτίμηση να έχει τη μεγαλύτερη αριθμητική τιμή και την τελευταία σε προτίμηση να έχει τη μικρότερη αριθμητική τιμή.

2.3.2 Κοινή Γνώση Ορθολογισμού

Η Κοινή Γνώση Ορθολογισμού (ΚΓΟ) είναι το στοιχείο εκείνο της ΘΠ που καθιστά ικανούς τους παίχτες να γνωρίζουν τις προτιμήσεις των άλλων παιχτών. Παίζοντας ορθολογικά ένας παίχτης - με σκοπό να αποκομίσει το μεγαλύτερο δυνατό κέρδος - κάνει την επιλογή του σύμφωνα πάντα με τις προτιμήσεις του. Έχοντας όμως συγχρόνως γνώση των αποδόσεων των κινήσεων του αντιπάλου του, του είναι το ίδιο γνωστές και οι προτιμήσεις αυτού (του αντιπάλου του) . Συνεπώς ο πρώτος παίκτης γνωρίζει τις προτιμήσεις του καθώς και, τις προτιμήσεις του αντιπάλου του, ο δεύτερος παίχτης (ο αντίπαλος) γνωρίζει τις δικές του προτιμήσεις και αυτές του πρώτου παίκτη αλλά, γνωρίζει επίσης ότι ο πρώτος παίχτης γνωρίζει τις δικές του, ο πρώτος παίχτης γνωρίζει ότι ο δεύτερος παίχτης γνωρίζει ότι το γνωρίζει κ.ο.κ. Τέλος όλοι γνωρίζουν ότι όλοι γνωρίζουν και όλοι γνωρίζουν ότι το γνωρίζουν. Αυτό σημαίνει ότι έχουν Κοινή Γνώση Ορθολογισμού.

2.3.3 Ευθυγραμμισμένες με Συνέπεια Πεποιθήσεις - ΕΣΠ

Για να προβλέψει ένας παίχτης την επιλογή του αντιπάλου του δεν αρκεί μόνο η Κοινή Γνώση Ορθολογισμού, για το λόγο ότι χρειάζεται να γνωρίζει και τον τρόπο με τον οποίο θα σκεφθεί ο αντίπαλος. Έτσι λοιπόν έχει εισαχθεί στην ΘΠ η υπόθεση των Ευθυγραμμισμένων με Συνέπεια Πεποιθήσεων.

Η υπόθεση αυτή εξασφαλίζει ότι

“ορθολογικά σκεπτόμενα άτομα θα συναγάγουν τα ίδια συμπεράσματα σχετικά με το πώς θα παιχτεί ένα παίγνιο εφόσον έχουν τις ίδιες πληροφορίες”

Εφόσον οι παίχτες έχουν κοινή γνώση των προτιμήσεων, έχοντας και οι δύο ορθολογική συμπεριφορά, τους δίδεται η δυνατότητα να κατανοήσουν τον τρόπο που θα σκεφθεί ο καθένας από αυτούς προκειμένου να κάνουν την επιλογή τους. Συνεπώς θα φθάσουν στο ίδιο συμπέρασμα, άρα θα κάνουν και τις ίδιες προβλέψεις ο ένας για τον άλλο.

2.3.4 Δράση σύμφωνα με τους κανόνες του παιγνίου

Οι παίχτες έχουν κοινή γνώση όσον αφορά τις διαθέσιμες κινήσεις τους, έχουν κοινή γνώση για τις αποδόσεις κάθε κίνησης, καθώς και τις προτιμήσεις τους αλλά επίσης, έχουν και κοινή γνώση των κανόνων του παιχνιδιού, οι οποίοι καθορίζουν το σύνολο των επιτρεπτών κινήσεων για κάθε παίχτη.

2.3.5 Αβεβαιότητα

Υπάρχουν περιπτώσεις όπου παρατηρείται αβεβαιότητα, και αυτό μπορεί να συμβαίνει είτε γιατί ο παίχτης είναι αδιάφορος μεταξύ δύο επιλογών, είτε γιατί δεν γνωρίζει το μέγεθος διαφοράς μεταξύ δύο επιλογών. Ας σημειωθεί ότι η συνάρτηση ωφέλειας διατάσει τις προτιμήσεις αλλά, δεν δείχνει πόσο πολύ προτιμάται μια επιλογή από μια άλλη. Σε καταστάσεις αβεβαιότητας η διάταξη των προτιμήσεων από τη συνάρτηση ωφέλειας γίνονται προοπτικές, δηλαδή τα αποτελέσματα και οι πιθανότητες αυτών, που αντιστοιχούν σε κάθε επιλογή. Όταν η πιθανότητα εμφάνισης μπορεί να επηρεάσει την προτίμηση μιας προοπτικής η διάταξη αναφέρεται στην προσδοκώμενη ωφέλεια. Τότε η συνάρτηση προσδοκώμενης ωφέλειας δίνει και ένα μέτρο έντασης των προτιμήσεων εκτός από τη διάταξή της.

2.4 Στρατηγικά Παίγνια - Ορισμός

[OR94],[Osb02],[Βαρ07],[ΛΜ12]

Ένα στρατηγικό παίγνιο (strategic game) είναι ένα μοντέλο αλληλεπίδρασης λήψης αποφάσεων στο οποίο οι φορείς λήψης αποφάσεων (οι παίχτες) επιλέγουν εκ των προτέρων ένα σχέδιο ενεργειών , όταν η επιλογή των παιχτών γίνεται ταυτόχρονα και τετελεσμένα.

ΟΡΙΣΜΟΣ

(Στρατηγικό παίγνιο με διατεταγμένες προτιμήσεις) Ένα στρατηγικό παιχνίδι αποτελείται από

1. Ένα πεπερασμένο σύνολο από N παίχτες

2. Για κάθε παίχτη i∈N υπάρχει ένα μη κενό σύνολο A_i (το σύνολο των κινήσεων που διαθέτει ο i παίχτης)

3. Για κάθε παίχτη i∈N υπάρχει μια σχέση προτίμησης στο σύνολο των δράσεων

Όταν το σύνολο A_i των κινήσεων του κάθε παίχτη είναι πεπερασμένο τότε το παίγνιο ονομάζεται πεπερασμένο παίγνιο

2.4.1 Καθαρές και μικτές στρατηγικές

Μια στρατηγική μπορεί να χαρακτηριστεί ως ένα σύνολο αποφάσεων (σχέδιο ενεργειών) που διατυπώνονται πριν από το “παίξιμο” και που ορίζει λεπτομερώς τις επιλογές που γίνονται από τον παιχτη σε κάθε δυνατή περίπτωση. Όταν το σχέδιο ενεργειών είναι διακριτά συγκεκριμένο τότε καλείται καθαρή στρατηγική (Pure Strategy). Ενώ όταν ο παίχτης ενεργεί ως εάν να επέλεγε τυχαία (πιθανοτικά) μεταξύ δύο ή περισσοτέρων καθαρών στρατηγικών τότε το σχέδιο δράσης παιξίματος ονομάζεται μικτή στρατηγική (Mixed Strategy).

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν ο παίχτης έχει στη διάθεσή του N στρατηγικές (S_1, S_2,… S_n), τότε η **μικτή στρατηγική** M ορίζεται από τις πιθανότητες (p_1, p_2,… p_n), με τις οποίες θα πρέπει να επιλέξει κάθε μια από τις στρατηγικές του. Ας σημειωθεί ότι για να είναι σαφώς καθορισμένη η M, κάθε μια από τις πιθανότητες (p_1, p_2,… p_n), πρέπει να βρίσκεται μεταξύ 0 και 1 και το άθροισμά τους να είναι ίσο με τη μονάδα. Όταν στα πλαίσια της επιλογής μιας μικτής στρατηγικής, δίνεται από τον παίχτη η πιθανότητα 1 σε μία μόνο στρατηγική S_j, τότε η επιλογή αυτής της μικτής στρατηγικής (p_1, p_2,… p_n) είναι ισοδύναμη με την επιλογή **καθαρής στρατηγικής** S_j

Την μικτή στρατηγική μπορεί να την επιλέξει κάποιος για να κρατήσει τους αντιπάλους σε αβεβαιότητα σχετικά με την επιλογή του, όπου σε αυτή την περίπτωση είναι και ο ίδιος εξίσου αβέβαιος ως προς το τι θα κάνει.

2.4.2 Ταξινόμηση παιγνίων

Η κατηγοριοποίηση των στρατηγικών παιγνίων ποικίλει ανάλογα με τα κριτήρια κατηγοριοποίησης.

Έτσι λοιπόν ανάλογα με το πλήθος των παιχτών υπάρχουν τα «παίγνια δύο παιχτών» και τα «παίγνια n παιχτών». Τα παίγνια ατελούς ή πλήρους πληροφόρησης σε σχέση με το αν οι παίχτες έχουν πλήρη γνώση του παιχνιδιού, του περιβάλλοντος και των κινήσεων που έχουν προηγηθεί. Τα «παίγνια συντονισμού» και τα «παίγνια ανταγωνισμού» είναι η κατηγορία στην οποία μπορεί να παρατηρηθεί ή όχι συνασπισμός παιχτών και δημιουργία ομάδας - η οποία κάλλιστα κάποια δεδομένη στιγμή μπορεί να παύσει- προκειμένου να ενώσουν τα ενδιαφέροντα τους για κοινό σκοπό με κοινή στρατηγική. Στα «στατικά παίγνια» η σειρά με την οποία παίζουν οι παίχτες δεν έχει σημασία, γι’ αυτό και θεωρείται πως παίζουν ταυτόχρονα, ενώ στα «δυναμικά παίγνια», η σειρά με την οποία λαμβάνονται οι αποφάσεις από τους παίχτες παίζει ρόλο. Ανάλογα από το αν το σύνολο των στρατηγικών είναι πεπερασμένο ή όχι διακρίνονται σε «πεπερασμένα» και «μη πεπερασμένα» παίγνια. Τα παίγνια «μηδενικού αθροίσματος» είναι τα παίγνια στα οποία το άθροισμα των αμοιβών των παιχτών είναι 0, δηλαδή η αμοιβή του ενός ισούται με την απώλεια του άλλου, ενώ στα «παίγνια μη μηδενικού αθροίσματος» επίσης μπορούν να παρατηρηθούν στοιχεία ανταγωνισμού όσο και συνεργασίας.

2.4.3 Αναπαράσταση Στρατηγικών Παιγνίων

Ένας συμβατικός τρόπος για την αναπαράσταση ενός πεπερασμένου στρατηγικού παιγνίου δύο παιχτών μη μηδενικού αθροίσματος είναι η χρήση ενός πίνακα, όπου οι γραμμές αντιστοιχούν στο 1ο παίχτη και στις καθαρές στρατηγικές του, και οι στήλες αντιστοιχούν στον 2ο παίχτη και στις αντίστοιχες καθαρές στρατηγικές του.

		Π2	
		c1	c2
Π1	r1	α, β	γ, δ
	r2	ε, ζ	η, θ

Οι δύο αριθμοί σε κάθε κελί δηλώνουν τις αποδόσεις των παιχτών συμφωνα με τη συναρτηση ωφελείας : όταν ο παίχτης σειράς επιλέξει την στρατηγική σειράς r και ο παίχτης στήλης επιλέξει τη στρατηγική c, ο πρώτος αριθμός του κελιού αντιστοιχεί στην ωφέλεια που θα αποκομίσει ο παίχτης σειράς και, ο δεύτερος αριθμός στην ωφέλεια που θα αποκομίσει ο παίχτης στήλης.

Αυτός ο τρόπος αναπαράστασης με χρήση διπίνακα καλείται κανονική μορφή παιγνίου ή αλλιώς στρατηγική μορφή

2.5 Χαρακτηριστικά Στρατηγικά Παίγνια

[EK10],[Osb02],[NTV07],[OR94],[Βαρ07]

2.5.1 Δίλημμα κρατουμένου (Prisoner's Dilemma - PD)

Το παίγνιο του διλήμματος του κρατουμένου αντιπροσωπεύει μια κατάσταση όπου δύο ύποπτοι έχουν συλληφθεί από την αστυνομία και ανακρίνονται σε ξεχωριστά δωμάτια. Η αστυνομία έχει σοβαρούς λόγους να πιστεύει ότι τα δύο άτομα ευθύνονται για μια ληστεία, αλλά τα αποδεικτικά στοιχεία δεν επαρκούν για να καταδικαστεί οποιοσδήποτε από τους δύο για τη ληστεία αυτή, εκτός και αν κάποιος από τους δύο καταδώσει τον άλλο. Ωστόσο, και οι δύο ύποπτοι αντιστάθηκαν κατά τη σύλληψη και μπορούν να καταδικαστούν για αντίσταση κατά της αρχής – το οποίο είναι και μικρότερο έγκλημα. Σε κάθε έναν από τους δύο υπόπτους ειπώθηκαν τα εξής

- Εάν ομολογήσεις και ο συνεργάτης σου δεν ομολογήσει, τότε θα αφεθείς ελεύθερος (αφού συνεργαστείς, και καταθέσεις σαν μάρτυρας κατηγορίας) και ο συνεργός σου θα κατηγορηθεί για τη ληστεία. Η ομολογία αυτή αρκεί για να τον καταδικάσει σε 10 χρόνια φυλάκισης.
- Αν ομολογήσετε και οι δύο, τότε δεν χρειάζεται κανένας να καταθέσει εναντίον κανενός. Θα καταδικαστείτε και οι δύο για τη ληστεία, αλλά, επειδή ομολογήσατε θα καταδικαστεί ο καθένας σας σε 4 χρόνια φυλάκισης.
- Αν κανένας από τους δύο δεν ομολογήσει, τότε δεν καταδικάζεται κανένας σας για τη ληστεία, αλλά θα εκτίσετε ποινή ίση με 1 χρόνο ο κάθε ένας για αντίσταση κατά της αρχής.

Για να μοντελοποιηθεί η κατάσταση σε παίγνιο θα πρέπει να εντοπιστούν οι παίχτες, το σύνολο των πιθανών στρατηγικών, και να προσδιοριστεί η συνάρτηση ωφέλειας καθώς και οι αποδόσεις των παιχτών.

Παίχτες : οι δύο ύποπτοι

Στρατηγικές : Ο κάθε παίχτης έχει δύο εναλλακτικές στρατηγικές (επιλογές κίνησης), να ομολογήσει (Cooperate -C) ή να μην ομολογήσει (Not Cooperate -NC), άρα το σύνολο των διαθέσιμων στρατηγικών για κάθε έναν από τους δύο είναι { C,NC }

Μετά την διερεύνηση του πώς θεμελιώνοντας λογικά τη σκέψη του,ο ένας από τους δύο υπόπτους, έστω ο **πρώτος ύποπτος (Υ1)**, θα αξιολογούσε τις επιλογές του, προκύπτουν τα εξής

1. Εάν ο δεύτερος ύποπτος (Υ2) ομολογήσει τότε : Αν ομολογησει ο Υ1 θα καταδικαστεί σε 4 χρόνια φυλάκισης και, αν δεν ομολογήσει σε 10 χρόνια φυλάκισης. Άρα σε αυτή την περίπτωση είναι καλύτερο για τον Υ1 να ομολογήσει
2. Εάν ο Υ2 δεν ομολογήσει τότε : Αν ομολογησει ο Υ1 θα αφεθεί ελεύθερος δηλαδή 0 χρόνια φυλάκισης και αν δεν ομολογήσει θα καταδικαστεί σε 1 χρόνο

Προκύπτει λοιπόν ότι και σε αυτή την περίπτωση, ο Υ1 είναι καλύτερα να ομολογήσει

Προτιμήσεις : Σύμφωνα με τα παραπάνω

- οι στρατηγικές του υπόπτου (Υ1) από το καλύτερο προς το χειρότερο διατάσσονται ως εξής : (C,NC) ελεύθερος, (NC,NC) με 1 χρόνο φυλάκισης, (C,C) με 4 χρόνια φυλάκισης, (NC,C) με 10 χρόνια φυλάκισης
- Για τον δεύτερο ύποπτο (Υ2) αντίστοιχα διατάσσονται ως εξής: (NC,C) ελεύθερος, (NC,NC) με 1 χρόνο φυλάκισης, (C,C) με 4 χρόνια φυλάκισης, (C,NC) με 10 χρόνια φυλάκισης

Συνάρτηση Ωφέλειας : Επιλέγοντας της συνάρτηση ωφέλειας u που θα αναπαριστά με αριθμητικές τιμές τη διάταξη των προτιμήσεων των υπόπτων ισχύουν τα εξής :

$$u_1(C,NC) > u_1(NC,NC) > u_1(C,C) > u_1(NC,C)$$

για τον Υ1, και

$$u_2(NC,C) > u_2(NC,NC) > u_2(C,C) > u_2(C,NC)$$

για τον Υ2.

Αναπαριστώντας τις αποδόσεις των στρατηγικών επίσης :

$$\begin{aligned} u_1(C,NC) &= 0 \\ u_1(NC,NC) &= 1 \qquad \text{Για τον Υ1} \\ u_1(C,C) &= 4 \\ u_1(NC,C) &= 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2(NC,C) &= 0 \\ u_2(NC,NC) &= 1 \qquad \text{Για τον Υ2} \\ u_2(C,C) &= 4 \\ u_2(C,NC) &= 10 \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας αυτές τις αναπαραστάσεις για την ωφέλεια του καθενός παίχτη (υπόπτου), το παιχνίδι αναπαριστάται με ένα διπίνακα όπου, οι δύο γραμμές αντιπροσωπεύουν τις πιθανές στρατηγικές του παίχτη1 (Υ1) και, οι δύο στήλες τις πιθανές στρατηγικές του παίχτη2 (Υ2)

		Υ2 NC	Υ2 C
Υ1	NC	$-1,-1$	$-10,0$
	C	$0,-10$	$-4,-4$

Διπίνακας παιγνίου Δίλημμα Κρατουμένου

Σαν αποτέλεσμα λοιπόν αναμένεται ότι, και οι δύο ύποπτοι θα ομολογήσουν και θα καταδικαστεί ο καθένας σε 4 χρόνια φυλάκισης, αφού ομολογία είναι η καλύτερη επιλογή ανεξάρτητα με το τι θα επιλέξει ο άλλος ύποπτος

Ωστόσο παρατηρείται ένα εντυπωσιακό φαινόμενο. Ο κάθε κρατούμενος έχει μια στρατηγική στη διάθεσή του, που θα του έδινε μεγαλύτερο όφελος. Είναι αυτή σύμφωνα με την οποία θα επέλεγαν και οι δύο να μην ομολογήσουν, όπου θα ήταν και οι δύο περισσότερο ωφελημένοι. Αυτό θα το πετύχαιναν αν κατάφερναν να συνεργαστούν. Όμως, αφ' ενός μεν στα πλαίσια του ορθολογικού παιξίματος δεν θα υπήρχε περίπτωση κάποιος από τους δύο να επιλέξει να μην ομολογήσει,αφου έτσι θα αποκόμιζε λιγότερα, και αφετέρου δε, έστω και αν ο ένας από τους δύο σκεφτόταν να επιλέξει να μην ομολογήσει, δεν θα ήταν σίγουρος ότι ο άλλος θα έκανε το ίδιο. Έχοντας λοιπόν την αμφιβολία, και χωρίς να μπορεί να έρθει σε συνεννόηση, ανά πάσα στιγμή θα μπορούσε να αλλάξει γνώμη.

Το φαινόμενο που παρατηρείται στο παίγνιο του Διλήμματος του Κρατουμένου αντιπροσωπεύει μια πολύ μεγάλη κατηγορία καταστάσεων όπου λειτουργώντας ορθολογικά, το προσωπικό όφελος υπερισχύει του κοινωνικού οφέλους (με πολλές φορές δραματικές συνέπειες).

2.5.2 Ανταγωνισμός Εξοπλισμών (Arm Race)

Κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις, καταστάσεις στις οποίες εμπλέκονται χώρες, μπορούν να μοντελοποιηθούν όπως το παίγνιο του Διλήμματος Κρατουμένου. Έστω ότι δύο χώρες εμπλέκονται σε μια κατάσταση εξοπλισμού με πυρηνικά όπλα. Κάθε χώρα από τις δύο μπορεί να εξοπλιστεί με πυρηνικό εξοπλισμό, ή μπορεί να το αποφύγει και να μην εξοπλιστεί.

Μια χώρα ωστόσο προτιμά περισσότερο να εφοδιαστεί με τον εξοπλισμό και η άλλη χώρα να μη εφοδιαστεί. Η επόμενη σε διάταξη προτίμηση σύμφωνα με την ωφέλεια που θα αποκομίσει, είναι καμία από τις δύο να μην εφοδιαστεί με τον εξοπλισμό. Η τρίτη σε σειρά προτίμηση είναι να εφοδιαστούν και οι δύο, ενώ, η τελευταία σε διάταξη προτίμηση είναι, να μην εξοπλιστεί με πυρηνικά όπλα, και η άλλη χώρα να εξοπλιστεί. Η κατάσταση μοντελοποιείται όπως το Δίλημμα του Κρατουμένου όπου ο εξοπλισμός αντιστοιχεί στην στρατηγική ομολογίας C, ενώ ο μη εξοπλισμός στη στρατηγική μη ομολογίας NC

Αυτή η γενίκευση της κατηγορίας καταστάσεων που αντιπροσωπεύει το παίγνιο του Διλήμματος Κρατουμένου συχνά καλείται Arm Race και θα μπορούσε να ειπωθεί διαφορετικά «ειρήνη με το φόβο των όπλων»

Σε περίπτωση που μια χώρα θα προτιμούσε να μην εφοδιαστεί με πυρηνικά όπλα αν η άλλη χώρα δεν εφοδιαζόταν, το παιχνίδι που θα προέκυπτε από την μοντελοποίηση της κατάστασης αυτής θα ήταν διαφορετικό από αυτό του Διλήμματος του Κρατουμένου

2.5.3 Παίγνια Συντονισμού (Coordination Games)

Υπάρχουν περιπτώσεις όπου η επιθυμητή έκβαση του παιχνιδιού επιτυγχάνεται μέσω συντονισμού των παιχτών με επιλογή της ίδιας στρατηγικής. Οι παίχτες συμφωνούν –και έχουν τη δυνατότητα να το κάνουν- να συνεργαστούν προκειμένου να επιτύχουν το σκοπό τους παρά να μη συνεργαστούν, αλλά διαφωνούν όσον αφορά τις ωφέλειες που θα αποκομίσουν. Είναι τα λεγόμενα παίγνια συντονισμού

Η Μάχη των Δύο Φύλων (Battle of Sexes-BoS)

Έστω ότι δύο άτομα επιθυμούν να πραγματοποιήσουν μια κοινή έξοδο. Δύο κονσέρτα είναι διαθέσιμα α. ένα με μουσική του Bach και β. ένα με μουσική του Stravinsky. Το ένα άτομο προτιμά να παρακολουθήσει το κονσέρτο του Bach και το άλλο άτομο αυτό του Stravinsky. Εάν κάποιος από τους δυο πάει σε διαφορετικό κονσέρτο από εκείνο που προτιμά θα είναι σχετικά δυσαρεστημένος αφού, θα παρακολουθήσει τη μουσική που προτιμά ο άλλος. Όμως η βασική προϋπόθεση είναι ότι, θέλουν να πραγματοποιήσουν κοινή έξοδο, συνεπώς πρέπει να πάρουν μια κοινή απόφαση. Αν δεν πάρουν κοινή απόφαση, δηλαδή δεν πραγματοποιήσουν την κοινή έξοδο τότε η αριθμητική τιμή που αντιστοιχεί στην ωφέλειά τους θα είναι 0, ενώ αν πάρουν κοινή απόφαση η διαφορά στην αριθμητική τιμή που αντιστοιχεί στην εξόφληση θα είναι 1 μονάδα. Η μορφή του παιγνίου που προκύπτει από τη μοντελοποίηση της κατάσταση αυτής περιγράφεται από τον παρακάτω διπίνακα

		Π2	
		B	S
Π1	B	$2, 1$	$0, 0$
	S	$0, 0$	$1, 2$

Διπίνακας παιγνίου Battle of Sexes

Το συγκεκριμένο παίγνιο συχνά καλείται και Battle of Sexes αφού η κατάσταση αντιπροσωπεύει κυρίως περιπτώσεις όπου τα δύο άτομα είναι διαφορετικού φύλου. Στο παίγνιο αυτό το χαρακτηριστικό είναι ότι οι παίχτες πρέπει να συντονιστούν και να επιλέξουν την ίδια στρατηγική

Κυνήγι Ελαφιού (Stag Hunt)

Μια ιδιαίτερη παραλλαγή όσον αφορά τα παιχνίδια συντονισμού είναι το παίγνιο Κυνήγι Ελαφιού, το οποίο περιγράφει την κατάσταση όπου δύο κυνηγοί έχουν βγει για κυνήγι ελαφιού. Αν συνεργαστούν και μείνουν προσηλωμένοι στο σκοπό τους θα κατορθώσουν να πιάσουν το ελάφι, μοιράζοντάς το μεταξύ τους σε δυο ίσα μέρη. Όμως, υπάρχει ο πειρασμός ο κάθε ένας από αυτούς να παρεκκλίνει και να πιάσει μόνος ένα λαγό, έχοντάς τον ολόκληρο για τον εαυτό του. Εάν και οι δύο οι κυνηγοί συνεργαστούν θα πιάσουν το ελάφι, εάν έστω και ένας από τους δύο παρεκκλίνει και κυνηγήσει το λαγό, το ελάφι θα ξεφύγει. Το στρατηγικό παίγνιο που μοντελοποιεί την κατάσταση αυτή ορίζεται ως εξής

Παίχτες : Οι δύο κυνηγοί

Στρατηγικές : Για κάθε παίχτη υπάρχουν δυο πιθανές στρατηγικές, κυνήγι ελαφιού (S), και κυνήγι λαγού (H). Συνεπώς το σύνολο των κινήσεων (S,H) είναι και το σύνολο των στρατηγικών των δύο παιχτών

Προτιμήσεις : Για κάθε παίχτη ισχύει ότι, η επιλογή στην οποία και οι δύο κυνηγοί επιλέγουν να κυνηγήσουν το ελάφι (S), είναι στην πρώτη προτίμηση με τη μεγαλύτερη ωφέλεια, ακολουθούμενη από αυτές σύμφωνα με τις οποίες, επιλέγει να κυνηγήσει λαγό (H).Τελευταία σε διάταξη προτίμηση είναι αυτή που επιλέγει να κυνηγήσει μόνος το ελάφι (S), δηλαδή να μείνει προσηλωμένος στο σκοπό του και ο άλλος κυνηγός να κυνηγήσει λαγό (H), όμως σε αυτή την περίπτωση το ελάφι ξεφεύγει και δεν αποκομίζει τίποτα.

Το παίγνιο Κυνήγι Ελαφιού μπορεί να θεωρηθεί μια παραλλαγή του Διλήμματος του Κρατουμένου που προκύπτει από τις αλλαγές στις εξοφλήσεις, όπως επίσης και του παιγνίου Arm Race, το όποιο σε αυτή την περίπτωση καλείται και «δίλημμα ασφάλειας» μεταξύ δύο χωρών.

		Π2	
		S	H
Π1	S	2, 2	0, 1
	H	1, 0	1, 1

Διπίνακας παιγνίου Stag Hunt

		Π2	
		R	A
Π1	R	3, 3	0, 2
	A	2, 0	1, 1

Διπίνακας παραλλαγής παιγνίου Arm Race

Το παίγνιο Κυνήγι Ελαφιού διαφέρει από τα παίγνια Arm Race και Δίλημμα του Κρατουμένου όσον αφορά το γεγονός ότι, και οι δύο χώρες προτιμούν να μην εξοπλιστούν (R), αφού αποφεύγοντας τα έξοδα εξοπλισμού έχουν μεγαλύτερο κέρδος, από το να εξοπλιστούν και οι δύο μαζί (A) ,ή να εξοπλιστεί η κάθε μια μόνη της ώστε να επιβληθεί στην άλλη. Σημειώνεται ότι το κόστος εξοπλισμού είναι μεγαλύτερο από το κέρδος εάν η άλλη χώρα δεν εξοπλιστεί.

2.5.4 Γεράκι - Περιστέρι (Hawk-Dove, HD)

Ένα διαφορετικό αλλά θεμελιώδες στο είδος του παίγνιο, είναι αυτό που οι παίχτες εμπλέκονται σε ένα είδος «αντι-συντονισμού». Πιθανότατα το πιο χαρακτηριστικό παίγνιο αυτής της κατηγορίας είναι το παίγνιο Γεράκι-Περιστέρι το οποίο «γεννήθηκε» από την ακόλουθη ιστορία. Δύο ζώα εμπλέκονται μεταξύ τους σε ένα διαγωνισμό, για να αποφασίσουν πώς θα μοιραστούν ένα κομμάτι φαγητού. Το κάθε ζώο μπορεί να επιλέξει να συμπεριφερθεί επιθετικά (Στρατηγική γεράκι, H) ή παθητικά (Στρατηγική περιστέρι, D). Εάν και τα δύο ζώα συμπεριφερθούν παθητικά, τότε χωρίζουν το φαγητό σε δύο ίσα μέρη, έχοντας ωφέλεια 3. Εάν το ένα ζώο φερθεί παθητικά και το άλλο επιθετικά τότε, το επιθετικό ζώο θα πάρει το περισσότερο μέρος του φαγητού, λαμβάνοντας ωφέλεια 5, ενώ το παθητικό ζώο θα πάρει σαν ωφέλεια μόνο 1. Αλλά, αν και τα δύο ζώα φερθούν επιθετικά, τότε θα καταστρέψουν το φαγητό, και υπάρχει πιθανότητα να τραυματιστούν άρα, η συνολική ωφέλεια σε αυτή την περίπτωση είναι 0. Το παίγνιο που προκύπτει αναπαριστάται στην κανονική του μορφή από τον κάτωθι διπίνακα

		Z2	
		B	S
Z1	B	3, 3	1, 5
	S	5, 1	0, 0

Διπίνακας στρατηγικού παιγνίου Hawk - Dove

Μια διαφορετική κατάσταση, η οποία μπορεί να περιγραφεί με το παίγνιο Γεράκι Περιστέρι είναι αυτή όπου οι πρωταγωνιστές δεν είναι τα δύο ζώα αλλά δύο χώρες. Το παιχνίδι Γεράκι – Περιστέρι είναι ένα ακόμα παράδειγμα που αναδεικνύει ένα διαφορετικό παίγνιο που προκύπτει μετά από μικρές αλλαγές στις ωφέλειες στο παιχνίδι του Διλήμματος του Κρατουμένου. Το χαρακτηριστικό στο παίγνιο Γεράκι Περιστέρι όπως και στο Δίλημμα του Κρατουμένου, είναι πως ο παίχτης σαν ορθολογικός επιλέγει τη στρατηγική από την οποία αποκομίζει μεγαλύτερο όφελος στην προκείμενη περίπτωση τη στρατηγική Η. Η κατάσταση που αντιπροσωπεύει το παίγνιο Γεράκι Περιστέρι είναι παρόμοια και με αυτήν του παιγνίου Arm Race σαν παραλλαγή του παιγνίου του Διλήμματος του Κρατουμένου αλλά με διαφορετικές προτιμήσεις. Υποθέτοντας ότι οι δύο χώρες, επιλέγουν ταυτόχρονα εάν φερθούν επιθετικά ή παθητικά στην εξωτερική τους πολιτική. Κάθε χώρα ελπίζει να κερδίσει περισσότερα μέσω της επιθετικής συμπεριφοράς, αλλά αν και οι δύο φερθούν επιθετικά, ρισκάροντας εξίσου η σύγκρουση αυτή να καταλήξει σε πόλεμο, κάτι το οποίο θα ήταν καταστροφικό και για τις δύο.

2.6 Βέλτιστες απαντήσεις και κυρίαρχες στρατηγικές

[EK10],[Osb02],[NTV07],[OR94],[Βαρ07],[NM44]

Αναλύοντας λοιπόν ένα παίγνιο (όπως στο Δίλημμα του Κρατουμένου) μπορεί να παρατηρηθεί το εξής: ο κάθε παίχτης έχει μια μοναδικά βέλτιστη στρατηγική σαν απάντηση στη στρατηγική του αντιπάλου του που δίνει τη βέλτιστη απόδοση σε κάθε περίπτωση, ανεξάρτητα από το τι θα παίξει ο άλλος παίχτης. Οι στρατηγικές που έχουν αυτή την ιδιότητα ονομάζονται αυστηρά κυρίαρχες στρατηγικές (strictly dominant strategies). Αντίθετα οι στρατηγικές που οδηγούν με βεβαιότητα σε κατώτερα αποτελέσματα, σε σύγκριση με κάποια άλλη στρατηγική, καλούνται αυστηρά κυριαρχούμενες στρατηγικές (strictly dominated strategies)

2.6.1 Η έννοια της βέλτιστης απάντησης

Βέλτιστη απάντηση : Είναι η καλύτερη επιλογή ενός παίχτη, δεδομένων των πεποιθήσεων που έχει σχηματίσει για το τι θα κάνει ο άλλος παίχτης. Μια στρατηγική S για τον παίχτη 1, είναι η **βέλτιστη απάντηση** σε μια στρατηγική T του παίχτη 2, εάν η S δίνει τουλάχιστον το ίδιο καλή (υψηλή) ωφέλεια όσο οποιαδήποτε άλλη στρατηγική όσον αφορά την T

$u_1\,(S,T) \geq u_1\,(S',\mathrm{T})$ για όλες τις άλλες στρατηγικές S΄ του παίχτη 1.

Βάσει των παραπάνω επιτρέπεται διαφορετικές στρατηγικές συγκρινόμενες με τη T, να αποτελούν βέλτιστη απάντηση. Δίνεται έμφαση στο να υπάρχει μοναδική βέλτιστη απάντηση λέγοντας ότι: η στρατηγική S του παίχτη1 είναι αυστηρά βέλτιστη απάντηση στην στρατηγική T του παίχτη 2 εάν η S δίνει αυστηρά υψηλότερη ωφέλεια από οποιαδήποτε άλλη στρατηγική όσον αφορά τη T

$u_1\,(S,T) > u_1\,(S',\mathrm{T})$ για όλες τις άλλες στρατηγικές S΄ του παίχτη 1.

Το σύνολο των βέλτιστων απαντήσεων του παίχτη i δίνεται ως $B_i\,(\alpha_{-i})$ όταν η λίστα των ενεργειών των άλλων παιχτών είναι α_{-i}.

Συγκεκριμένα ορίζεται η συνάρτηση B_i ως

$$B_i(\alpha_{-i}) = \{\alpha_i \; in \; A_i : u_i(\alpha_i,\alpha_{-i}) \geq u_i(\alpha_i',\alpha_{-i}) \text{ για όλες τις } \alpha_i \text{ που ανήκουν στο } A_i\}$$

που σημαίνει ότι οποιαδήποτε ενέργεια στο $B_i(\alpha_{-i})$ είναι τουλάχιστον το ίδιο καλή για τον παίχτη i, όσο οποιαδήποτε άλλη ενέργεια του παίχτη i όταν, η ενέργεια του άλλου παίχτη δίνεται a_{-i}.

Συμπερασματικά, όταν ο παίχτης έχει μια μοναδικά βέλτιστη απάντηση στην T τότε, αυτή είναι αναμφισβήτητα η στρατηγική την οποία θα παίξει αντιμετωπίζοντας την T.

2.6.2 Κυρίαρχη στρατηγική

Η κυρίαρχη στρατηγική ορίζεται μέσω της βέλτιστης απάντησης ως ακολούθως :

1. Μια κυρίαρχη στρατηγική για τον παίχτη1 είναι η στρατηγική η οποία είναι βέλτιστη απάντηση σε κάθε στρατηγική του παίχτη2,

2. Μία αυστηρά κυρίαρχη στρατηγική για τον παίχτη 1 είναι η στρατηγική η οποία είναι αυστηρά βέλτιστη απάντηση σε κάθε στρατηγική του παίχτη 2.

ΟΡΙΣΜΟΣ

(αυστηρή κυριαρχία). Σε ένα στρατηγικό παίγνιο με διατεταγμένες προτιμήσεις, η κίνηση αi´´ του παίχτη i κυριαρχεί αυστηρά επί της κίνησης αi´ εάν

$u_i(\alpha_i'', \alpha_{-i}) > u_i(\alpha_i', \alpha_{-i})$ για κάθε α_{-i} κίνηση των άλλων παιχτών,

όπου u_i είναι η συνάρτηση ωφέλειας που εκφράζει τις προτιμήσεις του παίχτη i. Η κίνηση α_i´´ ονομάζεται αυστηρά κυρίαρχη ενώ η α_i´ αυστηρά κυριαρχούμενη.

Σε ένα στρατηγικό παίγνιο μια κίνηση ενός παίχτη κυριαρχεί ασθενώς σε μια άλλη κίνηση εάν η πρώτη κίνηση είναι τουλάχιστον το ίδιο καλή με τη δεύτερη κίνηση, ανεξάρτητα από το τι παίζει ο άλλος παίχτης και, είναι καλύτερη από τη δεύτερη κίνηση για ορισμένες κινήσεις του άλλου παίχτη

ΟΡΙΣΜΟΣ

(ασθενής κυριαρχία). Σε ένα στρατηγικό παίγνιο με διατεταγμένες προτιμήσεις, η κίνηση α_i´´ του παίχτη i κυριαρχεί ασθενώς επί της κίνησης α_i´ εάν

$u_i(\alpha_i'', \alpha_{-i}) \geq u_i(\alpha_i', \alpha_{-i})$ για κάθε α_{-i} κίνηση των άλλων παιχτών και

$u_i(\alpha_i'', \alpha_{-i}) > u_i(\alpha_i', \alpha_{-i})$ για κάποιες α_{-i} από τις κινήσεις των άλλων παιχτών,

όπου u_i είναι η συνάρτηση ωφέλειας που εκφράζει τις προτιμήσεις του παίχτη i. Η κίνηση α_i´´ ονομάζεται ασθενής κυρίαρχη και η α_i´ ασθενώς κυριαρχούμενη.

Συμπερασματικά και πάλι, εάν ο παίχτης έχει μια αυστηρά κυρίαρχη στρατηγική τότε, αναμένεται από αυτόν ή αυτήν να την χρησιμοποιήσει. Είναι σημαντικό επίσης να τονιστεί ότι η αυστηρά κυρίαρχη στρατηγική μπορεί να μη δώσει το βέλτιστο όφελος σε κανέναν από τους παίχτες, όπως συμβαίνει στο παίγνιο του Διλήμματος του Κρατουμένου.

Στα παίγνια μηδενικού αθροίσματος, σύμφωνα με το θεώρημα των Newmman-Mongersten το άθροισμα των αποδόσεων των αντιπάλων είναι πάντοτε ίσο με το μηδέν. Συνεπώς οι παίχτες έλκονται από τη στρατηγική σύμφωνα με την οποία θα αποκομίσουν τη μέγιστη εγγυημένη απόδοση, με άλλα λόγια αποφασίζουν βάσει της αυστηρά κυρίαρχης στρατηγικής τους. Όμως σε παίγνια μη μηδενικού αθροίσματος οι ορθολογικοί παίχτες δεν συμπεριφέρονται αναγκαστικά με αυτόν τον τρόπο. Ειδικότερα στην περίπτωση που δεν υπάρχουν αυστηρά κυρίαρχες στρατηγικές.

Αυτές οι δύο θεμελιώδεις έννοιες, η βέλτιστη απάντηση και η αυστηρά κυρίαρχη στρατηγική αποτελούν κεντρικό πυρήνα συλλογιστικής στη Θεωρία Παιγνίων.

2.7 Παίγνια χωρίς αυστηρά κυρίαρχες στρατηγικές

[EK10]

Σε ορισμένα παίγνια όπως η παρακάτω περιγραφόμενη κατάσταση, δεν εντοπίζεται αυστηρά κυρίαρχη στρατηγική και στους δύο παίχτες. Στην κατάσταση η οποία διαμορφώνεται από την ακόλουθη ιστορία ο ένας εμπλεκόμενος μόνο έχει αυστηρά κυρίαρχη στρατηγική.

Δύο εταιρείες σκοπεύουν να παράγουν και να διοχετεύσουν στην αγορά ένα καινούριο προϊόν. Αυτά τα δύο προϊόντα θα βρεθούν σε άμεσο μεταξύ τους ανταγωνισμό. Ας θεωρηθεί ότι ο πληθυσμός των πελατών είναι χωρισμένος σε δύο μέρη της αγοράς : σε αυτούς που θα αγοράσουν το προϊόν προσφερόμενο σε χαμηλότερη τιμή, και σε αυτούς που θα το αγοράσουν σε υψηλότερη τιμή. Θεωρώντας επίσης ότι τα κέρδη των εταιρειών θα είναι τα ίδια, είναι αναμενόμενο οι εταιρείες να θέλουν να διατηρήσουν τις πωλήσεις τους. Για να επιτευχθεί αυτό, πρέπει να αποφασιστεί σε κάθε μια εταιρεία κατά πόσον θα παραχθεί το προϊόν σε χαμηλότερη ή υψηλότερη τιμή, από την αντίπαλη εταιρία. Μοντελοποιώντας την κατάσταση σε στρατηγικό παίγνιο, παίχτες είναι οι δύο εταιρείες, η κάθε μια από τις οποίες έχει δύο πιθανές στρατηγικές, να παράγει το προϊόν σε χαμηλότερη τιμή (X) ή στην υψηλότερη (Y).Οι ακόλουθες παράμετροι συμπεριλαμβάνονται στον συλλογισμό της κάθε μίας προκειμένου να αποφασίσει την στρατηγική που θα ακολουθήσει.

1. Τα άτομα τα οποία προτιμούν το προϊόν σε χαμηλότερη τιμή είναι το 60%, συνεπώς τα άτομα που προτιμούν το προϊόν με την υψηλότερη αποτελούν το 40%,

2. Η πρώτη εταιρεία σαν πιο δημοφιλής, σε τυχόν εμπορικό ανταγωνισμό με τη δεύτερη αποκομίζει το 80% των αγορών, ενώ η δεύτερη εταιρεία το 20%.

Με βάση τα ανωτέρω μπορούν να καθοριστούν οι ωφέλειες (τα κέρδη) για το σύνολο των στρατηγικών της κάθε εταιρείας.

1. Αν οι δύο εταιρείες απευθυνθούν σε διαφορετικό αγοραστικό κοινό τότε, η κάθε μια θα αποκομίσει τα κέρδη που της αναλογούν, δηλαδή το συγκεκριμένο μερίδιο της αγοράς. Αυτό σημαίνει 0.60 για την μια εταιρεία και 0.40 για τη άλλη εταιρεία,

2. Εάν και οι δύο εταιρείες στοχεύσουν στο αγοραστικό κοινό που προτιμά τη χαμηλή τιμή του προϊόντος, η πρώτη εταιρεία θα πάρει το 80% και η δεύτερη εταιρεία το 20%. Αυτό σημαίνει 0.48 για την πρώτη εταιρεία και 0.12 για τη δεύτερη,

3. Αν αντίστοιχα και οι δύο εταιρείες στοχεύσουν στο αγοραστικό κοινό που προτιμά το προϊόν με την υψηλή τιμή τότε, η πρώτη θα αποκομίσει (0.8)*(0.40)=0.32 και η δεύτερη εταιρεία (0.2)*(0.4)=0.08.

Τα παραπάνω μπορούν να συνοψιστούν μέσω της κανονικής μορφής του παιγνίου με τον παρακάτω διπίνακα

		E2	
		X	Y
E1	X	0.48, 0.12	0.60, 0.40
	Y	0.40, 0.60	0.32, 0.08

Διπίνακας παιγνίου Στρατηγική Μάρκετινγκ

Χαρακτηριστικό σε αυτό το παίγνιο είναι ότι, η πρώτη εταιρεία έχει μια αυστηρά κυρίαρχη στρατηγική αφού, το να επιλέξει την παραγωγή του προϊόντος σε χαμηλή τιμή είναι η αυστηρά βέλτιστη απάντηση σε κάθε επιλογή της αντιπάλου εταιρείας. Αυτό είναι φανερό για το λόγο ότι, όταν η δεύτερη εταιρεία έχει επιλέξει X, για την πρώτη εταιρεία η απόδοση της στρατηγικής X είναι 0.48 ενώ αυτή της στρατηγικής Y είναι 0.40, όταν δε η δεύτερη εταιρεία έχει επιλέξει Y, η απόδοση της στρατηγικής X για την πρώτη εταιρεία είναι 0.60 ενώ η απόδοση της Y είναι 0.32. Σε αντιπαράθεση με τη δεύτερη εταιρεία η οποία δεν έχει αυστηρά κυρίαρχη στρατηγική : η χαμηλή τιμή είναι η βέλτιστη απάντηση όταν η πρώτη εταιρεία επιλέξει υψηλή τιμή και η υψηλή τιμή είναι η βέλτιστη απάντηση όταν η πρώτη εταιρεία επιλέξει χαμηλή τιμή. Παρόλα αυτά δεν είναι δύσκολο να προβλεφθεί η έκβαση του συγκεκριμένου παιγνίου. Εφόσον η πρώτη εταιρεία έχει μια αυστηρά κυρίαρχη στρατηγική, αναμένεται να την ακολουθήσει, κατά συνέπεια η δεύτερη εταιρεία αναμένεται να επιλέξει την υψηλή τιμή.

Η πρόβλεψη μπορεί να επιτευχθεί για το λόγο ότι και οι δύο παίχτες είναι ορθολογικοί, έχουν ΚΓΟ όπως και το γεγονός ότι και οι δύο παίχτες έχουν ΕΣΠ. Συνεπώς εντοπίζεται και από το δεύτερο παίχτη η αυστηρά κυρίαρχη στρατηγική του πρώτου παίχτη, με αποτέλεσμα να επιλέξει την κατάλληλη στρατηγική για την μεγιστοποίηση του κέρδους του, με δεδομένο ότι ο πρώτος παίχτης θα επιλέξει την αυστηρά κυρίαρχη στρατηγική του.

Η πρόβλεψη της έκβασης ενός παιγνίου διαφοροποιείται όταν δεν εντοπίζεται καμία αυστηρά κυρίαρχη στρατηγική.. Σε αυτή την περίπτωση είναι απαραίτητο ένα διαφορετικό πλαίσιο λύσης.

Κεφάλαιο 3

ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ NASH

3.1 Εννοιολογικό πλαίσιο της Ισορροπίας Nash – Ορισμός

[EK10],[Osb02],[NTV07],[OR94],[Βαρ07]

Το να υπάρχει μια αυστηρά κυρίαρχη στρατηγική για κάθε παίχτη -ή έστω και για έναν - είναι εξαιρετικά αυστηρή απαίτηση, και πολύ λίγα παίγνια την ικανοποιούν. Τη στιγμή που σπανίως τα παίγνια κατέχουν αυτή την ιδιότητα, χρειάζεται να βρεθεί ένα λιγότερο αυστηρό και πιο ευρέως αποδεκτό πλαίσιο λύσης. Μια επιθυμητή παιγνιοθεωρητική λύση είναι αυτή στην οποία κάθε μεμονωμένος παίχτης δρα σύμφωνα με τα κίνητρά του, προκειμένου να μεγιστοποιήσει την ωφέλειά του. Με άλλα λόγια δρα ορθολογικά, έχοντας Κοινή Γνώση Ορθολογισμού και Ευθυγραμμισμένες με Συνέπεια Πεποιθήσεις. Η έννοια αυτή καλείται Ισορροπία Nash (Nash Equililbrium), και έχει εδραιωθεί σαν το κεντρικό πλαίσιο λύσης στη θεωρία παιγνίων η οποία και βρίσκει ευρεία εφαρμογή.

Το 1950 ο John Nash έθεσε την απλή, αλλά θεμελιώδη αρχή για τον συλλογισμό και την αιτιολόγηση της συμπεριφοράς των παιχτών σε ένα γενικό παίγνιο, θέτοντας ότι : ακόμα και όταν δεν υπάρχουν αυστηρά κυρίαρχες στρατηγικές, αναμένεται από τους παίχτες να χρησιμοποιήσουν τις στρατηγικές που είναι οι βέλτιστες απαντήσεις.

Η έκβαση ενός τέτοιου παιγνίου προϋποθέτει δύο στοιχεία. Πρώτον, ότι οι παίχτες επιλέγουν την κίνηση που είναι συνεπής με το μοντέλο της ορθολογικής συμπεριφοράς, δεδομένων των πεποιθήσεων που έχουν σχηματίσει ο κάθε ένας για τον άλλο, και δεύτερον, ότι αυτές οι πεποιθήσεις που έχουν ο ένας για τον άλλο είναι σωστές. Στην ουσία η ισορροπία Nash αντανακλά μια κατάσταση στην οποία κανένας παίχτης δεν έχει κίνητρο να διαφοροποιηθεί και να επιλέξει άλλη κίνηση από αυτή που βρίσκεται (αφού είναι η βέλτιστη απάντηση) συνεπώς, βρίσκονται σε συντονισμένες προσδοκίες.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ισορροπία Nash σε στρατηγικό παίγνιο (με διάταξη προσδοκιών). Ένα προφίλ στρατηγικών α* σε ένα στρατηγικό παίγνιο με διατεταγμένες προσδοκίες είναι Ισορροπία Nash εάν, για κάθε παίχτη i και κάθε κίνησή του α_i, η α* είναι τουλάχιστον το ίδιο καλή σύμφωνα με τις προτιμήσεις του παίχτη i στο προφίλ $(\alpha_i, \alpha^*_{-i})$, στο οποίο ο παίχτης i επιλέγει α_i όταν οποιοσδήποτε άλλος παίχτης j επιλέγει α_j*. Ισοδύναμα, για κάθε παίχτη i,
$u_i(\alpha^*) \geq u_i(\alpha_i, \alpha^*_{-i})$ για κάθε κίνηση α_i του παίχτη i,
όπου u_i είναι η συνάρτηση ωφέλειας του παίχτη i.

Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι, ένα στρατηγικό παίγνιο δεν έχει απαραίτητα Ισορροπία Nash ούτε ότι όταν έχει, είναι απαραίτητα μία μόνο.

3.2 Ισορροπία Nash καθαρής στρατηγικής σε χαρακτηριστικά στρατηγικά παίγνια

[EK10],[Osb02], [OR94],[Βαρ07]

3.2.1 Δίλημμα Κρατουμένου

		Y2	
		NC	C
Y1	NC	$-1, -1$	$-10, 0$
	C	$0, -10$	$-4, -4$

Διπίνακας αποδόσεων του στρατηγικού παιγνίου Δίλημμα του Κρατουμένου

Εξετάζοντας τους τέσσερις συνδυασμούς των κινήσεων των παιχτών διαπιστώνεται ότι, ο συνδυασμός (C,C) είναι Ισορροπία Nash αφου πληροί την προϋπόθεση της Ισορροπίας Nash βάσει της οποίας, κανένας παίχτης δεν έχει κίνητρο να διαφοροποιηθεί .

1. Το ζευγάρι κινήσεων (C,C) είναι ισορροπία Nash γιατί πρώτον, με δεδομένη την κίνηση (C) του παίχτη2, ο παίχτης1 είναι καλύτερα να παραμείνει στην επιλογή του αφού αποκομίζει περισσότερα από το να διαφοροποιηθεί και να επιλέξει (NC) και δεύτερον, με δεδομένη την κίνηση (C) του παίχτη1,τοτε για τον παίχτη2 η επιλογή (C) είναι η καλύτερη, και προτιμά να μην διαφοροποιηθεί στην (NC). Κανένας άλλος συνδυασμός κινήσεων δεν αποτελεί ισορροπία αφού

2. Ο συνδυασμός (NC,NC) δεν πληροί την προϋπόθεση του ορισμού της Ισορροπίας Nash. Ο λόγος είναι ότι, όταν ο παίχτης2 επιλέξει (NC) τότε η διαφοροποίηση του παίχτη1 επιλέγοντας (C) αυξάνει την απόδοσή του. Επιπλέον, όταν ο παίχτης1 επιλέξει (NC), ο παίχτης2 επίσης προτιμά να διαφοροποιηθεί και να επιλέξει (C) αυξάνοντας την απόδοσή του

3. Ο συνδυασμός (NC,C) επίσης δεν πληροί την προϋπόθεση του ορισμού της NE, αφού όταν ο παίχτης2 επιλέξει (C), η ωφέλεια του παίχτη1 αυξάνεται αλλάζοντας τη στρατηγική επιλογής του σε (C)

4. Ούτε ο συνδυασμός (C,NC) αφού, ο παίχτης2 έχει κίνητρο να διαφοροποιηθεί και να αλλάξει την στρατηγική του σε (C), αυξάνοντας την απόδοση του

Στο παίγνιο του Διλήμματος του Κρατουμένου υπάρχει ακριβώς μια Ισορροπίας Nash. Σε τέτοιου είδους παίγνια, όπου υπάρχει μοναδική ισορροπία Nash, και συγχρόνως αυστηρά κυρίαρχη στρατηγική, είναι λογικό να προβλεφθεί η συμπεριφορά των παιχτών, ότι δηλαδή θα παίξουν τη στρατηγική ισορροπίας.

3.2.2 Παίγνια συντονισμού και Ισορροπία Nash

Ορισμένα φυσικά παίγνια μπορούν να έχουν παραπάνω από μια Ισορροπία Nash. Σε αυτές τις περιπτώσεις υπάρχει δυσκολία στο να προβλεφθεί πώς θα φερθούν οι ορθολογικοί παίχτες. Χαρακτηριστικά παίγνια αυτής της περίπτωσης είναι τα παίγνια συντονισμού. Σε ορισμένα παίγνια συντονισμού, ένας εξωγενής καθοριστικός παράγοντας που μπορεί να είναι ακόμα και μια κοινωνική σύμβαση, στην οποία θα επικεντρωθούν οι παίχτες επιδρα ώστε να επιλεχθεί κοινή στρατηγική ισορροπίας με απώτερο σκοπό το συντονισμό. Σε ορισμένα άλλα παίγνια, όπου η απόδοση των διαφορετικών στρατηγικών ισορροπίας είναι διαφορετική, αλλά κοινή και για τους δύο παίχτες, είναι αναμενόμενο να γίνει μοναδική πρόβλεψη όσον αφορά την στρατηγική επιλογής. Είναι εύκολο να προβλεφθεί ότι οι παίχτες σαν ορθολογικοί θα επιλέξουν τη στρατηγική ισορροπίας με την υψηλότερη απόδοση. Η πρόβλεψη για την επιλογή της στρατηγικής ισορροπίας από τους παίχτες γίνεται πιο δύσκολη όταν υπάρχει διαφορετική απόδοση για τον κάθε παίχτη στις διαφορετικές στρατηγικές ισορροπίες.

BoS

Το παίγνιο Battle of Sexes είναι χαρακτηριστικό της κατηγορίας αυτής. Στον παρακάτω διπίνακα φαίνεται η διαφορά στις αποδόσεις.

		Π2	
		B	S
Π1	B	2, 1	0, 0
	S	0, 0	1, 2

Διπίνακας αποδόσεων του στρατηγικού παιγνίου BoS

Εξετάζοντας τα ζευγάρια κινήσεων αρχικά αποκλείονται τα ζεύγη (B,S) και (S,B) για το λόγο ότι διαισθητικα βλέποντας το οι δύο εμπλεκόμενοι δεν θα πραγματοποιήσουν τελικά την έξοδο. Σύμφωνα με τον ορισμό της Ισορροπίας Nash σε κάθε ένα από αυτά τα ζεύγη καταστάσεων και οι δύο παίχτες αποκομίζουν περισσότερα αν διαφοροποιηθούν και επιλέξουν άλλη στρατηγική

Όμως οι παίχτες διαφωνούν όσον αφορά τις προτιμήσεις στα ζεύγη στρατηγικών (B,B) και (S,S). Συγχρόνως προκύπτει ότι προκειμένου να επιτύχουν το σκοπό τους πρέπει να επιλεχθεί ένα από τα δύο προφίλ στρατηγικών. Επιπλέον, όποιο από τα δύο επιλεχθεί, κάποιος παίχτης θα είναι λιγότερο ωφελημένος αφού θα παρακολουθήσει το κονσέρτο τις προτίμησης του άλλου. Παρ' όλα αυτά,

1. όταν ο παίχτης1 επιλέξει S τότε είναι προτιμότερο για τον παίχτη2 να επιλέξει επίσης S, αφού σκοπός του είναι να πραγματοποιήσει την κοινή έξοδο, αποκομίζοντας έτσι 1 αντί 0 αν επίλεγε B. Επίσης, όταν ο παίχτης1 επιλέξει B τότε είναι προτιμότερο για τον παίχτη2 να επιλέξει B, αφού σκοπός του πάλι είναι να πραγματοποιήσει την κοινή έξοδο, αποκομίζοντας πάλι 1 αντί 0 αν επίλεγε S.

2. Το ίδιο ισχύει και για τον παίχτη1. Όταν ο παίχτης2 επιλέξει S τότε είναι προτιμότερο για αυτόν να επιλέξει επίσης S.. Όταν ο παίχτης2 επιλέξει B τότε είναι προτιμότερο για αυτόν να επιλέξει B

Συνεπώς τα δύο αυτά ζεύγη στρατηγικών αποτελούν σταθερές καταστάσεις αφού και οι δύο παίχτες βρισκόμενοι σε μια από αυτές, δεν έχουν κίνητρα να διαφοροποιηθούν. Αναδεικνύονται λοιπόν δύο Nash Ισορροπίες, η (B,B) και (S,S). Άρα εντοπίζεται δυσκολία για μοναδική πρόβλεψη στην έκβαση του παιγνίου, αφού δεν μπορεί να προβλεφθεί ποιο από τα δύο προφίλ στρατηγικών ισορροπίας θα επιλεχθεί. Είναι βέβαια πιθανό όπως έχει ήδη αναφερθεί κοινωνικές συμβάσεις να αποτελέσουν καθοριστικό παράγοντα στην επιλογή της στρατηγικής ισορροπίας. Οι πιθανές αυτές συμβάσεις υπάρχουν μεταξύ των παιχτών και οι οποίες λειτουργούν σαν μεσολαβητής για την επίλυση των διαφορών τους όσον αφορά τη διαφορά των προτιμήσεων.

Stag Hunt

Μία διαφοροποίηση των παιγνίων συντονισμού είναι αυτή του παιγνίου κυνήγι ελαφιού.

		Π2	
		S	H
Π1	S	2, 2	0, 1
	H	1, 0	1, 1

Διπίνακας αποδόσεων παιγνίου Stag Hunt

Μελετώντας τα τέσσερα πιθανά σενάρια κινήσεων από τον πίνακα αποδόσεων του παιγνίου, προκύπτουν δύο Ισορροπίες Nash, οι (S,S) και (H,H). Ακολουθώντας το συλλογισμό του παίχτη1 προκύπτουν τα εξής :

1. Εάν ο παίχτης1 μείνει προσηλωμένος στη στρατηγική S τότε ο παίχτης2 προτιμά να μείνει προσηλωμένος και αυτός στη στρατηγική S παρά να διαφοροποιηθεί και να επιλέξει H. Με άλλα λόγια αν ο πρώτος κυνηγός μείνει προσηλωμένος στο κυνήγι ελαφιού τότε ο δεύτερος κυνηγός προτιμά και αυτός να μείνει προσηλωμένος στο κυνήγι ελαφιού.

2. Εάν ο παίχτης1 προτιμήσει τη στρατηγική H τότε, ο παίχτης2 προτιμά και αυτός να επιλέξει τη στρατηγική H αφού, επιλέγοντας τη στρατηγική S δεν θα αποκομίσει τίποτα. Με άλλα λόγια αν ο πρώτος κυνηγός προτιμήσει να κυνηγήσει λαγό τότε, ο δεύτερος κυνηγός μη μπορώντας μόνος να κυνηγήσει ελάφι θα προτιμήσει και αυτός να κυνηγήσει λαγό.

Με ανάλογο συλλογισμό αναμένεται να πράξει και ο παίχτης1.

Εάν ο παίχτης2 επιλέξει τη στρατηγική S τότε και ο παίχτης1 αναμένεται να επιλέξει τη στρατηγική S, και αντίστοιχα αν ο παίχτης2 επιλέξει τη στρατηγική H, ο παίχτης1 αναμένεται να επιλέξει και αυτός τη στρατηγική H.

Στο παίγνιο αυτό παρατηρείται το εξής. Σε περίπτωση μη επίτευξης συντονισμού, ο παίχτης που προσπαθεί για τα περισσότερα κέρδη "τιμωρείται" περισσότερο από αυτόν που στοχεύει στα λιγότερα κέρδη. Ο ωφελημένος τελικά είναι αυτός που στοχεύει στα λιγότερα. Σαν αποτέλεσμα, *η πρόκληση στο συλλογισμό για την ισορροπία είναι η πραγματική σχέση μεταξύ της υψηλής και χαμηλής απόδοσης σε περίπτωση μη συντονισμού.*

3.2.3 Hawk-Dove (Γεράκι – Περιστέρι)

Ενας εξαιρετικός παραλληλισμός του παιγνίου Γεράκι Περιστέρι σύμφωνα με το Βαρουφάκη είναι ο εξής :

«Το παίγνιο αυτό στην καθημερινή ζωή θα μπορούσε να αναπαραστήσει δύο παιδιά που έχουν στη διάθεσή τους ένα παγωτό. Θα ήταν πιο λογικό και πιο ευχάριστο για αυτά να μοιραστούν απλά το παγωτό και, να είναι και τα δύο το ίδιο ευχαριστημένα, παρά να τσακωθούν και να ρίξουν και το παγωτό… Παρόλα αυτά επειδή σκέφτονται μόνο το προσωπικό τους όφελος (λειτουργώντας ορθολογικά) είναι πιθανό να υπάρξει σύγκρουση μεταξύ τους και, χωρίς βέβαια να μπορεί να προβλεφθεί αν και ποιο από τα δύο παιδιά θα φανεί υποχωρητικό.»

		Z2	
		B	S
Z1	B	3, 3	1, 5
	S	5, 1	0, 0

Διπίνακας αποδόσεων στρατηγικού παιγνίου Hawk - Dove

Μετά από εξέταση των ζευγών των στρατηγικών εντοπίζονται δύο Ισορροπίες Nash (D,H) και (H,D), για το λόγο ότι, σε οποιοδήποτε άλλο προφίλ στρατηγικών ο ένας από τους δύο παίχτες έχει κίνητρα να διαφοροποιήσει τη στρατηγική του αποκομίζοντας περισσότερα.

Όπως και στα παίγνια συντονισμού ναι μεν μπορούν να αιτιολογηθούν οι προβλεπόμενες κινήσεις, αλλά δεν είναι αρκετό ώστε να υπάρξει μια μοναδική πρόβλεψη, αφού αναδύονται παραπάνω από μια Ισορροπίες Nash.

3.2.4 Συμμετρικά παίγνια και Συμμετρική Ισορροπία Nash

Η Ισορροπία Nash σε ένα στρατηγικό παίγνιο ανταποκρίνεται σε μια σταθερή κατάσταση αλληλεπίδρασης μεταξύ των μελών που εμπλέκονται σε αυτή την κατάσταση. Ορισμένες φορές η προς μοντελοποίηση κατάσταση χαρακτηρίζεται από το γεγονός ότι τα μέλη μιας ομογενούς ομάδας εμπλέκονται *ανώνυμα και συμμετρικά* .Ένα στρατηγικό παίγνιο δύο ατόμων ορίζεται σαν *"συμμετρικό"* εάν κάθε παίχτης έχει το ίδιο σύνολο κινήσεων και η ωφέλεια του κάθε παίχτη εξαρτάται μόνο από τη δική του κίνηση και από αυτή του αντιπάλου, όχι από το αν είναι ο παίχτης1 ή ο παίχτης2. Αυτό σημαίνει ότι ο παίχτης1 έλκεται τόσο από την ωφέλεια της (α_1,α_2) όταν παίζει α_1 και ο αντίπαλος α_2, όσο έλκεται και ο παίχτης2 από την ωφέλεια της (α_2,α_1) όταν παίζει α_1 και ο αντίπαλος του παίζει α_2 δηλαδή $u_1(\alpha_1,\alpha_2) = u_2(\alpha_2,\alpha_1)$. Συγκεκριμένα, οι προτιμήσεις των παιχτών μπορούν να αναπαρασταθούν από μια συνάρτηση ωφέλειας στην οποία, οι αποδόσεις και για τους δυο παίχτες είναι ίδιες, όποτε οι παίχτες επιλέγουν την ίδια κίνηση συνεπώς $u_1(\alpha,\alpha) = u_2(\alpha,\alpha)$

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>

(Συμμετρικό στρατηγικό παίγνιο δύο ατόμων με διατεταγμένες προτιμήσεις) Ένα στρατηγικό παίγνιο δύο ατόμων με διατεταγμένες προτιμήσεις είναι συμμετρικό εάν τα σύνολα των κινήσεων των δύο παιχτών είναι τα ίδια και οι προτιμήσεις των παιχτών αναπαρίστανται με τις συναρτήσεις ωφέλειας u_1 και u_2 για τις οποίες ισχύει

$u_1(\alpha_1,\alpha_2) = u_2(\alpha_1,\alpha_2)$ για κάθε ζεύγος κινήσεων $u_1(\alpha_1,\alpha_2)$.

Σε ένα συμμετρικό στρατηγικό παίγνιο ο διπίνακας έχει τη γενική μορφή

		Π2	
		A	B
Π1	A	w,w	x,y
	A	y,x	z,z

όπου αριθμοί w,x,y,z είναι αυθαίρετοι αριθμοί.

Αρκετά στρατηγικά παίγνια δύο ατόμων, όπως το Δίλημμα του Κρατουμένου και το Κυνήγι Ελαφιού είναι συμμετρικά έχοντας τη μορφή

		Π2	
		A	B
Π1	A	a,w	b,x
	A	c,y	d,z

όπου $a > c >= d > b$ και $w > x >= z > y$

Οι παίκτες σε ένα συμμετρικό παιχνίδι δύο ατόμων αποκαλούνται "παίκτης 1" και "παίχτης 2", αλλά υπάρχει μόνο ένας ρόλος στο παιχνίδι. Σε ένα τέτοιο παίγνιο μια ενέργεια α* αντιστοιχεί σε μια σταθερή κατάσταση, αν κανένας παίκτης δεν μπορεί να έχει περισσότερες απολαβές με

τη χρήση οποιαδήποτε άλλης ενέργειας, δεδομένου ότι όλοι οι άλλοι παίκτες χρησιμοποιούν την ενέργεια α*. Η α* έχει αυτή την ιδιότητα, αν και μόνο αν η (α*, α*) είναι μια ισορροπία Nash του παιγνίου. Με άλλα λόγια, η λύση που αντιστοιχεί σε μια σταθερή κατάσταση η οποία προκύπτει από ζεύγη αλληλεπιδράσεων μεταξύ των μελών ενός ενιαίου πληθυσμού είναι μια ”συμμετρική ισορροπία Nash”: μια ισορροπία Nash στην οποία και οι δύο παίκτες έχουν την ίδια στρατηγική .
ΟΡΙΣΜΟΣ
(Συμμετρική Ισορροπία Nash) Ένα προφίλ στρατηγικών α* σε ένα στρατηγικό παίγνιο με διατεταγμένες προτιμήσεις στο οποίο ο κάθε παίκτης έχει το ίδιο σύνολο κινήσεων, είναι μια συμμετρική Ισορροπία Nash εάν είναι Ισορροπία Nash και η α_i* είναι η ίδια για κάθε παίχτη i.

3.3 Παίγνιο Matching Pennies

[EK10],[Osb02], [OR94]

Ένα παίγνιο καθαρά αντικρουόμενων συμφερόντων είναι το παίγνιο Matching Pennies.

Έστω δύο άνθρωποι επιλέγουν συγχρόνως την επίδειξη κορώνα (H) ή γράμματα (T) ενός νομίσματος. Εάν δείξουν την ίδια πλευρά ο παίκτης2 θα δώσει 1€ στον παίχτη1, εάν όμως δείξουν διαφορετικές ο παίκτης1 θα δώσει 1€ στον παίχτη2. Ο κάθε παίκτης ενδιαφέρεται για το προσωπικό του κέρδος άρα προτιμά να πάρει χρήματα παρά να δώσει.

Η μοντελοποίηση αυτής της κατάστασης σε στρατηγικό παίγνιο δίνεται από τον παρακάτω διπίνακα

		Π2	
		H	T
Π1	H	$1, -1$	$-1, 1$
	T	$-1, 1$	$1, -1$

Το παίγνιο είναι αυστηρά ανταγωνιστικό, και ανήκει στην κατηγορία των παιγνίων μηδενικού αθροίσματος. Ο παίκτης1 έχει κίνητρο να επιλέξει την ίδια κίνηση με τον παίχτη2, ενώ την ίδια στιγμή ο παίκτης2 έχει κίνητρο να επιλέξει την ακριβώς αντίθετη κίνηση από αυτήν του παίχτη1, δημιουργώντας έτσι έναν κύκλο με συνεχείς διαφοροποιήσεις στις επιλογές των παιχτών. Εξετάζοντας κάθε ένα από τα τέσσερα ζεύγη κινήσεων παρατηρείται ότι δεν υπάρχει Ισορροπία Nash καθώς στα προφίλ στρατηγικών (H,H), και (T,T) ο παίχτης2 έχει κίνητρα να διαφοροποιηθεί, ενώ για τα δύο ζεύγη (H,T) και (H,T) ο παίχτης1 είναι αυτός που έχει το κίνητρο να διαφοροποιηθεί. Συνεπώς δεν υπάρχει ένα προφίλ στρατηγικών (μια για κάθε παίχτη) που είναι η καλύτερη απάντηση του ενός για τον άλλο, άρα σύμφωνα με τον ορισμό της Ισορροπίας Nash δεν αναδυκνύεται σταθερή κατάσταση.

3.4 Ισορροπία Nash μικτής στρατηγικής -ΙΝΜΣ (Mixed strategy Nash Equilibrium)

[EK10],[Osb02],[ΚΣ02],[OR94],[Βαρ07],[Nas50a], [Nas50b]

Προκειμένου να προβλεφθεί η έκβαση των παιγνίων που δεν έχουν καμία ισορροπία Nash, διευρύνεται το σύνολο των στρατηγικών έτσι ώστε να περιλαμβάνει την πιθανότητα τυχαιοποίησης της επιλογής τους. Τυχαιοποιημένη επιλογή των στρατηγικών υπεισέρχεται επίσης όταν ο παίχτης είναι αδιάφορος μεταξύ δύο στρατηγικών, όπως συμβαίνει σε περίπτωση ύπαρξης πολλαπλών ισορροπιών. Κάτω επίσης από τη σκιά της αβεβαιότητας σχετικά με το ποια είναι η βέλτιστη καθαρή στρατηγική, ο παίχτης μπορεί να ενεργήσει ως εάν διάλεγε στην τύχη μεταξύ δύο ή περισσότερων καθαρών στρατηγικών. Τέλος όταν ο παίχτης έχει λόγο να «μπερδέψει» τον αντίπαλο του προκειμένου να διατηρήσει στρατηγικό πλεονέκτημα, τότε ο καλύτερος τρόπος είναι να επιλέξει τυχαία. Από τη στιγμή που ο ίδιος ο παίχτης έχει άγνοια για την επιλογή του, είναι αδύνατο να τη γνωρίζει ο αντίπαλος. Ο παίχτης κατά την τυχαιοποίηση της επιλογής του δεν γνωρίζει τι θα γίνει, όμως γνωρίζει την πιθανότητα με την οποία το κάθε αποτέλεσμα θα συμβεί. Συνεπώς, οι ορθολογικοί παίχτες πρέπει να αναμιγνύουν με κάποια πιθανότητα τις καθαρές στρατηγικές τους. Η κάθε στρατηγική πλεον αποτελείται από ένα συνδυασμό αριθμών από 0 εως 1, ένας αριθμός για κάθε καθαρή στρατηγική, δηλαδή μια μικτή στρατηγική.

Όμως δεν αρκεί μόνο να γίνει υπόθεση για τη μίξη καθαρών στρατηγικών. Είναι απαραίτητο να γίνει ο υπολογισμός των πιθανοτήτων με τις οποίες οι παίχτες θα επιλέξουν μεταξύ των καθαρών στρατηγικών προκειμενου να υπάρξει πρόβλεψη για την έκβαση του παιγνίου.

Από τη στιγμή που επιτρέπεται στον παίχτη να φερθεί με τυχαίο τρόπο αυτομάτως αναδεικνύεται μια ισορροπία Nash μικτής στρατηγικής. Ο John Nash απέδειξε ότι κάθε πεπερασμένο παίγνιο έχει τουλάχιστον μια ισορροπία Nash μικτής στρατηγικής (ΙΝΜΣ) (Mixed Strategies Nash Equilibrium), βρίσκοντας τις ακριβείς μικτές στρατηγικές που θα υιοθετήσουν οι ορθολογικά σκεπτόμενοι παίκτες. Η ιδέα της εύρεσης «λύσης» του παιγνίου με μικτές στρατηγικές ξεκινά με την παραδοχή ότι δεν υπάρχει καμία ισορροπία Nash καθαρής στρατηγικης και βασίζεται σε δύο αξιώματα :

1. *Αδιαφορία* Οι παίχτες είναι στρατηγικά αδιάφοροι ως προς την επιλογή μιας εκ των καθαρών στρατηγικών

2. *Τυχαία επιλογή* Οι παίχτες επιλέγουν τυχαία μεταξύ των καθαρών στρατηγικών αφού ισχύει το αξίωμα 1

Μέσω της απόδειξης του Nash και της εφαρμογής εύρεσης λύσης μέσω ΙΝΜΣ η “λύση” που προτείνεται αντιστοιχεί σε μια νέα μορφή ισορροπίας, την ισορροπία Nash μικτής στρατηγικής

ΟΡΙΣΜΟΣ

(Ισορροπία Nash μικτής στρατηγικής σε στρατηγικό παίγνιο με διατεταγμένες προσδοκώμενες ωφέλειες) Το προφίλ α^* μικτών στρατηγικών σε ένα στρατηγικό παίγνιο με διατεταγμένες προσδοκώμενες ωφέλειες είναι Ισορροπία Nash μικτής στρατηγικής εάν για κάθε παίχτη i και κάθε μικτή στρατηγική α_i του παίχτη i, η προσδοκώμενη ωφέλεια του παίχτη i της α^* είναι τουλάχιστον το ίδιο υψηλή όσο η προσδοκώμενη ωφέλεια για τον παίχτη i της $(\alpha_i, \alpha^*_{-i})$ σύμφωνα με την συνάρτηση ωφέλειας στην οποία η αναμενόμενη τιμή αναπαριστά τις προτιμήσεις του παίχτη i, κατά την τυχαιοποίηση. Ισοδύναμα για κάθε παίχτη i

$U_i(\alpha^*) \geqslant U_i(\alpha_i, \alpha^*_{-i})$ για κάθε μικτή στρατηγική α_i του παίχτη i,

όπου $U_i(\alpha)$ είναι η προσδοκώμενη ωφέλεια του παίχτη i για το προφίλ μικτής στρατηγικής α.

Που σημαίνει ότι, ένα προφίλ μικτής στρατηγικής α* είναι Ισορροπία Nash μικτής στρατηγικής αν και μόνο αν η μικτή στρατηγική για κάθε παίχτη είναι η βέλτιστη απάντηση στις μικτές στρατηγικές των άλλων παιχτών.

3.4.1 Συνάρτηση βέλτιστης απάντησης και προσδοκώμενη ωφέλεια στις μικτές στρατηγικές

Όταν οι παίχτες χρησιμοποιούν τις μικτές στρατηγικές α_1 και α_2, η πιθανότητα του κάθε ζεύγους κίνησης (α_1, α_2) είναι το γινόμενο της πιθανότητας που ανατίθεται στη μικτή στρατηγική α_1 του παίχτη1, και της πιθανότητας που ανατίθεται στη μικτή στρατηγική α_2του παίχτη2. Έτσι η κατανομή πιθανοτήτων που προκύπτει από τη μικτή στρατηγική (α_1, α_2) πάνω στις 4 πιθανές αποδόσεις του παιχνιδιού όταν ο παίχτης1 εχει τις στρατηγικές Top (T) και Bottom (B), και ο παίχτης2 τις Left (L) και Right (R) έχει την ακόλουθη μορφή

		Π2	
		L(q)	R(1-q)
Π1	T(p)	pq	$p(1-q)$
	B(1-p)	$(1-p)q$	$(1-p)(1-q)$

όπου η (T, L) εμφανίζεται με πιθανότητα pq, η (T, R) εμφανίζεται με πιθανότητα $p(1-q)$, η (B, L) εμφανίζεται με πιθανότητα $(1-p)q$, και η (B, R) εμφανίζεται με πιθανότητα $(1-p)(1-q)$.

Από την κατανομή πιθανοτήτων είναι φανερό ότι τα προσδοκώμενα κέρδη για τον παίχτη1 από την μικτή στρατηγική (α_1, α_2) είναι

$pq * u_1(T, L) + p(1-q) * u_1(T, R) + (1-p)q * u_1(B, L) + (1-p)(1-q) * u_1(B, R)$,

το οποίο μπορεί να γραφτεί και σαν

$p[q * u_1(T, L) + (1-q) * u_1(T, R)] + (1-p)[q * u_1(B, L) + (1-q) * u_1(B, R)]$

Ο όρος στην πρώτη αγκύλη είναι η προσδοκώμενη ωφέλεια του παίχτη1 όταν χρησιμοποιεί καθαρή στρατηγική που δίνει την πιθανότητα 1 στην T και ο παίχτης2 χρησιμοποιεί τη μικτή στρατηγική α_2, ενώ ο όρος στην δεύτερη αγκύλη είναι η προσδοκώμενη ωφέλεια του παικτη1 όταν χρησιμοποιεί καθαρή στρατηγική που δίνει πιθανότητα 1 στην B και ο παίχτης2 χρησιμοποιεί τη μικτή στρατηγική α_2. Θέτοντας αυτές τις προσδοκώμενες ωφέλειες $\mathrm{E}_1(T, \alpha_2)$ και $\mathrm{E}_1(\mathrm{B}, \alpha_2)$ αντίστοιχα, τότε η προσδοκώμενη ωφέλεια του παίχτη1 στη μικτή στρατηγική (α_1, α_2) είναι

$p\mathrm{E}_1(T, \alpha_2) + (1-p)\mathrm{E}_1(\mathrm{B}, \alpha_2)$.

3.4.2 Εύρεση Ισορροπίας Nash μικτής στρατηγικής στο παίγνιο Matching Pennies

Στο παίγνιο Matching Pennies δεν αναδείχθηκε ισορροπία Nash καθαρής στρατηγικής αφού δεν υπάρχει σταθερή κατάσταση.

Δίνοντας τη δυνατότητα στους παίχτες να τυχαιοποιήσουν τις επιλογές των καθαρών στρατηγικών, δηλαδή να χρησιμοποιήσουν μικτές στρατηγικές, θα πρέπει να αναδειχθεί μια τουλάχιστον Ισορροπία Nash μικτής στρατηγικής. Συνεπώς θα πρέπει να υπολογιστούν οι πιθανότητες επιλογής της κάθε καθαρής στρατηγικής, για να προσδιοριστούν οι προσδοκώμενες ωφέλειες ανά μικτή στρατηγική.

Έστω λοιπόν ότι ο παίχτης2 επιλέγει την καθαρή στρατηγική H με πιθανότητα q, τότε θα επιλέξει την καθαρή στρατηγική T με πιθανότητα $1-q$.

Κατά συνέπεια ο παίχτης1 αν επέλεγε την καθαρή στρατηγική H

θα αποκόμιζε -1 με πιθανότητα q (όταν ο παίχτης2 είχε επιλέξει την στρατηγική H), και θα αποκόμιζε 1 με πιθανότητα $1-q$ (όταν ο παίχτης2 είχε επιλέξει την στρατηγική T)

και η συνολική προσδοκώμενη ωφέλεια της καθαρής στρατηγικής H για τον παίχτη1 θα ήταν σε αυτή την περίπτωση $-1 * q + 1 * (1-q)$

Παρόμοια για την καθαρή στρατηγική T ο παίχτης1

θα αποκόμιζε 1 με πιθανότητα q (όταν ο παίχτης2 είχε επιλέξει την στρατηγική H) και θα αποκόμιζε -1 με πιθανότητα $1-q$ (όταν ο παίχτης2 είχε επιλέξει την στρατηγική T).

Η συνολική τότε προσδοκώμενη ωφέλεια της καθαρής στρατηγικής T για τον παίχτη1 θα ήταν $1 * q + (-1) * (1-q)$.

Προκειμένου να υπάρξει ισορροπία Nash μικτής στρατηγικής θα πρέπει ο παίχτης1 να είναι στρατηγικά αδιάφορος μεταξύ των δύο καθαρών στρατηγικών του, άρα οι συνολικές ωφέλειες των καθαρών στρατηγικών H και T και θα πρέπει να είναι ακριβώς ίσες. Δηλαδή

$$-1*q+1*(1-q)=1*q+(-1)*(1-q) \Leftrightarrow -2q+1=2q-1 \Leftrightarrow q=1/2$$

Αντίστοιχα για τον παίχτη2 όταν ο παίχτης1 επιλέξει με πιθανότητα p την καθαρή στρατηγική H και με πιθανότητα $1-p$ την T, η συνολική ωφέλεια για την καθαρή στρατηγική H είναι $1*p+(-1)*(1-p)$ και, η συνολική ωφέλεια για την καθαρή στρατηγική T είναι $-1*p+1*(1-p)$. Για να είναι ο παίχτης2 στρατηγικά αδιάφορος μεταξύ των δύο καθαρών στρατηγικών του, θα πρέπει η συνολική ωφέλεια της στρατηγικής H και της T να είναι ακριβώς ίσες

$$1*p+(-1)*(1-p)=(-1)*p+1*(1-p) \Leftrightarrow p-1+p=(-p)+1-p \Leftrightarrow$$
$$2p-1=1-2p \Leftrightarrow 2p-1=1-2p \Leftrightarrow 4p=2 \Leftrightarrow p=1/2$$

Στο σημείο αυτό διαπιστώνεται ότι η μικτή στρατηγική $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ αποτελεί σταθερή κατάσταση ώστε να αναδειχθεί ισορροπία Nash μικτής στρατηγικής. Αυτό συμβαίνει για το λόγο ότι όταν ο παίχτης1 περιμένει να παίξει ο παίχτης2 τη μικτή στρατηγική $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, τότε δεν έχει λόγο να διαφοροποιηθεί και να εγκαταλήψει τη μικτή στρατηγική $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, αφού είναι στρατηγικά αδιάφορος μεταξύ των δύο στρατηγικών. Άρα τα παραπάνω συνιστούν μια σταθερή κατάσταση άρα μια Ισορροπία Nash μικτής στρατηγικής.

Ένας άλλος τρόπος να προσδιοριστεί η μοναδική Ισορροπία Nash μικτής στρατηγικής στο παίγνιο Matching Pennies είναι μέσω της συνάρτησης βέλτιστης απάντησης. Έστω p η πιθανότητα που δίνεται στο H από τη μικτή στρατηγική του παίχτη1 και q η πιθανότητα που δίνεται στο H από τη μικτή στρατηγική του παίχτη2. Τότε με δεδομένη τη μικτή στρατηγική του παίχτη2 η προσδοκώμενη ωφέλεια του παίχτη1 για την καθαρή στρατηγική H είναι

$$q*1+(1-q)*(-1)=2q-1$$

και η προσδοκώμενη ωφέλεια για την καθαρή στρατηγική T είναι

$$q*(-1)+(1-q)*1=1-2q$$

Εάν $q<\frac{1}{2}$ τότε η προσδοκώμενη ωφέλεια της T υπερβαίνει την προσδοκώμενη ωφέλεια της H και υπερβαίνει και την προσδοκώμενη ωφέλεια κάθε μικτής στρατηγικής που δίνει μια θετική πιθανότητα στο H. Παρόμοια εΕάν $q>\frac{1}{2}$ τότε η προσδοκώμενη ωφέλεια της H υπερβαίνει την προσδοκώμενη ωφέλεια της T, και υπερβαίνει και την προσδοκώμενη ωφέλεια κάθε μικτής στρατηγικής που δίνει θετική πιθανότητα στο T. Εάν $q=\frac{1}{2}$ τότε και η H και η T και όλες οι μικτές στρατηγικές έχουν την ίδια ωφέλεια. Συμπερασματικά οι βέλτιστες απαντήσεις του παίχτη1 στη μικτή στρατηγική του παίχτη2 είναι η μικτή στρατηγική που δίνει πιθανότητα 0 στο H αν $q<\frac{1}{2}$, η μικτή στρατηγική που δίνει 1 στο Head αν $q>\frac{1}{2}$ και όλες οι μικτές στρατηγικές αν $q=\frac{1}{2}$. Θέτοντας $B_1(q)$ το σύνολο των πιθανοτήτων που δίνονται στην H από τον παίχτη1 σαν βέλτιστη απάντηση στην q ισχύει

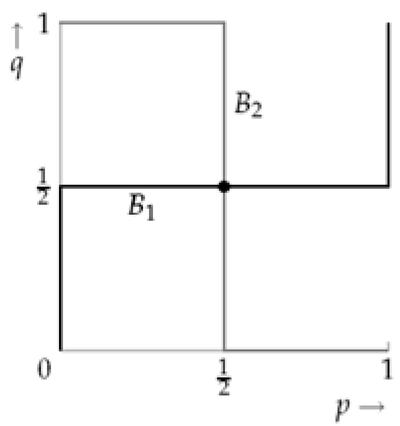
$$B_1(q)=\begin{array}{cc} \{0\} & \text{εάν } q<\frac{1}{2} \\ \{p:0<=p<=1\} & \text{εάν } q=\frac{1}{2} \\ \{1\} & \text{εάν } q>\frac{1}{2} \end{array}$$

Παρόμοια για τον παίχτη2 η συνάρτηση βέλτιστης απάντησης δίνει :

$$B_2(p) = \begin{cases} \{0\} & \text{εάν } p < \frac{1}{2} \\ \{q : 0 <= q <= 1\} & \text{εάν } p = \frac{1}{2} \\ \{1\} & \text{εάν } p > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Το σύνολο των ισορροπιών Nash μικτής στρατηγικής του παιγνίου ανταποκρίνεται στο σύνολο των αλληλεπιδράσεων της συνάρτησης βέλτιστης απάντησης. Όπως φαίνεται υπάρχει μια αλληλεπίδραση, που ανταποκρίνεται στην ισορροπία Nash μικτής στρατηγικής που εντοπίστηκε με την προηγούμενη μέθοδο και είναι αυτή που δίνει πιθανότητα $\frac{1}{2}$ στο H.

Η συνάρτηση βέλτιστης απάντησης για τους δύο παίχτες, όπως διαφαίνεται και στο επόμενο διάγραμμα αναδεικνύει τη μικτή στρατηγική (με μαύρο ο παίχτης1 και με γκρι ο παίχτης2)



3.4.3 Εύρεση Ισορροπίας Nash μικτής στρατηγικής στο παίγνιο BoS

Έστω ότι ο παίχτης1 επιλέγει με πιθανότητα p τη στρατηγική B, και με πιθανότητα $1 - p$ τη στρατηγική S. Έστω επίσης ότι ο παίχτης2 επιλέγει με πιθανότητα q τη στρατηγική B, και με πιθανότητα $1 - q$ τη στρατηγική S.

Προκειμένου να υπάρξει Ισορροπίας Nash μικτής στρατηγικής θα πρέπει ο παίχτης1 να είναι στρατηγικά αδιάφορος μεταξύ των δύο καθαρών στρατηγικών, άρα η συνολική ωφέλεια των καθαρών στρατηγικών B και S θα πρέπει να είναι ακριβώς ίσες.

$2 * q + 0 * (1 - q) = 0 * q + (1) * (1 - q) \Leftrightarrow 2 * q = 1 - q \Leftrightarrow q = \frac{1}{3}$

Άρα ο παίχτης1 θα παίξει την καθαρή στρατηγική B με πιθανότητα $p = \frac{1}{3}$ και την καθαρή στρατηγική S με πιθανότητα $1 - p = \frac{2}{3}$.

Αντίστοιχα για τον παίχτη2, θα πρέπει η συνολική ωφέλεια της στρατηγικής B και της S να είναι ακριβώς ίσες $1*p+0*(1-p) = 0*p+2*(1-p) \Leftrightarrow p = 2*(1-p) \Leftrightarrow p = 2-2p \Leftrightarrow p = 2/3$

Αρα και για τον παίχτη2 αναμένεται ότι όταν ο παίχτης1 επιλέξει τη μικτή στρατηγική $p = \frac{2}{3}$ τότε και αυτός είναι στρατηγικά αδιάφορος έναντι όλων των διαθέσιμων στρατηγικών. Πράγματι ο παίχτης2 προσδοκά κατά μέσο όρο την ίδια ωφέλεια ανεξάρτητα από τη στρατηγική που θα επιλέξει. Άρα δεν έχει κίνητρο να διαφοροποιηθεί από τη μικτή στρατηγική $q = \frac{1}{3}$.

Συνεπως ο καθένας παίχτης επιλέγει την πρώτη στρατηγική με πιθανότητα $\frac{2}{3}$ και αφού ισχύει η προϋπόθεση του ορισμού της Ισορροπίας Nash η μικτή στρατηγική $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ είναι Ισορροπίας Nash μικτής στρατηγικής.

Μέσω της δόμησης της βέλτιστης απάντησης του παίχτη1 η Ισορροπία Nash μικτής στρατηγικής προκύπτει ως εξής.

Αν $2q > 1 - q$, ή $q > \frac{1}{3}$ τότε η μοναδική βέλτιστη απάντηση είναι η B, ενώ αν $q = \frac{1}{3}$ τότε B και S και όλες οι μικτές στρατηγικές έχουν την ίδια προσδοκώμενη ωφέλεια

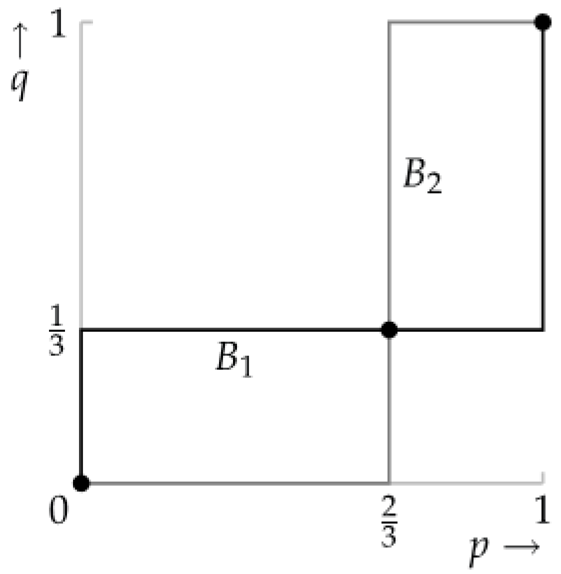
$$B_1(q) = \begin{matrix} \{0\} & \text{εάν } q < \frac{1}{3} \\ \{p : 0 <= p <= 1\} & \text{εάν } q = \frac{1}{3} \\ \{1\} & \text{εάν } q > \frac{1}{3} \end{matrix}$$

Παρόμοια για τον παίχτη2 προκύπτουν τα εξής :

Αν $p > 2 - 2p$, ή $p > \frac{2}{3}$ τότε η μοναδική βέλτιστη απάντηση είναι η B, ενώ για $p < \frac{2}{3}$ τότε $p < 2 - 2p$ αρα η μοναδική βέλτιστη απάντηση είναι η S όταν όμως $q = \frac{2}{3}$ τότε B και S και όλες οι μικτές στρατηγικές έχουν την ίδια προσδοκώμενη ωφέλεια

$$B_2(p) = \begin{matrix} \{0\} & \text{εάν } p < \frac{2}{3} \\ \{q : 0 <= q <= 1\} & \text{εάν } p = \frac{2}{3} \\ \{1\} & \text{εάν } p > \frac{2}{3} \end{matrix}$$

Μέσω της συνάρτησης βέλτιστης απάντησης για τους δύο παίχτες, όπως διαφαίνεται και στο επόμενο διάγραμμα, αναδεικνύονται τρεις Ισορροπίες Nash μικτής στρατηγικής $(0,0), (2/3,1/3), (1,1)$. Η πρώτη και η τρίτη αντιστοιχούν στις δύο ήδη γνωστές Ισορροπίες Nash καθαρής στρατηγικής



Γενικότερα, οι Ισορροπίες Nash που αναδεικνύονται όταν δεν επιτρέπεται στους παίχτες η τυχαιοποίηση, παραμένουν ισορροπίες όταν τους επιτρέπεται η τυχαιοποίηση, και όποια καθαρή ισορροπία υπάρχει όταν τους επιτρέπεται η τυχαιοποίηση είναι επίσης ισορροπία όταν δεν τους επιτρέπεται τυχαιοποίηση.

3.4.4 Παραδείγματα Ισορροπίας Nash μικτής στρατηγικής σε γνωστά στρατηγικά παίγνια

		Υ2 NC	Υ2 C	
Υ1	NC	-1,-1	-10,0	1
	C	0,-10	-4,-4	0
		1	0	ΙΝΜΣ

Παίγνιο Δίλημμα Κρατουμένου

		Π2 S	Π2 H	
Π1	S	2,2	0,1	½
	H	1,0	1,1	½
		½	½	ΙΝΜΣ

Παίγνιο Stag Hunt

		Ζ2 D	Ζ2 H	
Ζ1	D	3,3	1,5	⅓
	H	5,1	0,0	⅔
		⅓	⅔	ΙΝΜΣ

Παίγνιο Hawk – Dove

		Ζ2 C1	Ζ2 C2	
Ζ1	R1	1,1	0,0	¾
	R2	0,0	3,3	¼
		¾	¼	ΙΝΜΣ

Παίγνιο καθαρού συντονισμού

Κεφάλαιο 4

ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΙΑ ΚΑΙ ΕΚΛΕΠΤΥΝΣΕΙΣ

[EK10],[Fie01],[GW05],[OR94],[Βαρ07],[Dam00], [KM86]

4.1 Απροσδιοριστία

Σε πολλά παίγνια αναδύονται πολλαπλές Ισορροπίες Nash, με αποτέλεσμα να μην προκύπτει μοναδική πρόβλεψη για την έκβαση του παιγνίου, αφού παρατηρείται αδυναμία επιλογής μεταξύ των στρατηγικών ισορροπίας. Αυτό το φαινόμενο καλείται απροσδιοριστία.

Η προσπάθεια για την καταπολέμηση της απροσδιοριστίας με σκοπό τη μείωση των Ισορροπιών Nash ονομάστηκε ”Πρόγραμμα Εκλέπτυνσης” (Refinement Project)

4.2 Εκλεπτύνσεις

Στις προτάσεις που έγιναν για τον περιορισμό του συνόλου των Ισορροπιών στόχος ήταν η εξάλειψη ισορροπιών που θεωρούνταν παράλογες, δηλαδή ισορροπίες που δεν επρόκειτο ποτέ βάσει ορθολογικής συμπεριφοράς να επιλεχθούν. Απώτερος σκοπός του προγράμματος εκλέπτυνσης ήταν η επιβίωση των πιο ορθολογικών από αυτές

4.2.1 Κυριότερα κριτήρια εκλεπτύνσεων

(1) Το κριτήριο του διαδοχικού ορθολογισμού. Οι εκλεπτύνσεις σύμφωνα με το κριτήριο του διαδοχικού ορθολογισμού αποκλείουν τις στρατηγικές οι οποίες δεν είναι αξιόπιστες με το να απαιτούν κατηγορηματικά μια στρατηγική να είναι βέλτιστη σε κάθε ενδεχόμενο, ακόμα και αν αυτό προκύπτει σαν έκπληξη. (Ο όρος ενδεχόμενο χρησιμοποιείται έναντι του πληροφοριακού συνόλου για να συμπεριλάβει οποιαδήποτε κατάσταση στην οποία ο παίχτης επιλέγει μια δράση). Τα παραπάνω απαιτούν ότι η στρατηγική του παίχτη είναι αρχικά βέλτιστη, και **επίσης** ότι σε κάθε μεταγενέστερο ενδεχόμενο στο οποίο ο παίχτης δρα η στρατηγική του παραμένει βέλτιστη για το υπόλοιπο του παιγνίου, ακόμα και αν η ισορροπία προβλέπει ότι το ενδεχόμενο δεν θα συμβεί. Αυτό το **κριτήριο καλείται διαδοχική ορθολογικότητα (sequential rationality)**.

(2) Το κριτήριο της τελειότητας ή σταθερότητας. Εάν ο παίχτης μπορούσε να ”τρέμει” ή σφάλλει στο να πραγματοποιήσει την προτιθέμενη στρατηγική του - ή όταν η αξιολόγηση των εξοφλήσεων μπορούσε να είναι ελαφρώς διαφορετική από ότι οι άλλοι προσδοκούν - τότε οι άλλοι παίχτες μπορούν να ξαφνιαστούν και να βρεθούν αντιμέτωποι με απροσδόκητες καταστάσεις.

Οι εκλεπτύνσεις που εκμεταλλεύονται αυτό το χαρακτηριστικό υλοποιούνται σε δύο στάδια.

Στο πρώτο στάδιο κάποιος αναγνωρίζει μια Nash ισορροπία σε μια διαταραχή του αρχικού παιγνίου. Συνήθως εξασφαλίζεται περιορίζοντας κάθε παίχτη στο να τυχαιοποιήσει τις στρατηγικές που δίνουν θετικές πιθανότητες σε όλες του τις αρχικές καθαρές στρατηγικές.

Στο δεύτερο στάδιο μπορούν να αναγνωριστούν εκείνες οι ισορροπίες του αρχικού παιγνίου που είναι όρια των ισορροπιών των διαταραγμένων παιγνίων καθώς χαλαρώνεται ο περιορισμός στο να επιτρέπονται κατώτερες στρατηγικές που έχουν μηδενική πιθανότητα.

Οι εκλεπτύνσεις αυτές επίσης εξαιρούν τις στρατηγικές που δεν είναι αξιόπιστες, αλλά υλοποιούν τη διαδοχική ορθολογικότητα έμμεσα. Το γενικό κριτήριο στο οποίο γίνεται επικάλεση καλείται **τελειότητα (perfection) ή σταθερότητα (stability)** και εξαρτάται από τα συμφραζόμενα (από το πλαίσιο). Σε κάθε περίπτωση η εκλέπτυνση παρέχεται από τις αναλύσεις διαταραγμένων παιγνίων.

Οι εκλεπτύνσεις αυτής της κατηγορίας είναι τυπικά πιο περιοριστικές λόγω των ισχυρότερων αποτελεσμάτων (effects) των διαταραχών. Δύο τέτοιες εκλεπτύνσεις είναι η τέλεια (perfect) και η κατάλληλη (proper) ισορροπία. Υπάρχουν ισορροπίες οι οποίες είναι ελαφρώς διαταραγμένες από κάποια διαταραχή των στρατηγικών των παιχτών. Μια πιο αυστηρή εκλέπτυνση επιλέγει ένα υποσύνολο των ισορροπιών το οποίο είναι πραγματικά - τέλειες (truly perfect) ή σταθερή (stable) με την έννοια ότι είναι μόνο ελαφρώς διαταραγμένη από κάθε διαταραχή των στρατηγικών των παιχτών

4.2.2 Εκλεπτύνσεις οι οποίες απαιτούν οι στρατηγικές να είναι επιτρεπόμενες

Επαναληπτική εξάλειψη κυριαρχούμενων στρατηγικών

Σε ένα σύνθετο παίγνιο, είναι ιδιαίτερα ελκυστικό να γίνει η υπόθεση ότι, προκειμένου οι παίχτες να βρουν τρόπους να απλοποιήσουν τις καταστάσεις που αντιμετωπίζουν, θα προτιμούσαν να απομονώσουν τις κινήσεις που σίγουρα δεν θα επέλεγαν ποτέ. Γίνεται λοιπόν η υπόθεση ότι οι παίχτες αποκλείουν από το συλλογισμό τους τις κινήσεις εκείνες που δεν είναι βέλτιστες απαντήσεις, ανεξάρτητα από το τι θα κάνουν οι άλλοι παίχτες. Οι κινήσεις αυτές δεν είναι άλλες από τις αυστηρά κυριαρχούμενες στρατηγικές (ενότητα 2.6.2).

Με δεδομένο ότι μια στρατηγική Ισορροπίας Nash ποτέ δεν χρησιμοποιεί μια αυστηρά κυριαρχούμενη στρατηγική, η διαδικασία ξεκινά εντοπίζοντας τις αυστηρά κυριαρχούμενες στρατηγικές και τις διαγράφει, με αποτέλεσμα ένα μικρότερο στιγμιότυπο του παιχνιδιού. Από τις στρατηγικές που παρέμειναν μετά την εξάλειψη των κυριαρχούμενων στρατηγικών υπάρχει περίπτωση να προκύψουν αυστηρά κυριαρχούμενες στρατηγικές, στρατηγικές που πριν την εξάλειψη δεν ήταν αυστηρά κυριαρχούμενες.Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι να μην υπάρξει καμία αυστηρά κυριαρχούμενη στρατηγική. Οι στρατηγικές ισορροπίας επιλέγονται από τις εναπομείναντες κινήσεις του μειωμένου παιχνιδιού. Αν μείνει μόνο μία στρατηγική ισορροπίας τότε αυτή λέγεται ότι το παιχνίδι είναι κυρίαρχα επιλύσιμο. Όταν ολοκληρωθεί η επαναληπτική διαδικασία εξάλειψης των αυστηρά κυριαρχούμενων στρατηγικών θα παραμεινει η στρατηγική ισορροπίας για το λόγο ότι το σύνολο των ισορροπιών Nash του αρχικού παιχνιδιού συμπίπτει με το σύνολο των ισορροπιών Nash στο μειωμένο παιχνίδι, αφού παραμένουν μετά από κάθε γύρο σαν βέλτιστες απαντήσεις. Μια πιο αυστηρή εκλέπτυνση που εξαλείφει και τις ασθενώς κυριαρχούμενες στρατηγικές . Αξίζει να σημειωθεί ότι οι στρατηγικές που θα επιβιώσουν από την εξάλειψη των ασθενώς κυριαρχούμενων στρατηγικών μπορεί να εξαρτάται από τη σειρά με την οποία θα εξαλειφθούν

4.2.3 Εκλέπτυνση στα Δυναμικά παίγνια

Δυναμικά παίγνια είναι τα παίγνια στα οποία οι παίχτες δρουν επαναληπτικά, και μπορούν να ανασύρουν συμπεράσματα καθώς το παίγνιο εξελίσσεται. Ένα δυναμικό παίγνιο λέγεται ότι έχει ”τέλεια πληροφόρηση” εάν κάθε άτομο γνωρίζει από την αρχή όλα τα δεδομένα του παιγνίου, και την προηγούμενη δική του ιστορία όπως και των άλλων κάθε φορά που δρα, και οι παίχτες δεν δρουν συγχρόνως. Σε ένα τέτοιο παίγνιο κάθε ενέργεια ξεκινά ένα υποπαίγνιο.

Μια συγκεκριμένη κατηγορία εκλεπτύνσεων χρησιμοποιείται για τα δυναμικά παίγνια που αποσυνθέτει το παίγνιο σε διαδοχικά υποπαίγνια καθώς ο χρόνος περνά. Σε αυτή την περίπτωση εκείνες οι στρατηγικές που είναι ασθενώς κυριαρχούμενες, επειδή είναι αυστηρά κυριαρχούμενες στο τελικό υποπαίγνιο διαγράφονται πρώτες, μετά εκείνες του προτελευταίου παιγνίου κ.ο.κ. Στα παίγνια με ”τέλεια πληροφόρηση” αυτή η διαδικασία υλοποιεί το κριτήριο το οποίο καλείται **προς τα πίσω επαγωγή (backward induction)** και η ισορροπία η οποία επιβιώνει είναι μια ανάμεσα από εκείνες οι οποίες είναι **υποπαιγνιακά τέλειες (subgame-perfect)**. Γενικότερα μια υποπαιγνιακά τέλεια ισορροπία είναι μια ισορροπία η οποία εισάγει μια ισορροπία σε κάθε υποπαίγνιο. Το ανεπίσημο κριτήριο της **προς τα εμπρός επαγωγής (forward induction)** έχει αρκετές διατυπώσεις. Μια τυπική εφαρμογή του κριτηρίου της προς τα εμπρός επαγωγής μιμείται την προς τα πίσω επαγωγή αλλά αντίστροφα. Εάν ένα άτομο έχει προηγουμένως απορρίψει μια επιλογή η οποία θα μπορούσε να ήταν ανώτερη συγκρινόμενη με τις εξοφλήσεις όλων εκτός της ισορροπίας του μεταγενέστερου υποπαιγνίου, τότε το άτομο ενδεχομένως να προσδοκά (προβλέπει) την ευνοϊκή ισορροπία και να προτίθεται να χρησιμοποιήσει τη στρατηγική ισορροπίας του υποπαιγνίου.

Η προς τα πίσω επαγωγή αναδύει μια μοναδική **υποπαιγνιακά τέλεια ισορροπία** εάν δεν υπάρχουν δεσμεύσεις. Οι εκλεπτύνσεις της Ισορροπίας Nash είναι ιδιαίτερα χρήσιμες στα δυναμικά παίγνια.

Η Ισορροπία Nash δεν διαχωρίζει μεταξύ των περιπτώσεων στις οποίες κάθε παίχτης δεσμεύεται αρχικά και ανέκκλητα στη στρατηγική του καθολοκλήρου στο παίγνιο, και σε αυτές τις περιπτώσεις στις οποίες ένας παίχτης συνεχώς ανα-βελτιστοποιεί καθώς αυτό εξελίσσεται. Η διαφοροποίηση αυτή έχει χαθεί για το λόγο ότι ο ορισμός της Nash Ισορροπίας προϋποθέτει ότι οι παίχτες θα επιμείνουν στις στρατηγικές που έχουν επιλέξει αρχικά. Οι πιο πολλές εκλεπτύνσεις της Ισορροπίας Nash έχουν σκοπό να αναβιώσουν αυτή τη σημαντική διαφοροποίηση

4.2.4 Εκλεπτύνσεις οι οποίες απαιτούν διαδοχική ορθολογικότητα

Σε δυναμικά παίγνια με τέλεια ισορροπία, η εφαρμογή της προς τα πίσω επαγωγής είναι σαφής γιατί σε κάθε ενδεχόμενο ο παίχτης επιλέγει μια δράση γνωρίζοντας ακριβώς το υποπαίγνιο που ακολουθεί.

Ο παίχτης κάνοντας πρόβλεψη μπορεί να επιλέξει τη βέλτιστη στρατηγική για το υπόλοιπο του παιγνίου εφαρμόζοντας **την αρχή της βελτιστοποίησης (principle of optimality)** - η βέλτιστη στρατηγική στο τρέχων υποπαίγνιο αποτελείται από μια εκ των αρχικών κινήσεων, η οποία όταν ακολουθηθεί από βέλτιστες στρατηγικές στα μεταγενέστερα υποπαίγνια, αποφέρει τη βέλτιστη απόδοση. Έτσι, καταρχήν, η βέλτιστη στρατηγική μπορεί να βρεθεί ξεκινώντας από τις τελικές καταστάσεις μέσω όλων των πιθανών καταστάσεων του παιγνίου. Εκείνες οι εκλεπτύνσεις που επιλέγουν ισορροπίες ικανοποιώντας τη διαδοχική ορθολογικότητα χρησιμοποιούν μια ανάλογη διαδικασία. Το ανάλογο της κατανομής πιθανοτήτων είναι ένα σύστημα "πεποιθήσων"(beliefs) μια για κάθε ενδεχόμενο στο οποίο μπορεί να βρεθεί ο παίχτης. Κάθε πεποίθηση είναι μια εξαρτώμενη κατανομή πιθανοτήτων στην προηγούμενη ιστορία του παιγνίου, δεδομένου του ενδεχομένου στο οποίο έχει φθάσει. Έτσι σε οποιαδήποτε έκταση του παιγνίου ο παίχτης είναι στιγμιαία αβέβαιος για τις προτιμήσεις των άλλων παιχτών πάνω στις τελικές εξοφλήσεις, όσον αφορα τις προηγούμενες ενέργειες τους, τότε η τρέχουσα πεποίθηση του παρέχει την κατανομή πιθανοτήτων πάνω σε διάφορα ενδεχόμενα.

Μια πιο ισχυρή εκλέπτυνση επιλέγει την **διαδοχική ισορροπία (sequential equilibria)**. Μια διαδοχική ισορροπία απαιτεί το σύστημα πεποιθήσεων του κάθε παίχτη να είναι συνεπές με τη δομή του παιγνίου. Η συνέπεια ορίζεται επίσημα σαν την απαίτηση στο ότι το σύστημα πεποιθήσεων του κάθε παίχτη είναι το όριο των εξαρτημένων πιθανοτήτων που ορίζεται από τις στρατηγικές των παιχτών σε ένα διαταραγμένο παίγνιο.

Μια επιπλέον εκλέπτυνση επιλέγει την σχεδόν -τέλεια ισορροπία (quasi - perfect equilibria), η οποία απαιτεί η στρατηγική του παίχτη να είναι επιτρεπτή (admissibility) συνεχόμενα σε κάθε ενδεχόμενο , αποκλείοντας κάθε περίπτωση να διαφοροποιηθεί από την προτιθέμενη στρατηγική. **Ακόμη πιο ισχυρή είναι η κατάλληλη ισορροπία (proper equilibria)**.

Αυτή η διαδοχή των προοδευτικά ισχυρότερων εκλεπτύνσεων είναι τυπική. Γιατί η κατάλληλη υπαινίσσεται σχεδόν τέλεια που υπαινίσσεται διαδοχική. Κάποιος θα μπορούσε να σκεφθεί ότι είναι αρκετό πάντα να χρησιμοποιείται η καταλληλότητα σαν εκλέπτυνση. Ωστόσο η υπερισχύουσα πρακτική στις κοινωνικές επιστήμες είναι η επικάλεση της πιο αδύναμης εκλέπτυνσης η οποία επαρκεί για το υπό μελέτη κάθε φορά παίγνιο. Εάν παράδειγμα υπάρχει μια μοναδική διαδοχική ισορροπία η οποία χρησιμοποιεί μόνο επιτρεπτές στρατηγικές τότε αποφεύγεται η εισαγωγή δυνατότερων κριτηρίων.

4.2.5 Εκλεπτύνσεις που προκύπτουν από τα διαταραγμένα παίγνια

Μπορεί να θεωρηθεί ότι κατά τη διάρκεια του παιγνίου οποιοσδήποτε παίχτης θα μπορούσε να διαφοροποιηθεί από τη στρατηγική ισορροπίας του για κάποιο εξωγενή λόγο ο οποίος δεν απεικονιζόταν στην αρχική περιγραφή του παιγνίου. Η αναγνώριση της δυνατότητας για διαφοροποίηση, όσο και απίθανο θα μπορούσε να είναι, εξασφαλίζει ότι η στρατηγική του παίχτη περιέχει ένα χαρακτηριστικό της βέλτιστης απάντησης στις διαφοροποιήσεις των άλλων από την ισορροπία. Επομένως ο αντικειμενικός σκοπός είναι να χαρακτηριστούν εκείνες οι ισορροπίες οι οποίες επιδρούν μόνο ελαφρώς με μικρές πιθανότητες των διαφοροποιημένων συμπεριφορών ή διαφοροποιήσεων στις προσδοκίες. Ο παραπάνω συλλογισμός υλοποιείται με τη θεώρηση των διαταραχών σε ένα παίγνιο. Αυτές μπορεί να είναι διαταραχές των στρατηγικών ή των εξοφλήσεων, αλλά βασικά το καθαρό αποτέλεσμα των διαταραχών των στρατηγικών των άλλων είναι να διαταραχθούν οι εξοφλήσεις του παίχτη.

Η κατασκευή της τέλειας (perfect) ισορροπίας διαφωτίζει τη βασική μέθοδο, η οποια χρησιμοποιεί δύο βήματα.

1. Για κάθε μικρό θετικό αριθμό ε κάποιος μπορεί να βρει μια ε-τέλεια (e-perfect) ισορροπία που έχει οριστεί από την εκλέπτυνση όπου η στρατηγική κάθε παίχτη έχει την ακόλουθη ιδιότητα : κάθε μια από τις καθαρές στρατηγικές χρησιμοποιείται με θετική πιθανότητα, αλλά οποιαδήποτε καθαρή στρατηγική η οποία είναι κατώτερη απάντηση στις στρατηγικές των άλλων έχει πιθανότητα όχι μεγαλύτερη από ε. Έτσι μια ε- τέλεια ισορροπία υποθέτει ότι

κάθε στρατηγική, και επομένως κάθε ενέργεια κατά τη διάρκεια του παιγνίου θα μπορούσε να συμβεί ακόμα και αν ήταν **suboptimal**.

2. Κάποιος τότε παίρνει μια τέλεια ισορροπία σαν το όριο της σύγκλισης των επόμενων ε-τέλειων ισορροπιών

Ένας εναλλακτικός ορισμός της τέλειας ισορροπίας απαιτεί ότι κάθε στρατηγική του παίχτη να είναι βέλτιστη απάντηση σε μια συνεχη σύγκλιση στη στρατηγική των άλλων για τις οποίες όλες οι καθαρές στρατηγικές έχουν θετική πιθανότητα - αυτό αποκαλύπτει κατηγορηματικά ότι πετυχαίνεται βελτιστοποίηση εναντίον μικρών πιθανοτήτων διαφοροποίησης, και ότι η τέλεια ισορροπία χρησιμοποιεί μόνο επιτρεπτές στρατηγικές. Είναι γεγονός ότι η τέλεια ισορροπία των παιγνίων σε κανονική μορφή εισάγει τη διαδοχική ισορροπία στη δυναμική έκδοση του παιγνίου.

Μια πιο δυνατή εκλέπτυνση επιλέγει την κατάλληλη (proper) ισορροπία. Αυτή η εκλέπτυνση υποθέτει ότι όσο πιο κατώτερη είναι η αναμενόμενη εξόφληση της στρατηγικής, τόσο λιγότερο πιθανό είναι να χρησιμοποιηθεί. Η κατασκευή διαφέρει μόνο στο βήμα 1. Εάν η καθαρή στρατηγική S είναι κατώτερη από την T σαν απάντηση στις στρατηγικές των άλλων τότε η S έχει πιθανότητα όχι περισσότερο από ε φορές την πιθανότητα της T. Μια κατάλληλη ισορροπία εισάγει μια διαδοχική ισορροπία σε κάθε μια από τις ισοδύναμες περιγραφές του δυναμικού παιγνίου.

Μια τέλεια ή μία κατάλληλη ισορροπία εξαρτάται από τις συγκεκριμένες διαταραχές που χρησιμοποιούνται για την κατασκευή της ε-τέλειας ή της ε-κατάλληλης ισορροπίας. Ορισμένες φορές το παίγνιο έχει μια ισορροπία οποία είναι απαραίτητη (essential) ή πραγματικά-τέλεια (truly-perfect) με την έννοια ότι οποιαδήποτε σ στρατηγικη μπορεί να χρησιμοποιηθεί όταν διαταράσσεται το παίγνιο με λιγότερο από ε ως προς την σ, όπως παραπάνω.

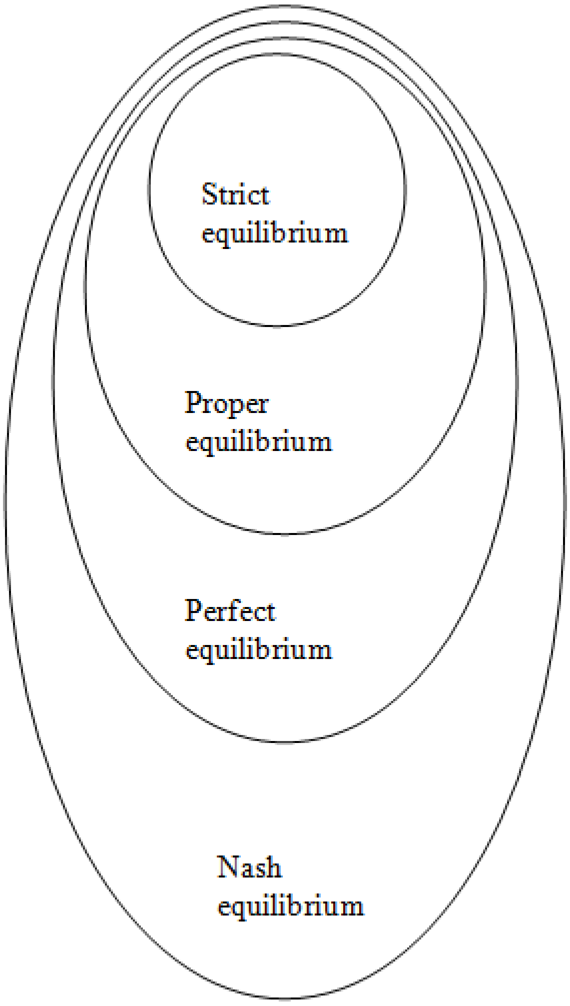
Θα πρέπει επομενως να ληφθεί υπ οψιν του το σύνολο των ισορροπιών όταν επικαλείται πιο άκαμπτες εκλεπτύνσεις όπως η truly-perfect.

Θα μπορούσε επίσης να εφαρμοστεί ένα μάλλον διαφορετικό τεστ στο σύνολο των ισορροπιών. Λαμβάνοντας υπ όψιν το σύνολο των ισορροπιών απαιτείται ότι κάθε επαρκώς μικρή διαταραχή ενος συγκεκριμενου φασματος του παιγνίου να έχει μια ισορροπία κοντά σε μια ισορροπία του συνόλου. Κάποιες εκλεπτύνσεις επιμένουν σε ένα ελάχιστο κλειστό σύνολο ισορροπιών με αυτή την ιδιότητα. **Η κύρια εκλέπτυνση αυτού του είδους χρησιμοποιεί τις διαταραχές των στρατηγικών για να παράγει διαταραγμένα παίγνια.** Σύμφωνα με τον Kohlberg και Mertens ένα σύνολο ισορροπιών είναι σταθερό (stable) εάν για κάθε γειτονιά του συνόλου υπάρχει μια θετική πιθανότητα ε τέτοια ώστε, για κάθε συνδυασμό σ εξολοκλήρου μικτής στρατηγικής, κάθε διαταραχή του παιγνίου με λιγότερο από ε ως προς την σ έχει μια ισορροπία σε αυτή τη γειτονιά.

Μια διαφορετική προσέγγιση θεωρεί μια μεγαλύτερη κλάση των διαταραχών των εξοφλήσεων. Σε αυτή την περίπτωση δεν υπάρχει εγγύηση στην αμεταβλητότητα στις πλεονάζουσες στρατηγικές, έτσι έχει επιβληθεί κατηγορηματικότητα. Γι' αυτό, λέγεται ότι δύο παίγνια είναι ισοδύναμα εάν η διαγραφή όλων των περιττών στρατηγικών έχει αποτέλεσμα το ίδιο μειωμένο παίγνιο. Παρόμοια τυχαίες στρατηγικές στα δύο αυτά παίγνια είναι ισοδύναμες εάν αποφέρουν την ίδια τυχαιοποίηση στις καθαρές στρατηγικές του μειωμένου παιγνίου. Ανεπίσημα ένα σύνολο ισορροπιών είναι υπερ σταθερό εάν κάθε διαταραχή των εξοφλήσεων ενός ισοδύναμου παιγνίου έχει μια ισοδύναμη ισορροπία με μια κοντά στο σύνολο.

Αλλά μέχρι τώρα κανένας δεν έχει εξασφαλίσει μια ιδανική εκλέπτυνση ισορροπίας Nash.

Σχηματικά η σχέση μεταξυ των πιο σημαντικών εκλεπτύσεων μπορεί να απεικονισθει με τη μορφή συνόλων ως ακολουθως:


Strict
equilibrium
Proper
equilibrium
Perfect
equilibrium
Nash
equilibrium

Κεφάλαιο 5

ΕΞΕΛΙΚΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ

5.1 Εισαγωγή

[Ree],[Wiki12]

Η Εξελικτική Θεωρία Παιγνίων (Evolutionary Game Theory-EGT) (εφεξής ΕΘΠ) είναι ένα πεδίο που συνδυάζει τις αρχές της θεωρίας των παιγνίων, την εξέλιξη, και τα δυναμικά συστήματα για να ερμηνεύσει τις αλληλεπιδράσεις των βιολογικών παραγόντων. Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό του συνόλου των μοντέλων της Εξελικτικής Θεωρίας Παιγνίων είναι η επανάληψη. Εάν τα παιχνίδια δεν επαναλαμβάνονταν, τα μοντέλα της Εξελικτικής Θεωρίας Παιγνίων δεν θα μπορούσαν να παρέχουν καμία πληροφορία σε προσαρμοστικές συμπεριφορές και στρατηγικές, λόγω της δυναμικής φύσης των μηχανισμών της εξέλιξης. Οι επαγγελματίες στον τομέα έχουν χρησιμοποιήσει τη θεωρία της ΕΘΠ για να εξηγήσουν με επιτυχία βιολογικά φαινόμενα, αλλά μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για την ερμηνεία της Κλασσικής Θεωρίας Παιγνίων (εφεξής ΚΘΠ) από διαφορετική σκοπιά

5.2 Διαφορές μεταξύ Κλασσικής ΘΠ και ΕΘΠ

[Wei98],[EK10],[Ree],[SA02]

Σύμφωνα με την ορθολογική προσέγγιση της ΚΘΠ σε κάθε κατάσταση του παιγνίου γίνεται η υπόθεση ενός τέλεια ορθολογικού παίχτη . Οι παίχτες παίζουν ακριβώς μία φορά, το παίγνιο είναι εις γνώσιν των παιχτών, υπάρχει κοινή γνώση κτλ. Αντιθέτως στην εξελικτική προσέγγιση, υπάρχει η υπόθεση ότι το υπό μελέτη παίγνιο παίζεται πολλές φορές από περιορισμένα ορθολογικούς παίχτες οι οποίοι ανασύρονται τυχαία από ένα μεγάλο πληθυσμό και έχουν καθόλου ή μικρή γνώση του παιγνίου. Ένα εξελικτικό μοντέλο συνδυάζει δύο διαδικασίες : **μια διαδικασία επιλογής**, η οποία ευνοεί κάποιες ποικιλίες ,και μια διαδικασία που δημιουργεί αυτές τις ποικιλίες και καλείται **διαδικασία μετάλλαξης**. Η διαδικασία επιλογής σχετίζεται με την επιβίωση, ενώ η διαδικασία μετάλλαξης σχετίζεται με τη μέθοδο δοκιμής.

Μέσω των δύο παραπάνω διαδικασιών υποδηλώνεται ότι η ΕΘΠ στηρίζεται στην αρχή της θεωρίας της εξέλιξης, γνωστή και ως Δαρβινική Θεωρία. Η θεωρία της εξέλιξης βασίζεται στην ιδέα ότι τα γονίδια ενός οργανισμού καθορίζουν σε μεγάλο βαθμό τα χαρακτηριστικά του, και κατά συνέπεια την καταλληλότητα επιβίωσής του σε ένα δεδομένο περιβάλλον. Οι καταλληλότεροι οργανισμοί τείνουν να παράγουν περισσότερους απογόνους, αυξάνοντας έτσι την αντιπροσώπευση τους στον πληθυσμό. Η μεγαλύτερη αντιπροσώπευση των καταλληλότερων οργανισμών μέσω μεγαλύτερου ποσοστού συμμετοχής στο ρυθμό αναπαραγωγής και κατά συνέπεια η υπερίσχυσή τους το πληθυσμό βασίζεται στη διαδικασία της φυσικής επιλογής

Μια ποιοτική διαφορά μεταξύ της εξελικτικής και της ορθολογικής προσέγγισης είναι ότι ενώ η δεύτερη εστιάζει στα άτομα και τι συμβαίνει στο μυαλό τους, η εξελικτική προσέγγιση αντί αυτού αναλύει τη κατανομή των συμπεριφορών (στρατηγικών) στον πληθυσμό. Θα μπορούσε να ειπωθεί ότι η διαδικασία επιλογής αντικαθιστά την νοητική διαδικασία για την επιλογή στρατηγικής που γίνεται από τον ορθολογικό παίχτη, ενώ η διαδικασία της μετάλλαξης αντικαθιστά την νοητική διαδικασία της εξερεύνησης του συνόλου στρατηγικών και τις συνέπειες που προκύπτουν από τις εξοφλήσεις τους

Με άλλα λόγια δύο είναι τα χαρακτηριστικά της εξελικτικής θεωρία παιγνίων σε αντίθεση με την παραδοσιακή θεωρία : Πρώτον, οι παίκτες δεν θεωρούνται ότι είναι τόσο «ορθολογικοί» ή «γνωρίζουν» ώστε να είναι σε θέση να προβλέψουν τις επιλογές του άλλου παίκτη σωστά. Δεύτερο (και αντί αυτού), ορίζεται η ρητή δυναμική διαδικασία η οποία και περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο προσαρμόζονται με την πάροδο του χρόνου οι επιλογές των παιχτών καθώς μαθαίνουν από την εμπειρία σχετικά με τις επιλογές άλλων παικτών και τη δομή του ίδιου του παιγνίου. Έτσι, η προσέγγιση της ΕΘΠ προσπαθεί αφενός μεν να εξηγήσει πώς επιτυγχάνεται μια ισορροπία βασιζόμενη στην μέθοδο δοκιμής και σφάλματος (μάθηση) αντί της ενδοσκόπησης μέσω των ορθολογικών επιχειρημάτων όπως προβάλλονται στην παραδοσιακή Θεωρία Παιγνίων αφετέρου δε να επιβεβαιώσει ότι η στρατηγική που επιβίωσε είναι εξελικτική ισορροπία

5.3 Θεωρητικό πλαίσιο της Εξελικτικής Θεωρίας Παιγνίων

[SN99],[Osb02],[EK10],[SP73],[San09]

5.3.1 Επαναπροσδιορισμός βασικών εννοιών

Μέσα από την οπτική της Εξελικτικής Βιολογίας, οι δύο βασικές έννοιες της Θεωρίας Παιγνίων δηλαδή, η στρατηγική και η εξόφληση θα πρέπει να επαναερμηνευθούν

Συμπεριφορά αντί στρατηγικής

Η στρατηγική δεν είναι πλέον ένα σκόπιμο σχέδιο δράσης, αλλά ένα κληρονομικό χαρακτηριστικό, δηλαδή γενετικά προκαθορισμένο και αντιστοιχεί στη συμπεριφορά ενός ατόμου που είναι μέλος ενός πληθυσμού Οι παίχτες είναι τα μέλη ενός πληθυσμού, οι οποίοι ανταγωνίζονται για ένα μεγαλύτερο μερίδιο απογόνων τους .

Το κλειδί στην αντίληψη από την οπτική της Εξελικτικής Θεωρίας Παιγνίων είναι ότι πολλές συμπεριφορές εμπλέκονται στη αλληλεπίδραση πολλαπλών οργανισμών σε ένα πληθυσμό, και η επιτυχία οποιουδήποτε από αυτούς τους οργανισμούς εξαρτάται από το πώς η συμπεριφορά του αλληλεπιδρά με αυτή των άλλων.

Σε διάφορες παραλλαγές συμπεριφοράς που παρατηρούνται σε ένα πληθυσμό, η φυσική επιλογή οδηγεί στην αύξηση της συχνότητας των παραλλαγών με τη μεγαλύτερη καταλληλότητα. Αν η επιτυχία της συμπεριφοράς δεν εξαρτάται από την συχνότητα, τελικά οδηγεί στην εδραίωση της βέλτιστης παραλλαγής. Αλλά αν η επιτυχία της συμπεριφοράς είναι εξαρτώμενη από τη συχνότητα της τότε μπορεί να οδηγήσει σε μια σύνθεση του πληθυσμού όπου άλλες παραλλαγές μπορούν να έχουν καλύτερα αποτελέσματα

Κληρονομικότητα συμπεριφοράς και καταλληλότητα αντί Εξόφλησης

Η μοντελοποίηση των καταστάσεων βασίζεται στην έννοια του στρατηγικού παιγνίου. Οι παίχτες όμως ερμηνευτικά είναι ζεύγη οργανισμών/μελών ενός πληθυσμού που αλληλεπιδρούν. Το σύνολο κινήσεων του κάθε παίχτη αποτελείται από τους τρόπους συμπεριφοράς που προκαθορισμένα μπορεί να έχει. Η εξόφληση του παίχτη δεν ερμηνεύεται σαν την αντανάκλαση των υποκειμενικών συναισθημάτων του, ούτε οι κινήσεις του σαν συνειδητή επιλογή. Η εξόφληση μετρά την ακριβή καταλληλότητα του κάθε οργανισμού και δεν μετράται σε απομόνωση, αντί αυτού αξιολογείται στα πλαίσια ολόκληρου του πληθυσμού στον οποίο ζει. Συνεπώς η εξόφληση σύμφωνα με τη Δαρβινική Θεωρία μετρά τη βιολογική καταλληλότητα ή αλλιώς την αναπαραγωγική επιτυχία.

Γίνεται δηλαδή η υπόθεση ότι ο κάθε παίχτης είναι προγραμματισμένος να ακολουθήσει συγκεκριμένο τρόπο συμπεριφοράς, ο οποίος προέρχεται από μία μεταξύ δύο πηγών : με υψηλή πιθανότητα κληρονομημένος από το/τους γονιό/γονείς του, και με μικρή (αλλά θετική) πιθανότητα, να έχει ανατεθεί στον παίχτη σαν αποτέλεσμα μιας μετάλλαξης. Στην παρούσα ερμηνεία ο κάθε παίχτης έχει μόνο έναν γονιό, και εκτός αν πρόκειται για μετάλλαξη, ο παίχτης απλά έχει την ίδια συμπεριφορά με αυτή του γονιού. Αυτό το μοντέλο της κληρονομικότητας συλλαμβάνει τα στοιχειώδη χαρακτηριστικά και της γενετικής κληρονομικότητας και της κοινωνικής κληρονομικότητας : οι παίχτες είτε ακολουθούν αυτό που είναι προγραμματισμένο (γενετικά) στα γονίδια τους, και το οποίο προέρχεται από τους γονείς, ή μαθαίνουν πώς να συμπεριφερθούν μιμούμενοι τους γονείς τους. Εάν δεδομένων των τρόπων συμπεριφοράς όλων των άλλων οργανισμών, η βιολογική καταλληλότητα ενός οργανισμού συσχετισμένη με την ενέργεια (συμπεριφορά) Ε, υπερτερεί της καταλληλότητας η οποία είναι συσχετισμένη με την συμπεριφορά E', τότε προκαλείται αλλαγή στην σύνθεση των συμπεριφορών στο πληθυσμό. Έτσι μια ρύθμιση ενεργειών (συμπεριφορών) είναι σταθερή μόνο εάν η ενέργεια (συμπεριφορά) κάθε οργανισμού είναι η βέλτιστη απάντηση στο περιβάλλον, και υπαινίσσεται σχέση με την Ισορροπία Nash

5.4 Δύο προσεγγίσεις της ΕΘΠ

[SN99],[Osb02],[EK10],[SP73],[San09],[Ree],[Now90],[Roo09],[Jon08],[Smi74],[Wei98] Υπάρχουν δύο προσεγγίσεις στην ΕΘΠ. Η πρώτη προσέγγιση προκύπτει από τους Maynard Smith and Price, και εισάγει την έννοια της Εξελικτικά Σταθερής Στρατηγικής σαν το βασικό εργαλείο ανάλυσης. Η δεύτερη προσέγγιση δημιουργεί ένα ακριβές μοντέλο της διαδικασίας με την οποία αλλάζει η συχνότητα των συμπεριφορών στον πληθυσμό και μελετά τις ιδιότητες της εξελικτικής δυναμικής στο μοντέλο αυτό.

Η πρώτη προσέγγιση μπορεί να θεωρηθεί ως παροχή μιας στατικής εννοιολογικής ανάλυσης της εξελικτικής σταθερότητας. Ο όρος στατική χρησιμοποιείται επειδή στους ορισμούς που δίνονται δεν γίνεται τυπική αναφορά στην διαδικασία στην οποία βασίζεται η αλλαγή συμπεριφορών στον πληθυσμό. Δηλαδή δεν εξηγείται πως ο πληθυσμός φθάνει σε μια τέτοια σταθερή συμπεριφορά. Αντί αυτού γίνεται το ερώτημα κατά πόσον, αφού φθάσει σε αυτή τη συμπεριφορά, αυτή είναι ισχυρή στις εξελικτικές πιέσεις. Αντίθετα στη δεύτερη προσέγγιση δεν γίνεται προσπάθεια ορισμού της έννοιας της εξελικτικής σταθεράς : Εφόσον ορίζεται το μοντέλο δυναμικής του πληθυσμού, όλο το εννοιολογικό πλαίσιο της εξελικτικής σταθερότητας που χρησιμοποιείται στην ανάλυση του δυναμικού συστήματος έρχεται στο προσκήνιο

5.4.1 Η έννοια της εξελικτικής σταθεράς (πρώτη προσέγγιση)

Η έννοια της Ισορροπίας Nash στην ΚΘΠ ήταν κεντρική στην αιτιολόγηση των προτιμήσεων των εξοφλήσεων σε ένα παίγνιο. Σε μια Ισορροπία Nash ενός στρατηγικού παιγνίου δυο ατόμων κανένας παίχτης δεν έχει κίνητρο να διαφοροποιηθεί από την τρέχουσα στρατηγική που χρησιμοποιεί. Η κατάσταση ισορροπίας είναι η επιλογή των στρατηγικών που τείνουν να επιμείνουν από τη στιγμή που θα χρησιμοποιηθούν από τους παίχτες. Η αντίστοιχη στις εξελικτικές καταστάσεις είναι αυτή της Εξελικτικά Σταθερής Στρατηγικής – μια γενετικά καθορισμένη στρατηγική η οποία τείνει να επιμείνει από τη στιγμή που έχει επικρατήσει στον πληθυσμό.

Η Εξελικτικά Σταθερή Στρατηγική (Evulotionary Stable Strategy-ESS,ΕΣΣ) είναι η θεμελιώδης έννοια της ΕΘΠ και ερμηνευτικά αντιπροσωπεύει την σταθερή ρύθμιση των συμπεριφορών σε έναν πληθυσμό ώστε να μην μπορεί να εισβάλει ένας μεταλλαγμένος τρόπος συμπεριφοράς. Η Εξελικτικά Σταθερή Στρατηγική είναι το ανάλογο της Ισορροπίας Nash. Στην πραγματικότητα είναι μια ισορροπία Nash, αλλά κάπως ενισχυμένη και μπορεί να ειδωθεί σαν μια εκλέπτυνση της Ισορροπίας Nash ή σαν τεχνική επιλογή ισορροπίας. Για τη διαισθητική ερμηνεία της ΕΣΣ ας θεωρηθεί ένας πληθυσμός από οργανισμούς του οποίου τα μέλη επαναληπτικά και τυχαία συναντιούνται σε ζεύγη. Ο πληθυσμός είναι αρκετά μεγάλος ώστε η πιθανότητα να συναντηθεί το ίδιο ζεύγος πάνω από μια φορά είναι αμελητέα. Το σύνολο των πιθανών τρόπων συμπεριφοράς για κάθε οργανισμό είναι το ίδιο, και οι συνέπειες από την αλληλεπίδραση για έναν οργανισμό εξαρτάται μόνο από τις ενέργειες του και από αυτές του αντιπάλου και όχι από το όνομά του. Κάθε οργανισμός φυσιολογικά παράγει απογόνους. Ο τρόπος συμπεριφοράς ενός οργανισμού είναι με μεγάλη πιθανότητα αυτή του γονέα και με μικρή πιθανότητα ένας τυχαία επιλεγμένος - από πεπερασμένο σύνολο - μεταλλαγμένος τρόπος συμπεριφοράς. Αυτό σημαίνει ότι εάν ένα μικρό μέρος του πληθυσμού αποτελείται από ίδιες ακριβώς μεταλλάξεις, τότε η κατεστημένη συμπεριφορά (καθαρή ή μικτή στρατηγική) x είναι εξελικτικά σταθερή όταν κάθε μεταλλαγμένη συμπεριφορά (καθαρή ή μικτή στρατηγική) y η οποία εμπεριέχεται στο μικρό αυτό μέρος του πληθυσμού η x έχει καταλληλότητα (λαμβάνει εξόφληση) υψηλότερη από αυτήν της y.Το σημαντικό είναι ότι υπάρχει κάποια τιμή ε για το κλάσμα του πληθυσμού στο οποίο δεν μπορεί να εισβάλει καμία μετάλλαξη

Τυπικά : *Για κάθε στρατηγική* $y \neq x$ *η ακόλουθη ανισότητα θα πρέπει να ισχύει για όλα τα επαρκώς μικρά* $\varepsilon > 0$

$$u[x,(1-\varepsilon)x+\varepsilon y] > u[y,(1-\varepsilon)x+\varepsilon y],$$

όπου η έκφραση στην αριστερή πλευρά υποδηλώνει την (αναμενόμενη) εξόφληση της στρατηγικής x όταν παίζεται εναντίον της μικτής στρατηγικής $(1-\varepsilon)x+\varepsilon y$ που αναπαριστά την μεταγενεστερη μίξη του πληθυσμου , και παρόμοια η έκφραση στη δεξιά πλευρά υποδηλώνει την (αναμενόμενη) εξόφληση της στρατηγικής y.

Σε αυτό το πλαίσιο, μια δεδομένη στρατηγική είναι εξελικτικά σταθερή, εαν όταν όλος ο πληθυσμός χρησιμοποιεί μια στρατηγική οποιαδήποτε μικρή ομάδα από εισβολείς που χρησιμοποιούν μια διαφορετική στρατηγική τελικά θα πεθάνουν μετά από πολλές γενεές. Αυτή η μικρή ομάδα από εισβολείς μπορεί να χαρακτηριστεί είτε σαν μετανάστες που μετακινήθηκαν ώστε να συμμετέχουν στον πληθυσμό, είτε σαν μεταλλαγμένα άτομα που γεννήθηκαν με καινούρια (διαφορετική) συμπεριφορά και είναι μέλη του πληθυσμού. Αυτή η ιδέα συλλαμβάνεται με όρους αριθμητικής εξόφλησης λέγοντας, ότι όταν όλος ο πληθυσμός χρησιμοποιεί την στρατηγική I, τότε μια μικρή ομάδα από εισβολείς που χρησιμοποιούν μια εναλλακτική στρατηγική J θα πρέπει να έχουν αυστηρά μικρότερη καταλληλότητα από ότι αυτοί που χρησιμοποιούν τη στρατηγική πλειονότητας Ι. Τη στιγμή που η καταλληλότητα μεταφράζεται σε αναπαραγωγική επιτυχία, οι αρχές της εξέλιξης θέτουν ότι η αυστηρά χαμηλότερη καταλληλότητα είναι η προϋπόθεση που προκαλεί σε έναν υποπληθυσμό (όπως οι χρήστες της στρατηγικής J) να συρρικνωθεί στο χρόνο μέσα από τις πολλές γενεές, και τελικά να πεθάνει με μεγάλη πιθανότητα . Πιο επίσημα θέτονται οι βασικοί όροι ως ακολούθως :

- Η καταλληλότητα ενός οργανισμού σε ένα πληθυσμό είναι η αναμενόμενη εξόφληση που λαμβάνει από μια αλληλεπίδραση με ένα τυχαίο μέλος του πληθυσμού
- Η στρατηγική J εισβάλει σε μια στρατηγική Ι στο επίπεδο x, για ένα μικρό θετικό αριθμό x, εάν το x μέρος του πληθυσμού χρησιμοποιεί την J και το $1 - x$ μέρος του πληθυσμού χρησιμοποιεί την Ι.
- Τέλος η στρατηγική Ι είναι εξελικτικά σταθερή εάν υπάρχει ένας μικρός θετικός αριθμός ψ τέτοιος ώστε όταν οποιαδήποτε άλλη στρατηγική J εισβάλει στη Ι σε οποιοδήποτε επίπεδο $x < \psi$, η καταλληλότητα ενός οργανισμού που παίζει την Ι είναι αυστηρά μεγαλύτερη από την καταλληλότητα του οργανισμού που παίζει την στρατηγική J

Ορισμός Εξελικτικά Σταθερής Στρατηγικής

Στο πλαίσιο της Εξελικτικής Θεωρίας Παιγνίων η εξόφληση για μια στρατηγική σχετίζεται με την αύξηση της καταλληλότητας δηλαδή της φυσικής κατάστασης, γι'αυτό και οι επιτυχημένες στρατηγικές θα παράγουν περισσότερους απογόνους και επομένως τη διάδοσή τους στον πληθυσμό. Έστω $A(E, E')$ η εξόφληση (καταλληλότητα) για την στρατηγική Ε σε σύγκριση με την Ε$'$. Σε ένα ομοιογενής πληθυσμό με την υιοθέτηση της στρατηγικής E, η καταλληλότητα της $\mathrm{A}(E, E)$ είναι σταθερή. Η μεταλλαγμένη στρατηγική E' μπορεί να εισβάλει σε αυτό τον πληθυσμό μέσω της φυσικής επιλογής , αν $\mathrm{A}(\mathrm{E}', \mathrm{E}) > A(E, E)$. Η μεταλλαγμένη στρατηγική που πληροί την εξίσωση $\mathrm{A}(\mathrm{E}', \mathrm{E}) = A(E, E)$ μπορεί να εισβάλει από επιλογή, αν $\mathrm{A}(\mathrm{E}', \mathrm{E}') > A(E, E')$. Αν επιπλέον αυτή η ισότητα $\mathrm{A}(\mathrm{E}', \mathrm{E}') = A(E, \mathrm{E}')$ κρατά, μπορεί να εξαπλωθεί στον πληθυσμό και οφείλεται στην τυχαία μετακίνηση. Αυτές οι εκτιμήσεις συνεπάγουν τον ακόλουθο ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η καθαρή ή μικτή στρατηγική Ι είναι εξελικτικά σταθερή στρατηγική (ΕΣΣ) εάν η αναμενόμενη ωφέλεια της Ι όταν παίζει εναντίον του εαυτού της είναι μεγαλύτερη από την ωφέλεια οποιασδήποτε άλλης στρατηγικής J όταν παίζει εναντίον της . Αυτό μπορεί να γραφεί ως

$$E_I(I) > E_I(J)$$

όταν η Ε δίνει την αναμενόμενη ωφέλεια της στρατηγικής στην παρένθεση η οποία παίζει εναντίον της στρατηγικής που υποδηλώνεται από το δείκτη.

Ως εκ τούτου, αν ένας άπειρα ομοιογενής πληθυσμός υιοθετεί τη στρατηγική Ι, τότε μια σπάνια διαφοροποιημένη στρατηγική (μεταλλαγμένη στρατηγική) $J \neq I$ δεν μπορεί να εισβάλει στο πλαίσιο της δράσης της φυσικής επιλογής αυξάνοντας ετσι τη συχνότητά της. Δηλαδή η εξελικτικά σταθερή στρατηγική είναι μια στρατηγική η οποία αν υιοθετηθεί από σχεδόν όλο τον πληθυσμό, τότε δεν μπορεί να εισβάλει σε αυτήν μια σπάνια μεταλλαγμένη στρατηγική

Στον παραπάνω ορισμό έχει τεθεί η απαίτηση ότι $E_I(I) > E_I(J)$,σε παρίπτωση όμως που $E_I(I) = E_I(J)$, η στρατηγική Ι είναι στρατηγική ισορροπίας αλλά όχι απαραίτητα σταθερή. Για να προσδιοριστεί η σταθερότητα πρέπει να είναι γνωστές οι $E_J(I)$ και $E_J(J)$. Ετσι σε ένα πληθυσμό όπου ένα μικρό μέρος x υιοθετεί την I και το $(1-x)$ μέρος του πληθυσμού υιοθετεί την J , οι αναμενόμενες “καταλληλότητες” είναι

$$E(I) = xE_I(I) + (1-x)E_J(I),$$

$$E(J) = xE_I(J) + (1-x)E_J(J).$$

Τότε η I είναι εξελικτικά σταθερή αν $E_J(I) > E_J(J)$

Έτσι μπορεί να επεκταθεί ο ορισμός λέγοντας ότι η I είναι ΕΣΣ εάν για όλες τις εναλλακτικές στρατηγικές J ισχύει είτε

$$E_I(I) > E_I(J),$$

ή

$$E_I(I) > E_I(J) \; \text{και} \; E_J(I) > E_J(J),$$

Ένας χρήσιμος χαρακτηρισμός της εξελικτικής σταθεράς στον αρχικό ορισμό της είναι ότι μια στρατηγική I είναι εξελικτικά σταθερή (ΕΣΣ) αν και μόνον αν (α) είναι η βέλτιστη απάντηση στον εαυτό της και (β) είναι η καλύτερη απάντηση σε όλες τις άλλες στρατηγικές από ότι είναι αυτές στον εαυτό τους. Το (α) είναι απαραίτητο γιατί διαφορετικά θα μπορούσε να υπάρχει μια καλύτερη απάντηση της J στη I. Παρόμοια το (β) είναι απαραίτητο γιατί διαφορετικά θα μπορούσε να υπάρχει μια εναλλακτικά βέλτιστη απάντηση της J στην I, η οποία θα αποκόμιζε την ίδια εξόφληση όσο η I, εναντίον της I και τουλάχιστον την ίδια με την I εναντίον της J, έτσι η J θα αποκόμιζε κατά μέσο όρο περισσότερα στο μεταγενεστερο πληθυσμό

Είναι σαφές ότι οποιαδήποτε στρατηγική I ικανοποιεί αυτά τα κριτήρια είναι επίσης μια ισορροπία Nash (δεδομένου ότι είναι μια καλύτερη απάντηση στον εαυτό της και ότι το παιχνίδι είναι συμμετρικό). Στην πραγματικότητα, η ΕΣΣ είναι κάπως ισχυρότερη από μια ασθενώς κυρίαρχη στρατηγική .

Συνεπώς η ΕΣΣ μπορεί να οριστεί σχετιζόμενη με την Ισορροπία Nash σε ένα συμμετρικό στρατηγικό παίγνιο δύο ατόμων ως ακολούθως :

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>

Σε ένα συμμετρικό στρατηγικό παίγνιο δύο παιχτών στο οποίο η αναμενόμενη εξόφληση του κάθε παίχτη είναι $\mathrm{A}(E,E')$ όταν η μικτή στρατηγική του παίχτη είναι E και η μικτή στρατηγική του αντιπάλου είναι E' εξελικτικά σταθερή στρατηγική (ΕΣΣ) είναι μια μικτή στρατηγική I τέτοια ώστε

(I,I) είναι Nash ισορροπία
$\mathrm{A(E,E)} < \mathrm{A}(I,\mathrm{E})$ για κάθε $\mathrm{E} \neq I$ η I είναι η καλύτερη απάντηση στην E

Αξίζει να σημειωθεί ότι εάν η (I,I) είναι αυστηρή Nash ισορροπία, τότε η δεύτερη συνθήκη ικανοποιείται αυτόματα, για το λόγο ότι καμμία $\mathrm{E} \neq I$ δεν είναι βέλτιστη απάντηση στην I, όπως επίσης και από το γεγονός ότι η ανισότητα στην δεύτερη συνθήκη είναι αυστηρή. Εαν η ανισότητα ήταν ασθενής, τότε καταστάσεις στις οποίες οι μεταλλαγμένες στρατηγικές/συμπεριφορές ούτε πολλαπλασιάζονται ούτε πεθαίνουν αλλά αναπαράγονται με τον ίδιο ρυθμό όπως ο κανονικός πληθυσμός, θα θεωρούνταν σταθερές

Μελέτη παραδείγματος : το εξελικτικό παίγνιο Body Size

Στο εξελικτικό παίγνιο Body Size παρουσιάζεται ο τρόπος με τον οποίο εφαρμόζονται οι θεωρητικές ιδέες των παιγνίων στις εξελικτικές καταστάσεις. Το συγκεκριμένο παίγνιο έχει σχεδιαστεί για χάρη ευκολίας εξήγησης παρά για την πιστότητα στο πεδίο της βιολογίας.

Έστω ένα συγκεκριμένο είδος σκαθαριών, όπου γίνεται η υπόθεση ότι η καταλληλότητα κάθε σκαθαριού σε ένα δεδομένο περιβάλλον καθορίζεται σε μεγάλο βαθμό από το επίπεδο στο οποίο μπορεί να βρει φαγητό και να χρησιμοποιήσει εποικοδομητικά τις πρωτεΐνες του φαγητού αυτού.

Γίνεται επίσης η υπόθεση ότι στον πληθυσμό παρουσιάζεται μια συγκεκριμένη μετάλλαξη η οποία προκαλεί στα σκαθάρια την ανάπτυξη αξιοσημείωτα μεγαλύτερου μεγέθους σώματος . Στα μεταλλαγμένα σκαθάρια (λόγω μεγέθους σώματος) απαιτείται ο διαχωρισμός πιο πολλών πρωτεϊνών από το φαγητό, κάτι που έχει μια αρνητική συνέπεια στην καταλληλότητα τους.

Τα σκαθάρια σε αυτό τον πληθυσμό συναγωνίζονται μεταξύ τους για το φαγητό. Κατά το συναγωνισμό, το κάθε ένα προσπαθεί να αποκομίσει όσο περισσότερο φαγητό μπορεί. Καθόλου έκπληξη δεν προκαλεί το γεγονός ότι τα σκαθάρια με μεγάλο σωματικό μέγεθος είναι πιο αποτελεσματικά στο να απαιτήσουν πάνω από το μέσο όρο μεριδίου από το φαγητό.

Για λόγους απλότητας γίνεται επίσης η υπόθεση ότι ο διαγωνισμός φαγητού σε αυτό τον πληθυσμό εμπλέκει κάθε φορά δύο σκαθάρια που αλληλεπιδρούν μεταξύ τους οποιαδήποτε στιγμή.

Όταν δύο σκαθάρια συναγωνίζονται για φαγητό, παρατηρούνται τα εξής :

- Όταν συναγωνίζονται σκαθάρια με το ίδιο σωματικό μέγεθος, τότε παίρνουν ίσο μερίδιο φαγητού
- Οταν ένα μεγάλου μεγέθους σκαθάρι συναγωνίζεται με ένα μικρού μεγέθους σκαθάρι, το μεγάλο σκαθάρι παίρνει το μεγαλύτερο μέρος του φαγητού
- Σε όλες δε τις περιπτώσεις, τα μεγάλου μεγέθους σκαθάρια τελικά απολαμβάνουν μικρότερη καταλληλότητα από τη δεδομένη ποσότητα φαγητού, αφού, κάποια ποσότητα αυτού χρειάζεται για τη διατήρηση του μεταβολισμού τους.

Έτσι η καταλληλότητα του κάθε σκαθαριού που λαμβάνεται από το δεδομένο φαγητό σαν αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης, μπορεί να ειδωθεί σαν αριθμητική εξόφληση σε ένα παίγνιο δύο παιχτών μεταξύ του πρώτου και του δεύτερου σκαθαριού ως ακολούθως :

Το πρώτο σκαθάρι παίζει μια από τις δύο στρατηγικές Small και Large, εξαρτώμενη από το φυσικό του μέγεθος, και το δεύτερο σκαθάρι παίζει επίσης μια από τις παραπάνω στρατηγικές.

Οι εξοφλήσεις των σκαθαριών βάσει των παραπάνω στρατηγικών περιγράφεται στον παρακάτω διπίνακα

		Beatle2	
		Small	Large
Beatle1	Small	$5,5$	$1,8$
	Large	$8,1$	$3,3$

- Όταν δύο μικρά σκαθάρια συναντιούνται τότε έχουν τη ίδια εξόφληση μοιράζοντας την καταλληλότητα από το φαγητό (5,5)
- Τα μεγάλου μεγέθους σκαθάρια τα πηγαίνουν καλύτερα όταν έχουν αντίπαλο μικρά σκαθάρια - απολαμβάνοντας πολύ μεγαλύτερη καταλληλότητα από ότι τα μικρά - αποκομίζοντας έτσι (8,1)

- Ενώ τα μεγάλου μεγέθους σκαθάρια δεν μπορούν τελικά να αποκομίσουν το ίδιο μεγάλη καταλληλότητα όταν συναγωνίζονται μεταξύ τους. Όπως φαίνεται και από το διπίνακα η αρκετά μειωμένη καταλληλότητα (3,3) οφείλεται στο γεγονός ότι ένα μεγάλο σκαθάρι πρέπει να καταναλώσει πολύ παραπάνω ενέργεια προκειμένου να αντιμετωπίσει ένα επίσης μεγάλου μεγέθους σκαθάρι

Αξίζει να σημειωθεί ότι η συμπεριφορά του κάθε σκαθαριού είναι γενετικά καθορισμένη, με άλλα λόγια το κάθε σκαθάρι ανάλογα με το μέγεθός του θα παίζει μια ζωή την ίδια στρατηγική.

Η ιδέα της επιλογής στρατηγικής απουσιάζει από την οπτική της βιολογίας όσον αφορά την αναλογία με την Ισορροπία Nash, η οποία βασίζεται στην βασική δυνατότητα επιλογής στρατηγικής.

Εφαρμογή των Ορισμών της Εξελικτικά Σταθερής Στρατηγικής στο παίγνιο Body Size

Το κάθε σκαθάρι του πληθυσμού στη διάρκεια της ζωής του επιλέγεται τυχαία και επαναληπτικά για αναμέτρηση με κάποιο άλλο σκαθάρι για το διαγωνισμό φαγητού. Γίνεται η υπόθεση ότι ο πληθυσμός είναι αρκετά μεγάλος ώστε δυο συγκεκριμένα σκαθάρια να έχουν συγκεκριμένη - και αμελητέα - πιθανότητα να αλληλεπιδράσουν μεταξύ τους πολλές φορές. Η συνολική καταλληλότητα ενός σκαθαριού είναι ίση με το μέσο όρο της εξόφλησης που προκύπτει από τις αλληλεπιδράσεις που έχει με τα άλλα σκαθάρια

Για να εντοπιστεί η Εξελικτικά Σταθερή Στρατηγική θα πρέπει να εξετασθεί κατά πόσο η στρατηγική Small είναι Εξελικτικά Σταθερή Στρατηγική και στη συνέχεια το ίδιο να εξετασθεί και η στρατηγική Large.

Εξετάζοντας αρχικά τη στρατηγική Small και ακολουθώντας τους ορισμούς, γίνεται η υπόθεση ότι για ένα μικρό θετικό αριθμό x, το $1-x$ **μέρος του πληθυσμού χρησιμοποιεί τη στρατηγική Small και το x μέρος του πληθυσμού χρησιμοποιεί τη στρατηγική Large.**

Αναμενόμενη εξόφληση για ένα μικρό σκαθάρι σε μια τυχαία αλληλεπίδραση σε αυτό τον πληθυσμό

Με πιθανότητα $1-x$ συναντά ένα άλλο μικρό σκαθάρι, λαμβάνοντας εξόφληση ίση με 5, ενώ με πιθανότητα x συναντά ένα μεγάλο σκαθάρι, λαμβάνοντας εξόφληση 1. Έτσι η αναμενόμενη εξόφληση ενός μικρού σκαθαριού είναι

$$5(1-x)+1x=5-4x$$

Αναμενόμενη εξόφληση για ένα μεγάλο σκαθάρι σε μια τυχαία αλληλεπίδραση σε αυτό τον πληθυσμό

Με πιθανότητα $1-x$, συναντά ένα μικρό σκαθάρι, λαμβάνοντας εξόφληση ίση με 8, ενώ με πιθανότητα x, συναντά ένα άλλο μεγάλο σκαθάρι, λαμβάνοντας εξόφληση ίση με 3. Έτσι η αναμενόμενη εξόφληση για ένα μεγάλο σκαθάρι είναι

$$8(1-x)+3x=8-5x$$

Για αρκετά μικρές τιμές του x (ακόμα και αρκετά μεγαλύτερες σε αυτή την περίπτωση) η αναμενόμενη καταλληλότητα των μεγάλων σκαθαριών σε αυτόν τον πληθυσμό υπερέχει της αναμενόμενης καταλληλότητας των μικρών σκαθαριών. ***Συνεπώς η στρατηγική Small δεν είναι εξελικτικά σταθερή***.

Εξετάζοντας με τον ίδιο τρόπο κατά πόσον η στρατηγική Large είναι εξελικτικά σταθερή, γίνεται η υπόθεση ότι για ένα πολύ μικρό θετικό αριθμό x, το $1 - x$ **μέρος του πληθυσμού χρησιμοποιεί την στρατηγική Large και το x μέρος του πληθυσμού χρησιμοποιεί τη στρατηγική Small.**

Ποια είναι η αναμενόμενη εξόφληση για ένα μεγάλο σκαθάρι σε μια τυχαία αλληλεπίδραση σε αυτό τον πληθυσμό; Με πιθανότητα $1 - x$, συναντά ένα άλλο μεγάλο σκαθάρι, λαμβάνοντας εξόφληση ίση με 3, ενώ με πιθανότητα x, συναντά ένα μικρό σκαθάρι, λαμβάνοντας εξόφληση ίση με 8. Συνεπώς η αναμενόμενη εξόφληση για ένα μεγάλο σκαθάρι είναι

$$3(1 - x) + 8x = 3 + 5x$$

Ποια είναι η αναμενόμενη εξόφληση για ένα μικρό σκαθάρι σε μια τυχαία αλληλεπίδραση σε αυτό τον πληθυσμό; Με πιθανότητα $1 - x$, συναντά ένα μεγάλο σκαθάρι, λαμβάνοντας εξόφληση ίση με 1, ενώ με πιθανότητα x, συναντά ένα άλλο μικρό σκαθάρι, λαμβάνοντας εξόφληση ίση με 5. Συνεπώς η αναμενόμενη εξόφληση για ένα μικρό σκαθάρι είναι

$$(1 - x) + 5x = 1 + 4x$$

Σε αυτή την περίπτωση η καταλληλότητα των μεγάλων σκαθαριών στο πληθυσμό υπερέχει της αναμενόμενης καταλληλότητας των μικρών σκαθαριών. ***Συνεπώς η στρατηγική Large είναι εξελικτική σταθερή***

Ερμηνεύοντας την Εξελικτικά Σταθερή Στρατηγική του παιγνίου Body Size

Διαισθητικά συνοψίζοντας την παραπάνω ανάλυση, μπορεί να ειπωθεί ότι εάν λίγα μεγάλα σκαθάρια εισαχθούν σε ένα πληθυσμό που αποτελείται από μικρά σκαθάρια, τότε τα μεγάλα σκαθάρια θα τα πάνε εξαιρετικά καλά στο συναγωνισμό για το φαγητό. Για το λόγο ότι σχεδόν σε κάθε συναγωνισμό που λαμβάνουν μέρος παίρνουν το περισσότερο μερίδιο του φαγητού, αφού σπανίως συναντιούνται μεταξύ τους. Σαν αποτέλεσμα, ο πληθυσμός από μικρά σκαθάρια δεν μπορεί να εκδιώξει τα μεγάλα, κατά συνέπεια η στρατηγική Small δεν είναι εξελικτικά σταθερή.

Από την άλλη πλευρά, σε ένα πληθυσμό από μεγάλα σκαθάρια, λίγα μικρά σκαθάρια θα τα πάνε πολύ άσχημα, χάνοντας σχεδόν σε κάθε διαγωνισμό για φαγητό. Σαν αποτέλεσμα, ο πληθυσμός από μεγάλα σκαθάρια αντιστέκεται στην εισβολή μικρών σκαθαριών, άρα η Large είναι εξελικτικά σταθερή.

Έτσι λοιπόν, αν είναι γνωστό ότι μια μετάλλαξη μεγάλου μεγέθους σώματος είναι πιθανή, θα ήταν αναμενόμενο να παρατηρηθούν πληθυσμοί από μεγάλα σκαθάρια στη φύση, παρά πληθυσμοί από μικρά. Κατά αυτόν τον τρόπο με την έννοια της εξελικτικής σταθεράς έχει προβλεφτεί η στρατηγική του πληθυσμού – όπως προβλεπόταν οι εξοφλήσεις στα παίγνια μεταξύ ορθολογικών παιχτών.

Αυτό που είναι εντυπωσιακό στην συγκεκριμένη πρόβλεψη των εξοφλήσεων, είναι το γεγονός ότι η καταλληλότητα του κάθε οργανισμού σε ένα πληθυσμό μικρών σκαθαριών είναι 5, η οποία είναι και υψηλότερη από την καταλληλότητα του κάθε οργανισμού σε ένα πληθυσμό από μεγάλα σκαθάρια. Στην πραγματικότητα, το παίγνιο μεταξύ μικρών και μεγάλων σκαθαριών έχει ακριβώς την ίδια δομή με το παίγνιο του Διλήμματος του Κρατουμένου, το σενάριο που είναι βασισμένο στο διαγωνισμό του φαγητού κάνει φανερό το γεγονός ότι τα σκαθάρια εμπλέκονται σε ένα arm race όπως το αντίστοιχο παίγνιο της κλασσικής θεωρίας παιγνίων

5.4.2 Γενική περιγραφή της Εξελικτικά σταθερής Στρατηγικής

Ο τρόπος που σχετίζονται τα εξελικτικα παίγνια και τα παίγνια που παίζονται από ορθολογικούς παίχτες είναι τόσο ενδεικτικό ώστε να υπάρχει η ανάγκη κατανόησης πως αυτή η σχέση λειτουργεί και γενικότερα. Η επικέντρωση γίνεται στα συμμετρικά παίγνια δύο ατόμων και δύο στρατηγικών. Ο πίνακας εξοφλήσεων ενός εντελώς γενικού συμμετρικού παιγνίου δύο ατόμων και δύο στρατηγικών έστω S και T είναι ο ακόλουθος

		Organism2 S	Organism2 T
Organism1	S	a, a	b, c
	T	c, b	d, d

Λαμβάνοντας υπόψιν την αρχική υπόθεση ότι για ένα πολύ μικρό θετικό αριθμό x ένα μέρος του πληθυσμού $1-x$ χρησιμοποιεί την S και το x μέρος του πληθυσμού χρησιμοποιεί την T τότε οι προυποθέσεις για να είναι η S Εξελικτικά Σταθερή με όρους που αφορούν τις ανωτέρω μεταβλητές a, b, c και d είναι οι ακόλουθες

- Η συνολική αναμενόμενη ωφέλεια ενός οργανισμού που παίζει την S σε μια τυχαία αναμέτρηση σε αυτό τον πληθυσμό είναι

$$a(1-x)+bx$$

- Η συνολική αναμενόμενη ωφέλεια ενός οργανισμού που παίζει την T σε μια τυχαία αναμέτρηση σε αυτό τον πληθυσμό είναι

$$c(1-x)+dx$$

  Συνεπώς η S είναι εξελικτικά σταθερή αν για όλες τις επαρκώς μικρές τιμές του $x > 0$ η ανισότητα ισχύει

$$a(1-x)+bx > c(1-x)+dx$$

Καθώς το x τείνει στο 0, το αριστερό μέρος της ανισότητας γίνεται a και το δεξί μέρος γίνεται c. Έτσι εάν $a > c$ τότε το αριστερό μέρος είναι μεγαλύτερο αφού το x είναι επαρκώς μικρό, ενώ εάν $a < c$ τότε το αριστερό μέρος είναι μικρότερο. Τέλος εάν $a = c$ τότε, το αριστερό μέρος είναι μεγαλύτερο ακριβώς όταν το $b > d$. Επομένως, ένας απλός τρόπος να εκφραστεί η προϋπόθεση για να είναι η S εξελικτικά σταθερή είναι ο εξής :

Σε ένα συμμετρικό παίγνιο δύο παιχτών και δύο στρατηγικών, η S είναι εξελικτικά σταθερή ακριβώς όταν είτε $(i) a > c$, ή $(ii) a = c$ και $b > d$.

Διαισθητικά οι υπολογισμοί μεταφράζονται στις ακόλουθες προυποθέσεις

- Πρώτον, για να είναι η S εξελικτικά σταθερή, η εξόφληση χρησιμοποιώντας την S εναντίον της S πρέπει να είναι τουλάχιστον το ίδιο υψηλή όσο η εξόφληση χρησιμοποιώντας την στρατηγική T εναντίον της S. Διαφορετικά, ένας εισβολέας ο οποίος χρησιμοποιεί την T θα είχε υψηλότερη καταλληλότητα από τους υπόλοιπους του πληθυσμού. Κ κατά συνέπεια το μέρος του πληθυσμού που είναι εισβολείς θα είχαν μια καλή πιθανότητα να αυξηθούν με την πάροδο του χρόνου

- Δεύτερον, εάν η S και T είναι το ίδιο καλές απαντήσεις στην S, τότε για να είναι η S εξελικτικά σταθερή, οι παίχτες της S, θα πρέπει να τα πηγαίνουν καλύτερα στην αλληλεπίδραση με την T από ότι οι παίχτες της T στην μεταξύ τους αλληλεπίδραση. Διαφορετικά, οι παίχτες της T θα τα πήγαιναν το ίδιο καλά εναντίον της S όσο και οι παίχτες της S, και τουλάχιστον το ίδιο καλά εναντίον της T, έτσι η συνολική καταλληλότητα θα ήταν τουλάχιστον το ίδιο καλή όσο η καταλληλότητα των παιχτών της S

5.4.3 Σχέση μεταξύ της Εξελικτικής και Ισορροπίας Nash

Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω γενικό τρόπο χαρακτηρισμού των Εξελικτικά Σταθερών Στρατηγικών, μπορεί πλέον να γίνει κατανοητό πως αυτές σχετίζονται με τη Ισορροπία Nash. Επιστρέφοντας στο Γενικό Συμμετρικό Παίγνιο μπορεί να προσδιοριστεί ο περιορισμός για την (S,S) ώστε να είναι Nash Ισορροπία. Η (S,S) είναι Nash ισορροπία όταν η S είναι η βέλτιστη απάντηση στην επιλογή της S από τον άλλο παίχτη : αυτό μεταφράζεται στον απλό περιορισμό

$$a \geq c$$

Εάν συγκριθεί με τον περιορισμό που ισχύει για την S για να είναι εξελικτικά σταθερή,

$$(i) a > c, \text{ ή } (ii) a = c \; \textit{και} \; b > d$$

Αυτομάτως προκύπτει το συμπέρασμα ότι

Εάν η στρατηγική S είναι εξελικτικά σταθερή τότε, η (S,S) είναι Nash ισορροπία.

Μπορεί επίσης να διαπιστωθεί ότι το αντίστροφο δεν ισχύει : είναι δυνατόν να υπάρξει ένα παίγνιο όπου η (S,S) είναι Nash ισορροπία, αλλά η S να μην είναι εξελικτικά σταθερή. Η διαφορά στους δύο παραπάνω περιορισμούς υποδεικνύει το πώς πρέπει να είναι η δομή του παιγνίου : θα πρέπει να ισχύει $a = c$ και $b < d$

Το παίγνιο Stag Hunt έχει τέτοια δομή.

		Π2	
		S	H
Π1	S	2,2	0,1
	H	1,0	1,1

Πίνακας αποδόσεων παιγνίου Stag Hant

Σύμφωνα με τους παραπάνω διατυπωμένους περιορισμούς σχετικά με τις μεταβλητές a, b, c, d οι στρατηγικές S,S και H,H είναι και οι δύο εξελικτικά σταθερές.

Ωστόσο εάν γίνει μια μετατροπή στο παίγνιο και μεταβληθούν οι εξοφλήσεις, τότε εάν οι παίχτες δεν συντονιστούν, και ο ένας κυνηγήσει το ελάφι ενώ ο άλλος κυνηγήσει το λαγό, τότε ο κυνηγός λαγού θα είναι πιο ωφελημένος λόγω της έλλειψης συναγωνισμού για το λαγό. Καταυτόν τον τρόπο ο πίνακας εξοφλήσεων είναι ο εξής

		Π2	
		S	H
Π1	S	2, 2	0, 2
	H	2, 0	1, 1

Πίνακας αποδόσεων παιγνίου Stag Hant2

Σε αυτή την περίπτωση, η επιλογή των στρατηγικών (H,H) συνεχίζει να είναι Nash ισορροπία: εάν κάθε παίχτης περιμένει ο άλλος να κυνηγήσει ελάφι, τότε το κυνήγι ελαφιού είναι η καλύτερη απάντηση. Αλλά η S,S δεν είναι εξελικτικά σταθερή στρατηγική σε αυτή την έκδοση του παιγνίου, για το λόγο ότι (σύμφωνα με τους παραπάνω περιορισμούς όσον αφορά τις τέσσερις μεταβλητές) ισχύει $a = c$ *και* $b < d$.

Υπάρχει επίσης συσχέτιση μεταξύ της εξελικτικά σταθερής στρατηγικήw και της έννοιας της αυστηρής Ισορροπίας Nash. Μια επιλογή στρατηγικών είναι αυστηρή Ισορροπία Nash εάν κάθε παίχτης χρησιμοποιεί τη μοναδικά καλύτερη απάντηση στην επιλογή του άλλου παίχτη. Ο περιορισμός για την (S,S) για να είναι αυστηρή Ισορροπία Nash είναι $a > c$. Είναι λοιπόν ορατό πως στην πραγματικότητα αυτές οι δύο έννοιες είναι η μια εκλέπτυνση της άλλης. Η έννοια της εξελικτικής σταθεράς μπορεί να ειδωθεί σαν εκλέπτυνση της έννοιας της ισορροπίας Nash : το σύνολο των εξελικτικά σταθερών στρατηγικών S είναι υποσύνολο του συνόλου των στρατηγικών S για τις οποίες η (S,S) είναι Nash Ισορροπία. Παρόμοια η έννοια της αυστηρής ισορροπίας Nash είναι μια εκλέπτυνση της εξελικτικής σταθεράς : εάν η (S,S) είναι αυστηρή ισορροπία, τότε η S είναι εξελικτική σταθερά.

Είναι παράξενο το γεγονός ότι, παρ΄όλες τις εξαιρετικά στενές ομοιότητες των συμπερασμάτων μεταξύ της εξελικτικής σταθεράς και της Ισορροπίας Nash, οι δύο έννοιες είναι χτισμένες βασισμένες πάνω σε διαφορετικά πλαίσια. Στην Ισορροπία Nash, θεωρείται ότι οι παίχτες επιλέγουν αμοιβαία τις καλύτερες απαντήσεις ο καθένας στη στρατηγική του άλλου. Αυτή η έννοια ισορροπίας έχει μεγάλες απαιτήσεις στην ικανότητα των παιχτών να επιλέγουν τη βέλτιστη στρατηγική και να συντονίζονται τις στρατηγικές που είναι βέλτιστες απαντήσεις η μια στην άλλη. Η εξελικτική σταθερά, από τη άλλη πλευρά υποθέτει ότι δεν υπάρχει νοημοσύνη ή συντονισμός από μέρος των παιχτών. Αντιθέτως οι στρατηγικές αντιμετωπίζονται ως προκαθορισμένες, ίσως γιατί η συμπεριφορά των παίχτων τους είναι κωδικοποιημένη στα γονίδια. Σύμφωνα με αυτή την έννοια, οι στρατηγικές οι οποίες είναι και πιο επιτυχημένες όσον αφορά την παραγωγή απογόνων είναι αυτές που επιλέγονται

5.4.4 Εξελικτικά Σταθερές Μικτές Στρατηγικές

Το επόμενο βήμα στην ανάπτυξη της Εξελικτικής Θεωρίας Παιγνίων είναι η διερώτηση πως μπορούν να αντιμετωπιστούν καταστάσεις στις οποίες δεν αναδύονται εξελικτικά σταθερές στρατηγικές.

Στην πραγματικότητα δεν είναι δύσκολο να συμβεί ακόμα και σε παίγνια δύο ατόμων όταν υπάρχει Nash ισορροπία καθαρής στρατηγικής

Ισως το πιο φυσικό παράδειγμα είναι το παίγνιο Hawk Dove

		Ζ2	
		S	H
Ζ1	S	3, 3	1, 5
	H	5, 1	0, 0

Πίνακας αποδόσεων παιγνίου Hawk-Dove

Στην κλασική θεωρία παιγνίων θεωρήθηκε πως οι δύο παίχτες σαν ορθολογικοί επέλεγαν το πώς θα συμπεριφερθούν. Εδώ γίνεται η υπόθεση ότι το παίγνιο έχει την ίδια δομή αλλά τα ζώα είναι γενετικά προγραμματισμένα να παίζουν μια συγκεκριμένη στρατηγική.

Ερευνώντας την ύπαρξη εξελικτικής σταθεράς διαπιστώνεται ότι, ούτε η D ούτε η H είναι η βέλτιστη απάντηση στον εαυτό της, έτσι κάνοντας χρήση των γενικών αρχών όπως αυτές έχουν αναφερθεί προκύπτει ότι καμία δεν είναι εξελικτικά σταθερή. Διαισθητικά ένα γεράκι θα τα πάει πολύ καλά σε ένα πληθυσμό από περιστέρια – αλλά σε ένα πληθυσμό από γεράκια ένα περιστέρι θα τα πάει καλύτερα μένοντας εκτός συναγωνισμού αφήνοντας τα γεράκια να μάχονται μεταξύ τους.

Σαν στρατηγικό παίγνιο δύο ατόμων όπου οι παίχτες πράγματι επιλέγουν στρατηγικές το παίγνιο έχει δύο Nash ισορροπίες καθαρής στρατηγικής : (D,H), (H,D). Το γεγονός όμως αυτό δεν βοηθά άμεσα στην αναγνώριση μιας εξελικτικά σταθερής στρατηγικής, αφού ο έως τώρα ορισμός της εξελικτικής σταθεράς έχει περιοριστεί σε πληθυσμούς στους οποίους σχεδόν όλα τα μέλη παίζουν την ίδια καθαρή στρατηγική. Για να διαπιστωθεί πως θα εξελιχθεί το παίγνιο Hawk – Dove κάτω από την επήρεια εξελικτικών πιέσεων, χρειάζεται να γενικευθεί η έννοια της εξελικτικής σταθεράς επιτρέποντας τη μίξη μεταξύ των στρατηγικών

Ορίζοντας Μικτές Στρατηγικές στην Εξελικτική Θεωρία Παιγνίων

Υπάρχουν δύο φυσικοί τρόποι για την ανάπτυξη της ιδέας της μίξης στρατηγικών σε ένα εξελικτικό πλαίσιο. Πρώτον θα μπορούσε το κάθε ένα μεμονωμένο άτομο προκαθορισμένα να παίζει μια καθαρή στρατηγική, αλλά ένα μέρος του πληθυσμού να παίζει τη μια στρατηγική ενώ το υπόλοιπο μέρος του πληθυσμού να παίζει την άλλη. Εάν η καταλληλότητα των ατόμων του κάθε μέρους του πληθυσμού είναι η ίδια, και εάν οι εισβολείς τελικά εκτοπιστούν (πεθάνουν), τότε θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι επιδεικνύεται ένα είδος εξελικτικής σταθεράς. Δεύτερον θα μπορούσε το κάθε ένα μεμονωμένο άτομο προκαθορισμένα να παίζει μια συγκεκριμένη μικτή στρατηγική – δηλαδή, να είναι γενετικά προσδιορισμένο να επιλέγει τυχαία μεταξύ συγκεκριμένων επιλογών με συγκεκριμένες πιθανότητες. Εάν οι εισβολείς που χρησιμοποιούν οποιαδήποτε άλλη μικτή στρατηγική τελικά εκτοπισθούν τότε θα μπορούσε και αυτό να θεωρηθεί ένα είδος εξελικτικής σταθεράς.

Αυτές οι δύο ιδέες ανάπτυξης είναι ισοδύναμες. Αρχικά η εστίαση γίνεται στη δεύτερη ιδέα στην οποία, τα άτομα χρησιμοποιούν μικτές στρατηγικές. Κατά βάση μπορεί να διαπιστωθεί ότι σε καταστάσεις όπως το παίγνιο Hawk – Dove, τα άτομα ή ο πληθυσμός σαν ολότητα πρέπει να επιδείξουν μια μίξη των δύο συμπεριφορών ούτως ώστε να υπάρχει κάποια πιθανότητα σταθερότητας εναντίον της εισβολής άλλων τύπων συμπεριφοράς.

Ο ορισμός της Εξελικτικά Σταθερής Μικτής Στρατηγικής, είναι στην ουσία εντελώς παράλληλος με τον ορισμό της εξελικτικής σταθεράς όπως μέχρι τώρα έχει ειδωθεί – απλά στην περίπτωση αυτή ευρύνεται σε μεγάλο βαθμό το σύνολο των πιθανών στρατηγικών, έτσι ώστε κάθε στρατηγική να ανταποκρίνεται σε μια συγκεκριμένη και τυχαία επιλογή πάνω στις καθαρές στρατηγικές.

Συγκεκριμένα στο γενικό συμμετρικό παίγνιο Α (ενότητα 5.4.2) μια μικτή στρατηγική ανταποκρίνεται σε μια πιθανότητα p μεταξύ 0 και 1 υποδηλώνοντας ότι ένας οργανισμός παίζει τη στρατηγική S με πιθανότητα p και την στρατηγική T με πιθανότητα $1 - p$. Σύμφωνα με το πώς ορίστηκαν οι μικτές στρατηγικές στη Κλασσική Θεωρία Παιγνίων, αυτό περιλαμβάνει την πιθανότητα να παιχθεί η καθαρή στρατηγική S ή T θέτοντας απλά $p = 1$ ή 0.

Όταν ο οργανισμός1 χρησιμοποιεί τη μικτή στρατηγική p και ο οργανισμός 2 χρησιμοποιεί τη μικτή στρατηγική q, η προσδοκώμενη ωφέλεια του οργανισμού 1 μπορεί να υπολογιστεί ως ακολούθως : Υπάρχει πιθανότητα pq για την στρατηγική (S,S) που του αποδίδει εξόφληση α .

Υπάρχει η πιθανότητα $p(1-q)$ για την (S,T) που του αποδίδει b.

Υπάρχει η πιθανότητα $(1-p)q$ για την (T,S) , με εξόφληση c, και

υπάρχει η πιθανότητα $(1-p)(1-q)$ για τη στρατηγική (T,T) αποδίδοντας του εξόφληση d.

Έτσι η συνολική αναμενόμενη ωφέλεια για τον οργανισμό1 είναι

$$V(p,q) = pqa + p(1-q)b + (1-p)qc + (1-q)(1-q)d$$

Όπως πριν προκύπτει ότι, η καταλληλότητα ενός οργανισμού είναι η αναμενόμενη εξόφληση της αλληλεπίδρασης με ένα τυχαίο μέλος του πληθυσμού.

Μπορεί πλέον να δοθεί ένας ακριβής ορισμός της Εξελικτικά Σταθερής Μικτής Στρατηγικής.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>

Σε ένα γενικό συμμετρικό παίγνιο, η p είναι εξελικτικά σταθερή μικτή στρατηγική εάν υπάρχει ένας (μικρός) θετικός αριθμός ψ έτσι ώστε οποιαδήποτε άλλη μικτή στρατηγική q εισβάλει στον πληθυσμό που παίζει την στην p σε οποιοδήποτε επίπεδο $x < \psi$, η καταλληλότητα ενός οργανισμού που παίζει p είναι αυστηρά μεγαλύτερη από την καταλληλότητα του οργανισμού που παίζει την q.

Ο παραπάνω ορισμός είναι ακριβώς όπως ο προηγούμενος ορισμός της εξελικτικά σταθερής (καθαρής) στρατηγικής, εκτός από το ότι τώρα η στρατηγική επιτρέπεται να είναι μικτή, όπως επίσης επιτρέπεται στους εισβολείς να χρησιμοποιούν μικτή στρατηγική.

Μια εξελικτικά σταθερή μικτή στρατηγική με πιθανότητα $p = 1$ είναι εξελικτικά σταθερή και σύμφωνα με τον αρχικό ορισμό για τις καθαρές στρατηγικές.

Ωστόσο αξίζει να σημειωθεί ότι ακόμα και αν η S ήταν εξελικτικά σταθερή στρατηγική σύμφωνα με τον προηγούμενο ορισμό, δεν είναι απαραίτητα εξελικτικά σταθερή σύμφωνα με τον καινούριο ορισμό για $p = 1$. Το πρόβλημα έγκειται στο ότι είναι πιθανό να κατασκευαστεί ένα παίγνιο στο οποίο καμμία στρατηγική να μην μπορεί να εισβάλει με επιτυχία σε ένα πληθυσμό που παίζει τη στρατηγική S, αλλά να μπορεί να το κάνει μια μικτή στρατηγική.

Συμπερασματικά είναι πολύ σημαντικό σε κάθε συζήτηση για την εξελικτική σταθερότητα να είναι σαφές τι είδους συμπεριφορά μπορεί να εφαρμόσει ένας εισβολέας

Η συνθήκη για την p προκειμένου να είναι εξελικτικά σταθερή μικτή στρατηγική μπορεί να γραφτεί άμεσα από τον ορισμό ως ακολούθως:

Για κάποιο ψ >0 και για οποιοδήποτε x<ψ,η ακόλουθη ανισότητα ισχύει για όλες τις μικτές στρατηγικές με πιθανότητες $q <> p$:

$$(1-x)V(p,p) + xV(p,q) > (1-x)V(q,p) + xV(q,q)$$

(1) Η παραπάνω ανισότητα δηλώνει με σαφήνεια τη σχέση μεταξύ της Ισορροπίας Nash Μικτής Στρατηγικής και των Εξελικτικά Σταθερών Μικτών Στρατηγικών, καθώς αυτή σχέση είναι παράλληλη με αυτήν στις καθαρές στρατηγικές

Συγκεκριμένα αν η p είναι Εξελικτικά Σταθερή Μικτή Στρατηγική τότε πρέπει $V(p,p) >= V(q,p)$, συνεπώς η p είναι η βέλτιστη απάντηση στην p. Σαν αποτέλεσμα το ζεύγος στρατηγικών (p,p) είναι μια Ισορροπία Nash Μικτής Στρατηγικής. Ωστόσο λόγω της καθαρής ανισότητας 1 είναι πολύ πιθανό το ζεύγος (p,p) να είναι μια Ισορροπία Nash μικτής στρατηγικής χωρίς η p να είναι εξελικτικά σταθερή.

Εξελικτικά Σταθερή Μικτή Στρατηγική στο παίγνιο Hawk-Dove

Για την εφαρμογή των παραπάνω ιδεών στο παίγνιο Γεράκι Περιστέρι αρχικά πρέπει να σημειωθεί ότι εφόσον οποιαδήποτε εξελικτικά σταθερή μικτή στρατηγική θα πρέπει να αντιστοιχεί σε μια Ισορροπία Nash Μικτής Στρατηγικής του παιγνίου, αυτό είναι και το κίνητρο για την διερεύνηση πιθανών Εξελικτικών Σταθερών Στρατηγικών: αρχικά ελέγχεται η ύπαρξη Ισορροπία Nash Μικτής Στρατηγικής και στη συνέχεια ελέγχεται αν είναι εξελικτικά σταθερή.

Για να είναι η (p, p) Ισορροπία Nash μικτής στρατηγικής θα πρέπει οι δυο παίχτες να είναι στρατηγικά αδιάφοροι στο να επιλέξουν μια από τις δύο καθαρές στρατηγικές. Όταν ο άλλος παίχτης χρησιμοποιεί την στρατηγική p,η αναμενόμενη ωφέλεια παίζοντας περιστέρι είναι $3p + (1 - p) = 1 + 2p$ ενώ, η αναμενόμενη ωφέλεια παίζοντας γεράκι είναι $5p$. Θέτοντας αυτές τις ωφέλειες ίσες τότε η πιθανότητα p γίνεται ίση με $\frac{1}{3}$. Έτσι η στρατηγική $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ είναι Ισορροπία Nash μικτής στρατηγικής. Σε αυτή την περίπτωση, και οι δύο στρατηγικές, όπως και οποιαδήποτε (μεταξύ τους συνδυασμός) μικτή στρατηγική παράγει την αναμενόμενη ωφέλεια $\frac{5}{3}$ όταν παίζεται εναντίον της στρατηγικής $p = \frac{1}{3}$.

Για να εξακριβωθεί κατά πόσον η $p = \frac{1}{3}$ είναι εξελικτικά σταθερή θα πρέπει να ελεγχθεί η ανισότητα 1 όταν κάποια άλλη μικτή στρατηγική q εισβάλει σε ένα μικρό επίπεδο x. Μια παρατήρηση σύμφωνα με την οποία η αξιολόγηση της ανισότητας γίνεται πιο εύκολη είναι ότι : αφού η (p, p) είναι Ισορροπία Nash μικτής στρατηγικής η οποία χρησιμοποιεί και τις δύο καθαρές στρατηγικές, τότε όλες οι μικτές στρατηγικές q έχουν την ίδια αναμενόμενη ωφέλεια παίζοντας εναντίον της p.

Σαν αποτέλεσμα $V(p, p) = V(q, p)$ για όλες τις q.

Αφαιρώντας αυτούς τους όρους από την ανισότητα 1 προκύπτει η προς αξιολόγηση ανισότητα $V(p, q) > V(q, q)$

Η ουσία είναι ότι αφού η (p, p) είναι μικτή στρατηγική, η στρατηγική p δεν μπορεί να είναι αυστηρά καλύτερη απάντηση στον εαυτό της για το λόγο ότι όλες οι άλλες μικτές στρατηγικές είναι το ίδιο καλές εναντίον της. Έτσι για να είναι η p εξελικτικά σταθερή θα πρέπει να είναι αυστηρά βέλτιστη απάντηση σε κάθε άλλη μικτή στρατηγική q από ότι η q στον εαυτό της. Αυτός είναι ο λόγος που θα προκαλέσει την αύξηση της καταλληλότητας της όταν εισβάλει η q. Είναι γεγονός ότι $V(p, q) > V(q, q)$ για όλες τις μικτές στρατηγικές $q <> p$.

Για $p = \frac{1}{3}$ ισχύει

$$V(p, q) = 1/3 * q * 3 + 1/3(1 - q) * 1 + 2/3 * q * 5 = 4q + 1/3$$

Ενώ

$$V(q, q) = q^2 * 3 + q(1 - q) * 1 + (1 - q) * q * 5 = 6q - 3 * q^2$$

Όπου προκύπτει

$$V(p, q) - V(q, q) = 3 * q^2 - 2 * q + 1/3 = \frac{1}{3} * (9 * q^2 - 6 * q + 1) = 1/3(3 * q - 1)^2$$

Το τέλειο τετράγωνο (ταυτότητα) υποδηλώνει ότι $V(p, q) - V(q, q)$ είναι θετικό όταν $q <> 1/3$ και αυτό σημαίνει ότι $V(p, q) - V(q, q) > 0$ δηλ. $V(p, q) > V(q, q)$ όταν $p \neq 0$ συνεπώς η p είναι εξελικτικά σταθερή μικτή στρατηγική.

Ερμηνεία της εξελικτικά σταθερής μικτής στρατηγικής

Τα παραπάνω αποτελέσματα μπορούν να ερμηνευτούν με δύο τρόπους

Πρώτον όλα τα μέλη του πληθυσμού μπορούν κάλλιστα να κάνουν μίξη των δυο πιθανών στρατηγικών με δεδομένη πιθανότητα. Σε αυτή την περίπτωση όλα τα μέλη του πληθυσμού είναι το ίδιο γενετικά προκαθορισμένα, αλλά όταν δύο μέλη παίζουν, οποιοσδήποτε συνδυασμός D και H θα μπορούσε δυνητικά να παιχτεί. Μια δεύτερη ερμηνεία είναι ότι η μίξη των στρατηγικών γίνεται στο επίπεδο του πληθυσμού : θα μπορούσε να σημαίνει ότι το ⅓ των ζώων είναι γενετικά προκαθορισμένα να παίζουν πάντα D, και τα ⅔ να είναι γενετικά προκαθορισμένα να παίζουν πάντα H. Σε αυτή τη περίπτωση ουσιαστικά κανένα μεμονωμένο μέλος του πληθυσμού δεν κάνει μίξη στρατηγικών, αλλά όσο δεν είναι δυνατό να εξακριβωθεί εκ των προτέρων ποιο ζώο παίζει D και ποιο παίζει H, η αλληλεπίδραση δυο τυχαία επιλεγμένων ζώων αποφέρει την ίδια συχνότητα στις εξοφλήσεις, όπως στην περίπτωση που παίζουν μικτές στρατηγικές.

Αξίζει επίσης να σημειωθεί ότι σε αυτή την περίπτωση, η καταλληλότητα και των δυο τύπων ζώων είναι η ίδια, αφού, και η D και η H είναι βέλτιστες απαντήσεις στην μικτή στρατηγική $p = 1/3$.

Συνεπώς και η δύο ερμηνείες της εξελικτικά μικτής στρατηγικής οδηγούν στο ίδιο συμπέρασμα, και στην ίδια παρατηρούμενη συμπεριφορά του πληθυσμού

5.4.5 Προσδιορίζοντας τη δυναμική του πληθυσμού (Δεύτερη προσέγγιση)

Χαλαρά μιλώντας, μια κατάσταση ΕΣΣ είναι ανθεκτική στην εισβολή ενός μικρού αριθμού μεταλλάξεων (διαφορετικών στρατηγικών). Αυτό σημαίνει ότι αν μια μεταλλαγμένη στρατηγική εισαχθεί σε έναν πληθυσμό σε μια ΕΣΣ κατάσταση, το αποτέλεσμα της εξελικτικής διαδικασίας θα ήταν η εξάλειψη του εισβολέα δηλ. της μεταλλαγμένης στρατηγικής. Εφ 'όσον η εισβολή των μεταλλαγμένων στρατηγικών είναι αρκετά μικρή (αλλά όχι μηδέν), και η καταλληλότητά τους δεν είναι τόση όσο αυτή του αρχικού πληθυσμού, οι εισβολείς θα εκτοπισθούν. Για να προσδιορισθεί η δυναμική του πληθυσμού πρέπει να εξομοιωθούν οι παράγοντες παιχνιδιού και των στρατηγικών τους με τους πληθυσμούς των παικτών, να υπολογιστεί η καταλληλότητα των διαφορετικών στρατηγικών σε σχέση με τον πληθυσμό καθώς επίσης να οριστεί και μια διαδικασία που θα διέπει την εξέλιξη του πληθυσμού. Αυτά τα απλά συστατικά μπορούν να συνδυαστούν για να αποφέρει το μοντέλο εξαιρετικά πολύπλοκες λύσεις. Στην ιδανική περίπτωση, υπό την δυναμική διαδικασία των στρατηγικών των πληθυσμών των παικτών η έκβαση θα συγκλίνει σε κάποια σταθερή τιμή.

5.4.6 Δυναμική αντιγραφέα μέσω της φυσικής επιλογής

Στην Εξελικτική Θεωρία Παιγνίων, η προσοχή δεν δίνεται στους παίχτες τη στιγμή που επιλέγουν τις στρατηγικές καθώς παίζεται το παίγνιο στο χρόνο. Αυτό συμβαίνει για το λόγο ότι τα συμφέροντα είναι διαφορετικά. Το ενδιαφέρον δεν δίνεται στο να βρεθεί η ισορροπία του κάθε παιγνίου αλλά στο να ανακαλυφθεί ποια ισορροπία είναι σταθερή και πως αλλάζει στο χρόνο

Η φυσική διαδικασία επιλογής η οποία καθορίζει πώς εξελίσσεται ο πληθυσμός παίζοντας συγκεκριμένες στρατηγικές , είναι γνωστή ως δυναμική αντιγραφέα. Ερμηνεύοντας τη σύμφωνα με τη θεωρία της εξέλιξης του Δαρβίνου, η δυναμική αντιγραφέα διευκρινίζει ότι οι πληθυσμοί των ισχυρότερων ατόμων έχουν υψηλότερους ρυθμούς ανάπτυξης, ενώ τα λιγότερο κατάλληλα άτομα θα μειωθούν το γρηγορότερο . Η δυναμική αντιγραφέα είναι ένα ακριβές μοντέλο της διαδικασίας επιλογής, και προσδιορίζει πως εξελίσσονται με την πάροδο του χρόνου στον πληθυσμό τα μερίδια των διαφορετικών καθαρών στρατηγικών σε ένα παίγνιο . Η επιτυχία μιας στρατηγικής ορίζεται με βάση τον αριθμό των αντιγράφων της τα οποία θα παίξουν στις επόμενες γενεές, με δεδομένο ένα πληθυσμό στον οποίο οι άλλες στρατηγικές με τις οποίες αλληλεπιδρά είναι κατανεμημένες με συγκεκριμένες πιθανότητες. Δηλαδή μια στρατηγική είναι "καλύτερη" από μία άλλη αν είναι πολύ πιθανό να αφήσει περισσότερα αντίγραφα στην επόμενη γενεά, όταν θα παιχτεί πάλι το παιχνίδι. Με άλα λόγια είναι ενα ακριβές μοντέλο της διαδικασίας επιλογής που καθορίζει πως μοιράζεται ο πληθυσμός συσχετιζόμενος με διαφορετικές καθαρές στρατηγικές σε ένα παίγνιο όταν εμπλέκεται ο χρόνος. Συνεπώς ο ρυθμός ανάπτυξης του μεριδίου του πληθυσμού που χρησιμοποιεί οποιαδήποτε καθαρή στρατηγική i ισούται με τη διαφορά μεταξύ της εξόφλησης της στρατηγικής S και του μέσου όρου της εξόφλησης του πληθυσμού. Αξίζει να σημειωθεί ότι στα παίγνια συντονισμού ο μέσος όρος εξόφλησης του πληθυσμού μπορεί να αυξάνεται , αλλά όχι απαραίτητα σε ένα ολικό μέγιστο.

Η δυναμική αντιγραφεα προκύπτει από δύο βασικά μοντέλα μάθησης, την ενισχυμένη μάθηση και τη μάθηση μέσω μίμησης. Το μοντέλο ενισχυμένης μάθησης βασίζεται στην αρχή ότι οι επιλογές που οδήγησαν σε καλές εξοφλήσεις στο παρελθόν είναι πολύ πιθανό να επαναληφθούν και στο μέλλον. Επίσης αναδύεται μέσω ης μίμησης η οποία βασίζεται στην ορθολογική απόφαση μέσω διαδικασιών όπως τον κανόνα αναλογικής μίμησης, βάσει του οποίου κάθε παίχτης παίρνει σαν δείγμα τη στρατηγική καθώς και την εξόφληση ενός τυχαίου ατόμου, και αλλάζει την στρατηγική του σε αυτήν την στρατηγική όταν έχει υψηλότερη εξόφληση σε ένα ανάλογο ρυθμό με αυτόν του παιγνίου.

Η ΕΣΣ παρέχει έναν ορισμό της σταθερότητας σε ένα βιολογικό σύστημα, όπου δεν επαφίεται σε ένα ρητό δυναμικό μοντέλο της εξέλιξης της συμπεριφοράς. Όταν μια τέτοια λύση αναδεικνύει τη εξελικτική σταθερότητα η λεπτομερή ανάλυση του δυναμικού μοντέλου που βρίσκεται από κάτω μπορεί να αγνοηθεί. Αντιθέτως είναι οι ευριστικοί στατικοί περιορισμοί της εξελικτικής σταθερότητας που γίνονται κεντρικοί για να κατανοηθεί η εξελικτική συμπεριφορά όταν προστίθεται περιπλοκές στο εξελικτικό δυναμικό.

Επίσης αξίζει να σημειωθεί ότι οι διαφορικές εξισώσεις της δυναμικής αντιγραφέα γίνονται εξαιρετικά πολύπλοκες σε παίγνια μεγάλου βαθμού όπου η επίλυσή τους είναι απρόσιτη

5.5 Για ποιο λόγο ΕΘΠ

[San09]
Αν και η εξελικτική θεωρία παιγνίων έχει προσφέρει πολλές γνώσεις σε συγκεκριμένα εξελικτικά ερωτήματα, ένας αυξανόμενος αριθμός κοινωνικών επιστημόνων έχουν ξεκινήσει να ενδιαφέρονται για την Εξελικτική Θεωρία Παιγνίων, με την ελπίδα ότι θα παρέχει εργαλεία για την αντιμετώπιση ορισμένων ελλείψεων στην Παραδοσιακή Θεωρία των Παιγνίων, οι οποίοι αναλύονται στη συνέχεια.

5.5.1 Το πρόβλημα της επιλογής ισορροπίας

Η έννοια της Ισορροπίας Nash -από τότε που καθιερώθηκε από τον John Nash- υπήρξε έννοια που χρησιμοποιείται περισσότερο για την εύρεση λύσης στη Θεωρία Παιγνίων. Μια επιλογή των στρατηγικών από μια ομάδα πρακτόρων λέγεται ότι βρίσκεται σε μια ισορροπία Nash, εάν η στρατηγική κάθε πράκτορα αποτελεί καλύτερη απάντηση στις στρατηγικές που επιλέγονται από τους άλλους παίκτες. Λέγοντας καλύτερη απάντηση, εννοείται ότι κανένα άτομο δεν μπορεί να βελτιώσει τις απολαβές του αλλάζοντας στρατηγική, εκτός αν τουλάχιστον ένα άλλο άτομο αλλάζει επίσης στρατηγική. Αυτό δεν πρέπει να σημαίνει ότι σε μια ισορροπία Nash οι απολαβές για κάθε άτομο είναι βέλτιστες: Πράγματι, ένα από τα ανησυχητικά γεγονότα του Διλήμματος του Κρατουμένου είναι ότι η μόνη Nash Ισορροπία του παιγνίου - όταν και οι δύο πράκτορες ομολογούν - είναι μη βέλτιστη

Ωστόσο, μια δυσκολία προκύπτει με τη χρήση της Ισορροπίας Nash ως εννοιολογική λύση για τα παίγνια : εάν περιοριστούν οι παίκτες στο να χρησιμοποιούν καθαρές στρατηγικές, δεν έχει κάθε παίγνιο Ισορροπία Nash. Το παιχνίδι "Matching Pennies" απεικονίζει αυτό το πρόβλημα.

Ενώ είναι αλήθεια ότι κάθε μη συνεργατικό παίγνιο στο οποίο οι παίκτες μπορούν να χρησιμοποιήσουν μικτές στρατηγικές έχει μια Ισορροπία Nash, μερικοί έχουν αμφισβητήσει τη σημασία αυτής της Ισορροπίας όταν αφορά πραγματικούς πράκτορες. Αν κρίνεται σκόπιμη η απαίτηση οι ορθολογικοί πράκτορες να απαιτείται να υιοθετήσουν μόνο καθαρές στρατηγικές, τότε απαιτείται και η παραδοχή ότι ορισμένα παιχνίδια στερούνται ισορροπίας.

Ένα πιο σημαντικό πρόβλημα με την επίκληση της Ισορροπίας Nash ως έννοια κατάλληλης λύσης οφείλεται στο γεγονός ότι υπάρχουν παίγνια τα οποία έχουν πολλαπλές ισορροπίες Nash. Το φαινόμενο της απροσδιοριστίας και οιπροσπάθειες αντιμετώπισής του έχουν παράγει μια σειρά από πιθανές εκλεπτύνσεις στην έννοια της ισορροπίας Nash. Δυστυχώς, έχουν αναπτυχθεί τόσες πολλές εκλεπτύνσεις, που κάθε μια Ισορροπία Nash θα μπορούσε να αιτιολογηθεί σύμφωνα με κάποια από τις εκλεπτύνσεις. Κατά συνέπεια το πρόβλημα έχει μετατοπιστεί από την επιλογή ανάμεσα σε πολλαπλές ισορροπίες Nash στην επιλογή μεταξύ των διαφορετικών εκλεπτύνσεων.

Η Εξελικτική Θεωρία παιγνίων ευελπιστεί στην αντιμετώπιση αυτού του ζητήματος

5.5.2 Το πρόβλημα των υπερορθολογικων πρακτόρων

Η παραδοσιακή θεωρία παιγνίων επιβάλλει μια πολύ υψηλή απαίτηση ορθολογισμού στον τρόπο με τον οποίο οι παίχτες σκέφτονται και δρουν . Η απαίτηση αυτή προέρχεται από την ανάπτυξη της θεωρίας της χρησιμότητας που παρέχει η θεωρία των παιγνίων. Για παράδειγμα, προκειμένου να είναι σε θέση να αναθέτει μια θεμελιώδη συνάρτηση χρησιμότητας σε μεμονωμένους φορείς, συνήθως υποθέτει ότι κάθε παράγοντας έχει ένα καλά καθορισμένο, συνεπές σύνολο των προτιμήσεών του κατά τη σειρά των "τυχαιοποιήσεων" πάνω στα αποτελέσματα που μπορεί να προκύψουν από την ατομική επιλογή . Δεδομένου ότι ο αριθμός των διαφορετικών τυχαιοποιήσεων πάνω στα αποτελέσματα είναι μη μετρήσιμα άπειρο, αυτό απαιτεί κάθε πράκτορας να έχει ένα καλά καθορισμένο, συνεκτικό σύνολο μη μετρήσιμα απείρως πολλών προτιμήσεων

Πλήθος αποτελεσμάτων από πειράματα στην οικονομία έχουν δείξει ότι αυτές οι ισχυρές παραδοχές ορθολογισμού δεν περιγράφουν τη συμπεριφορά των ανθρώπων. Οι άνθρωποι είναι σπάνια (αν όχι ποτέ) υπερορθολογικοί πράκτορες όπως θεωρούνται και περιγράφονται από την παραδοσιακή θεωρία παιγνίων. Για παράδειγμα, δεν είναι ασυνήθιστο για τους ανθρώπους, σε πειραματικές συνθήκες, να αναφέρουν ότι προτιμούν το Α από το Β, το Β από το Γ και το Γ από το Α. Αυτές οι «αποτυχίες της μεταβατικότητας της προτίμησης" δεν θα συνέβαιναν αν οι άνθρωποι είχαν ένα καλά καθορισμένο σύνολο των προτιμήσεων. Η Εξελικτική Θεωρία Παιγνίων εξηγεί με επιτυχία την επικράτηση ορισμένων συμπεριφορών των εντόμων και των ζώων, όπου, οι ισχυρές παραδοχές ορθολογισμού σαφώς αποτυγχάνουν. Το γεγονός αυτό δείχνει ότι η λογική δεν είναι τόσο κεντρική στην θεωρητική ανάλυση των παιγνίων όπως πιστευόταν παλαιότερα. Η ελπίδα, λοιπόν, είναι ότι η εξελικτική θεωρία παιγνίων μπορεί να ανταποκριθεί με μεγαλύτερη επιτυχία στην περιγραφή και την πρόβλεψη των επιλογών όσον αφορά κυρίως την ανθρώπινη συμπεριφορά, δεδομένου ότι είναι καλύτερα εξοπλισμένη για να χειριστεί τις κατάλληλα ασθενέστερες παραδοχές ορθολογικότητας.

5.5.3 Η έλλειψη μιας δυναμικής θεωρίας σύμφωνα με την παραδοσιακή θεωρία παιγνίων

Στο τέλος του πρώτου κεφαλαίου της Θεωρίας των Παιγνίων και οικονομικής συμπεριφοράς, των von Neumann και Morgenstern γράφουν:

«Επαναλαμβάνουμε πλέον με έμφαση ότι η θεωρία μας είναι πλήρως στατική. Μια δυναμική θεωρία θα ήταν αναμφισβήτητα πιο ολοκληρωμένη και συνεπώς προτιμότερη. Αλλά υπάρχουν άφθονα στοιχεία από άλλους κλάδους της επιστήμης που είναι μάταιο να προσπαθήσουμε να οικοδομήσουμε ένα, εφόσον η στατική πλευρά δεν είναι πλήρως κατανοητή.»

(Von Neumann και Morgenstern, 1953, σ. 44)

Η θεωρία της εξέλιξης είναι μια δυναμική θεωρία, και η δεύτερη προσέγγιση της Εξελικτικής Θεωρίας Παιγνίων σκιαγράφησε πάνω σε ρητά μοντέλα την παρουσία της δυναμικής στις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των ατόμων σε ένα πληθυσμό. Δεδομένου ότι η παραδοσιακή θεωρία παιγνίων δεν περιέχει σαφή αντιμετώπιση της δυναμικής της ορθολογικής διαβούλευσης, την εξελικτική θεωρία παιγνίων μπορεί να δει κανείς, εν μέρει, ως οτι συμπληρώνει το σημαντικό κενό της παραδοσιακής θεωρίας παιγνίων.

Κάποιος μπορεί να προσπαθήσει να συλλάβει μερικά στοιχεία από τη δυναμική της διαδικασίας λήψης αποφάσεων στην παραδοσιακή θεωρίας παιγνίων, με την μοντελοποίηση του παιχνιδιού στην εκτεταμένη μορφή , αντί για κανονική του μορφή. Ωστόσο, για τα περισσότερα παιχνίδια εύλογης πολυπλοκότητας (και ως εκ τούτου ενδιαφέρον), η εκτεταμένη μορφή του παιχνιδιού γρήγορα γίνεται ανεξέλεγκτη .

Επιπλέον, ακόμη και στην εκτεταμένη μορφή ενός παιχνιδιού, η παραδοσιακή θεωρία παιγνίων αντιπροσωπεύει τη στρατηγική ενός ατόμου ως προδιαγραφή του ποια ατομική επιλογή θα έκανε σε κάθε σύνολο πληροφοριών του παιχνιδιού.

Κεφάλαιο 6

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ ΠΕΡΙΟΔΕΥΟΝΤΟΣ ΠΩΛΗΤΗ ΚΑΙ Η ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΟΥ ΜΕΣΩ ΤΗΣ ΕΞΕΛΙΚΤΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΠΑΙΓΝΙΩΝ

6.1 Προβλήματα Βελτιστοποίησης (optimization problems), και τρόποι αντιμετώπισης

[Λυκ12], [ΛΜΣ07], [PS]

Σε τέτοιου είδους προβλήματα είναι δυνατόν να υπάρχουν πολλές διαφορετικές λύσεις. Η κάθε λύση έχει μια συγκεκριμένη τιμή και το ζητούμενο είναι να βρεθεί η λύση με τη βέλτιστη (την ελάχιστη ή τη μέγιστη) τιμή. Μια λύση που εξασφαλίζει τη βέλτιστη τιμή χαρακτηρίζεται **ως** μια βέλτιστη λύση, σε αντιδιαστολή με **τη** βέλτιστη λύση, δεδομένου ότι μπορεί να υπάρχουν διάφορες λύσεις που επιτυγχάνουν τη βέλτιστη τιμή .

Τα προβλήματα βελτιστοποίησης διαχωρίζονται με φυσικό τρόπο σε δύο κατηγορίες :

- αυτά με συνεχής μεταβλητές και
- αυτά με διακριτές μεταβλητές, τα οποία και καλούνται συνδυαστικά

Στα προβλήματα με συνεχής μεταβλητές, αναζητείται η εύρεση ενός συνόλου πραγματικών αριθμών ή ακόμα και μιας τιμής. Στα προβλήματα συνδυαστικής βελτιστοποίησης, (combinatorial optimization problems) αναζητείται η εύρεση ενός αντικειμένου από ένα πεπερασμένο ή πιθανώς μετρήσιμα μη πεπερασμένο σύνολο ενός ακέραιου ή ενός συνόλου συνδυασμών, ή ενός γράφου.

Οι κυριότερες παραδοσιακές μέθοδοι αναζήτησης και βελτιστοποίησης είναι:

- Μέθοδοι βασισμένες στο λογισμό (calculus-based methods)
- Απαριθμητικές ή τυχαίες μέθοδοι (random)
- Μέθοδοι επαναληπτικής αναζήτησης (hill climbing)

- Προσομοιωμένη Ανόπτηση (Siumulated Annealing)
- Δυναμικός προγραμματισμός (Dynamic programming)
- Ευρηστικές μέθοδοι (heuristic methods)

Ο δυναμικός προγραμματισμός κατά κανόνα εφαρμόζεται σε προβλήματα βελτιστοποίησης, στα οποία θα πρέπει να γίνουν ορισμένες επιλογές προκειμένου να επιτευχθεί μια βέλτιστη λύση. Είναι εφαρμόσιμος όταν τα διάφορα υποπροβλήματα δεν είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, δηλαδή, όταν έχουν κάποια κοινά υπο-υποπροβλήματα. Επιλύει το κάθε υπο-υποπρόβλημα μόνο μια φορά και στη συνέχεια αποθηκεύει τη λύση σε ένα πίνακα, αποφεύγοντας τον εκ νέου υπολογισμό.

Οι άπληστοι αλγόριθμοι εφαρμόζονται, όπως και οι αλγόριθμοι δυναμικού προγραμματισμού, κυρίως σε προβλήματα βελτιστοποίησης στα οποία θα πρέπει να γίνουν ορισμένες επιλογές προκειμένου να επιτευχθεί μια βέλτιστη λύση. Η βασική ιδέα της μεθόδου είναι ότι η κάθε απόφαση λαμβάνεται με βάση κάποια τοπικά κριτήρια βελτιστοποίησης. Ενας άπληστος αλγόριθμος κάνει πάντοτε την επιλογή που φαίνεται καλύτερη τη δεδομένη στιγμή. Με άλλα λόγια, κάνει μια τοπικά βέλτιστη επιλογή με την ελπίδα ότι η επιλογή αυτή θα οδηγήσει σε μια καθολική βέλτιστη λύση. Στην κατηγορία των άπληστων αλγορίθμων θα μπορούσαν να περιλαμβάνονται οι μέθοδοι Επαναληπτικής Αναζήτησης, Προσομοιωμένης Ανόπτησης και οι Ευρηστικές μέθοδοι

Προϋπόθεση για την αντιμετώπιση του πραγματικού κόσμου ως παίγνιο με πολλούς παίχτες είναι η ικανότητα χειρισμού του οπλοστασίου των τεχνικών επίλυσης προβλημάτων, κυρίως αλγορίθμους που έχουν δημιουργηθεί για τις διάφορες συνθήκες. Συχνά μπορούν να βρεθούν καλύτερες λύσεις στα προβλήματα του πραγματικού κόσμου διασταυρώνοντας διαφορετικές προσεγγίσεις. Τα προβλήματα του πραγματικού κόσμου είναι δύσκολα για διάφορους λόγους, όπως παράδειγμα το γεγονός ότι το εύρος των πιθανών λύσεων στο χώρο αναζήτησης είναι τόσο μεγάλο που δεν επιτρέπει μια εξαντλητική αναζήτηση για τη βέλτιστη απάντηση, όπως επίσης και για το λόγο ότι το πρόβλημα μπορεί να είναι τόσο πολύπλοκο, ώστε για να διευκολυνθεί η επίλυσή του θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν εξαιρετικά απλοποιημένα μοντέλα, γεγονός που καθιστά άχρηστο κάθε δεδομένο.

6.2 Εξελικτικοί Αλγόριθμοι

[ΛΜΣ07]
Οι εξελικτικοί αλγόριθμοι λειτουργούν σε έναν πληθυσμό πιθανών λύσεων που εφαρμόζουν την αρχή της επιβίωσης του καταλληλότερου, ώστε να παράγουν τις καλύτερες λύσεις ή τις καλύτερες προσεγγίσεις σε μία λύση.

Ορισμένες από τις ιδιότητες των εξελικτικών αλγορίθμων είναι οι εξής :

- Αξιοποιούν τη συλλογική διαδικασία μάθησης ενός πληθυσμού από τα ίδια τα άτομα του πληθυσμού.
- Μερικές φορές τα άτομα μπορούν επίσης να συμπεριλάβουν άλλου είδους πληροφορίες, όπως για παράδειγμα στρατηγικές παραμέτρους του ΕΑ
- Η αποτίμηση των ατόμων μέσα στο περιβάλλον γίνεται με ένα μέτρο της ποιότητας ή της απόδοσής του
- Πρέπει να υπάρχει η δυνατότητα της σύγκρισης απόδοσης δύο ατόμων, η οποία να καταλήγει σε απόφαση για το ποιο άτομο είναι καλύτερο από τα δύο

Από τις μορφές των Εξελικτικών Αλγορίθμων ο εξελικτικός προγραμματισμός δίνει έμφαση στη διαδικασία της μετάλλαξης.

Ο Εξελικτικός Προγραμματισμός όταν αντιμετωπίζει προβλήματα βελτιστοποίησης με πραγματικές παραμέτρους χρησιμοποιεί ομοιόμορφα κατανεμημένες μεταλλάξεις και επεκτείνει την εξελικτική διαδικασία και στις παραμέτρους της στρατηγικής που εφαρμόζεται , συγχρόνως ο τελεστής επιλογής που χρησιμοποιείται είναι πιθανοτικός.

Τα χαρακτηριστικά ενός Εξελικτικού Αλγορίθμου είναι

- Μια συνάρτηση αρχικοποίησης πληθυσμού που δημιουργεί τον αρχικό πληθυσμό
- Μια συνάρτηση αποτίμησης
- Μια συνθήκη τερματισμού και
- Η μετάλλαξη

Υπάρχει επίσης η δυνατότητα ένας εξελικτικός αλγόριθμος να λειτουργήσει σε έναν πληθυσμό με υποσύνολα. Κάθε υποσύνολο πληθυσμού απομονώνεται και εξελίσσεται (όπως στον ενιαίο ΕΑ πληθυσμό) για μερικές γενεές, πρωτού να ανταλλαχθούν ένα ή περισσότερα άτομα μεταξύ των υποσυνόλων του πληθυσμού. Ο πολυπληθυσμιαίος ΕΑ διαμορφώνει την εξέλιξη με έναν τρόπο πιο συμβατό με τη φύση, από ότι ο ενιαίος ΕΑ πληθυσμός.

6.3 Το Πρόβλημα του Περιοδεύοντος Πωλητή

[ΛΜΣ07], [PS],

Δεδομένων των εξόδων μεταφοράς μεταξύ διαφόρων πόλεων, το Πρόβλημα του Περιοδεύοντος Πωλητή –ΠΠΠ (TravelSalesMan Problem-TSP) συνίσταται στην προσπάθεια ενός περιπλανώμενου πωλητή να επισκεφθεί όλες τις πόλεις της περιοχής του, μια μόνο φορά την καθεμία, και να επιστρέψει στην πόλη από την οποια ξεκίνησε με το ελάχιστο δυνατό κόστος.

Μια πιο αυστηρή διατύπωση του ΠΠΠ είναι η εξής :

Μας δίνεται ένα σύνολο $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ από πόλεις, και ένας nxn πίνακας από μη αρνητικούς ακεραίους d, όπου ο d_{ij} συμβολίζει την απόσταση ανάμεσα στην πόλη c_i και στην πόλη c_j. Υποθέτουμε ότι $d_{ii} = 0$ και $d_{ij} = d_{ji}$ για όλα τα i, j. Μας ζητείται να βρούμε τη συντομότερη διαδρομή των πόλεων, δηλαδή μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία π από το σύνολο $1, 2, n$ στον εαυτό του, (όπου $\pi_{(i)}$ είναι διαισθητικά, η πόλη την οποία επισκεπτόμαστε i-οστή διαδρομή), τέτοια ώστε η ποσότητα

$$c(\pi) = d_{\pi(1)\pi(2)} + d_{\pi(2)\pi(3)} + \ldots + d_{\pi(n-1)\pi(n)} + d_{\pi(n)\pi(1)}$$

να είναι όσο το δυνατόν μικρότερη

Το ΠΠΠ , συνδέεται στενά με το πρόβλημα του χαμιλτονιανού (Hamiltonian) κύκλου, όπου ο περιοδεύον πωλητής θα πρέπει να επισκεφτεί n πόλεις. Εάν αναπαραστήσουμε το πρόβλημα μέσω ενός πλήρους γραφήματος με n κόμβους, μπορούμε να πούμε ότι ο στόχος του πωλητή είναι να κάνει μια περιοδεία, δηλαδή έναν χαμιλτονιανό κύκλο, διερχόμενο από κάθε πόλη μια και μόνο φορά, τελειώνοντας την περιοδεία στην πόλη από όπου ξεκίνησε. Το ταξίδι από την πόλη i στην πόλη j έχει κάποιο κόστος $c(i, j)$, (ένας ακέραιος αριθμός), και ο πωλητής θέλει να πραγματοποιήσει την περιοδεία που έχει το ελάχιστο κόστος, όπου το συνολικό κόστος είναι το άθροισμα από τα επιμέρους κόστη για την κάθε ακμή της περιοδείας.

Για το πρόβλημα δε της εύρεσης χαμιλτονιανού κύκλου δεν υπάρχει πολυωνυμικός αλγόριθμος κατά συνέπεια δεν ανήκει στην κλάση P (στην οποία ανήκουν τα προβλήματα που λύνονται αλγοριθμικά σε πολυωνυμικό χρόνο από τη ντετερμινιστική μηχανή Turing) με την έννοια του πρακτικά εφικτού αλγορίθμου και των ρεαλιστικά επιλύσιμων προβλημάτων.

Συνεπώς και το πρόβλημα ΠΠΠ δεν ανήκει στην κλάση P όπως και μια πληθώρα προβλημάτων βελτιστοποίησης αλλά στην κλάση NP στην οποία ανήκουν τα προβλήματα που επιλύονται από μη ντετερμινιστικούς αλγορίθμους. Είναι γεγονός ότι το πλήθος των καταστάσεων (διαδρομών) για το πρόβλημα ΠΠΠ γίνεται εκθετικό καθώς αυξάνονται οι πόλεις Το πρόβλημα του χαμιλτονιανού κύκλου ανήκει στη κλάση NP-πλήρη, κατά συνέπεια και το ΠΠΠ ανήκει στη κλάση NP-πλήρη.

Το ΠΠΠ είναι ένα συνδυαστικής βελτιστοποίησης πρόβλημα καθώς ένα στιγμιότυπο που αποτελείται από n πόλεις και έναν πίνακα nxn με (d_{ij}) τις αποστάσεις κάθε ζεύγους πόλεων, έγκειται στην εύρεση της διαδρομής με το μικτότερο κόστος από F=όλοι οι κυκλικοί συνδυασμοί π, n αντικείμενα Ένας κυκλικός συνδυασμός αναπαριστά μια διαδρομή όταν ερμηνεύεται το $\pi_{(j)}$ να είναι η πόλη επίσκεψης μετά την πόλη j, με $j = 1, \ldots, n$. Τότε το κόστος c χαρτογραφεί το π σαν

$$\sum_{j=1}^{n} d_{jn(j)}$$

6.4 Ιστορική Αναδρομή

[Lap92], [ΛΜΣ07],[Λυκ01]

Το ΠΠΠ εμφανίζεται σε ένα πολύ μεγάλο αριθμό εφαρμογών. Υπάρχουν αρκετοί ακριβείς προσεγγιστικοί και ευρηστικοί αλγόριθμοι που προσπαθούν να επιλύσουν το πρόβλημα.

6.4.1 Ακριβείς αλγόριθμοι

Ένας μεγάλος αριθμός από ακριβείς αλγορίθμους έχουν προταθεί για το ΠΠΠ οι οποίοι μπορούν πολύ καλύτερα να κατανοηθούν και να εξηγηθούν στα πλαίσια του Ακέραιου Γραμμικού Προγραμματισμού (Integer Linnear Programmin – ILP).

6.4.2 Ευρηστικοί αλγόριθμοι

Το πρόβλημα ΠΠΠ είναι ένα πρόβλημα NP-hard και είναι φυσικό να αντιμετωπιστεί με τα μέσα των ευρηστικών αλγορίθμων. Ένας χείμαρρος ερευνών αποτελείτο από την ανάπτυξη ευρηστικών με μια εγγυημένη εκτέλεση χειρότερης – περίπτωσης (worst-case). Ωστόσο οι μεγαλύτερες προσπάθειες έγιναν στο σχεδιασμό ευρηστικών με καλή εμπειρική εκτέλεση.

Ευρηστικά με εγγυημένη εκτέλεση χειρότερης – περίπτωσης

// (Euristics with guaranteed worst-case performance)

Θεωρώντας ένα συμμετρικό ΠΠΠ ορισμένο σε ένα γράφο G ο οποίος ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα. Έστω ότι z* είναι η τιμή για την βέλτιστη λύση του ΠΠΠ. Ένας απλός τρόπος να προκύψει ένα χαμηλότερο όριο στο z* είναι να υπολογιστεί αρχικά το μήκος του συντομότερου spanning tree T στο G. Έστω l(T) το μήκος του δέντρου. Μια δυνατή στρατηγική για την επίσκεψη όλων των κορυφών είναι η διάσχιση του spanning tree κατά μήκος των ακμών με τον ακόλουθο τρόπο

- Βήμα 1 Λαμβάνεται υπόψιν οποιοδήποτε φύλο i_0 (κορυφή

  με βαθμό 1) του spanning tree και τίθεται $i := i_0$

- Βήμα 2 Εάν υπάρχει κάποια μη διασχισμένη ακμή (i, j) προσκείμενη στη κορυφή i ακολουθείται αυτή η ακμή προς την κορυφή j. Τίθεται $i := j$ και επαναλαμβάνεται το βήμα 2.

Γενικότερα αυτή η λύση δεν δίνει περιοδεία. Για να συμβεί αυτό η παραπάνω διαδικασία πρέπει να τροποποιηθεί χρησιμοποιώντας συντομεύσεις, ενώ συγχρόνως αφήνονται οι κορυφές που έχουν ήδη επισκεφθεί. Αφού ικανοποιείται η τριγωνική ανισότητα, δεν θα αυξηθεί η συνολική διανυθείσα απόσταση και επιπλέον η κλειστή διαδρομή που προκύπτει σαν αποτέλεσμα είναι μια περιοδεία μήκους που δεν υπερβαίνει το $2l(T) < 2z^*$.

Ο Christofides (όπως αναφέρεται στη βιβλιογραφία) πρότεινε μια βελτίωση στη παραπάνω διαδικασία, η οποία είναι βασισμένη στην ακόλουθη παρατήρηση. Το συντομότερο spanning tree δεν είναι γενικότερα Ευριλιανό. Ωστόσο ένας Ευριλιανός γράφος μπορεί να προκύψει από αυτό ενώνοντας τις μονού βαθμού ακμές μέσω ενός ελάχιστου κόστους matching αλγορίθμου. Αυτό μπορεί να γίνει σε χρόνο $O(n^3)$ όπως έχουν δείξει οι Papadimitriou and Steigliz. Νέες ακμές που αντιστοιχούν στη βέλτιστη matching λύση προστίθενται στο δέντρο. Όταν l(M) είναι το συνολικό μήκος του τότε ο γράφος του αποτελέσματος είναι ένας Ευριλιανός γράφος και ολόκληρη η διάσχισή του απαιτεί συνολική απόσταση l(T)+l(M).

Ευρηστικά με εμπειρικά καλές επιδόσεις (Euristics with good empirical performance)

Η επικέντρωση γίνεται σε ένα πλήθος από ευρηστικές μεθόδους που δίνουν εμπειρικά καλές λύσεις για το ΠΠΠ. Οι ευρηστικές μέθοδοι μπορούν να κατηγοριοποιηθούν στις διαδικασίες κατασκευής περιοδείας (tour construction procedures) οι οποίες χτίζουν σταδιακά μια λύση προσθέτοντας μια νέα κορυφή σε κάθε βήμα και τις διαδικασίες βελτίωσης περιοδείας (tour improvement procedures) οι οποίες βελτιώνουν μια εφικτή λύση πραγματοποιώντας ποικίλες αλλαγές. Οι καλύτερες μέθοδοι είναι αυτές των σύνθετων αλγορίθμων (composite algorithms) οι οποίες συνδυάζουν αυτά τα δύο γνωρίσματα. Οι πιο πολλές από αυτές τις μεθόδους λειτουργούν και σε συμμετρικά αλλά και σε ασύμμετρα προβλήματα.

Διαδικασίες κατασκευής περιοδείας

(a) ο αλγόριθμος του πλησιέστερου γείτονα (The nearest-neihgbour algorithm). Σε αυτή τη μέθοδο κατασκευάζεται μια εφικτή διαδρομή παίρνοντας σε κάθε βήμα την πιο επωφελή απόφαση. Αυτό που προκαλεί το ενδιαφέρον σε αυτόν τον «μυωπικό» αλγόριθμο είναι η απλότητα του.

(b) Αλγόριθμοι παρεμβολής (insertion algorithms). Αυτή η κατηγορία συμπεριλαμβάνει έναν αριθμό από παρεμφερής αλγορίθμους των οποίων η βασική δομή μπορεί να συνοψηθεί ως εξής :

Βήμα1. Κατασκεύασε μια πρώτη διαδρομή η οποία περιλαμβάνει δύο κορυφές.

Βήμα2. Λάβε υπόψην με τη σειρά όλες τις κορυφές που δεν έχουν ακόμα μπεί στη διαδρομή. Είσαγε στη διαδρομή την κορυφή επιλογής λαμβάνοντας υπόψιν ένα δεδομένο κριτήριο, για παράδειγμα :

- Την κορυφή που αποφέρει τη μικρότερη αύξηση απόστασης

- Την πιο κοντινή κορυφή στην τρέχουσα διαδρομή
- Την πιο μακρινή κορυφή από την διαδρομή
- Την κορυφή που σχηματίζει την μεγαλύτερη γωνία με δύο συνεχόμενες κορυφές της διαδρομής , κτλ

Η πολυπλοκότητα διαφέρει μεταξύ $O(n^2)$ και $O(nlogn)$ και εξαρτάται από το κριτήριο που χρησιμοποιείται.

(c) Αλγόριθμος διόρθωσης για ασύμμετρα ΠΠΠs. (The patching algorithm for asymmetrical TSPs) Η ακόλουθη διαδικασία η οποία επινοήθηκε από τον Karp εκμεταλλεύεται το γεγονός ότι στα προβλήματα για τα οποία τα c_{ij} είναι μη ενιαία διανεμημένα η χαλάρωση της ανάθεσης για το ΠΠΠ παρέχει μια κοντά στο βέλτιστο λύση

Βήμα1. Λύσε το πρόβλημα AP με πίνακα κόστους C.

Βήμα2. Εάν η λύση περιέχει μόνο ένα κύκλωμα σταμάτα.

Βήμα3. Διάλεξε δύο κυκλώματα που έχουν το μεγαλύτερο πλήθος από κορυφές. Διάλεξε μια ακμή (i,j) από το πρώτο κύκλωμα και μια ακμή (k,l) από το δεύτερο κύκλωμα που μειώνουν το κόστος $c_{ij} + c_{kj} - c_{ij} - c_{kl}$ συγχωνεύοντας τα δύο κυκλώματα

Διαδικασίες βελτίωσης περιοδείας

Αυτές οι διαδικασίες χρησιμοποιούνται για τη βελτίωση μιας περιοδείας που παρέχεται μέσω διάφορων τρόπων και μπορούν να καταταχθούν σε τρεις βασικές κατηγορίες

(a) Αλγόριθμος r-opt (The r-opt algorithm) Η γειτονιά και επομένως η εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας για ανταλλαγή ακμών μπορεί να γενικευτεί σε Nk η οποία καλείται k-change , η αντικατάσταση γίνεται το πολύ σε κ συνδέσεις. Τέτοιες γειτονιές οδηγούν σε πολύ αποτελεσματικά ευρηστικά αποτελέσματα για το ΠΠΠ. Στη γειτονιά 2-change γίνεται εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας δύο φορές, μια για κάθε αντικατάσταση, ενώ στη γειτονιά k-change γίνεται εφαρμογή της k φορές όπου και ονομάζεται k-opt.

Η τοπική αναζήτηση – η τεχνική στην οποία ανήκει η k-opt είναι ενδεχομένως η πιο παλιά αλλά η πιο αποτελεσματική τεχνική στα προβλήματα βελτιστοποίησης . Ειδικότερα η τοπική αναζήτηση με k-change γειτονιές, η k-opt, είναι η πιο ευρεία χρησιμοποιημένη ευρηστική μέθοδος για το ΠΠΠ. Σε κάθε βήμα της k-opt, k συνδέσεις από τη τρέχουσα διαδρομή αντικαθίστανται από k συνδέσεις με τέτοιο τρόπο ώστε να επιτυγχάνεται συντομότερη διαδρομή.

Ο αλγόριθμος προσδιορίζεται με ανταλλαγές (ή κινήσεις) στις οποιες μπορούν να μετατρέψουν μια υποψήφια λύση σε μια άλλη.

Βήμα1. Θεώρησε μια αρχική περιοδεία .

Βήμα2. Απομάκρυνε r ακμές από τη περιοδεία και επανασύνδεσε δοκιμαστικά τις r υπόλοιπες αλυσίδες με όλους του δυνατούς τρόπους. Εάν κάποια από αυτές τις επανασυνδέσεις αποφέρει συντομότερη διαδρομή θεώρησε αυτή τη διαδρομή νέα αρχική λύση και επανέλαβε το βήμα2. Σταμάτα όταν δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί καμία βελτίωση.

Αυτή η διαδικασία αρχικά επινοήθηκε για συμμετρικά TSPs. Σε αυτή τη περίπτωση ο αριθμός των υποψήφιων λύσεων σε κάθε βήμα είναι n^r αφού υπάρχουν $\binom{n}{r}$ τρόποι να απομακρυνθούν r ακμές και $r!$ τρόποι για να επανασυνδεθούν οι υπόλοιπες μη κατευθυνόμενες αλυσίδες.

Γενικότερα το r παίρνει τις τιμές 2 ή 3

(b) Προσομοιωμένη ανόπτηση (simulated annealing). Αυτή η επιτυχημένη μέθοδο βελτιώσεων επινοήθηκε από την αναλογία που υπάρχει με την διαδικασία ανόπτησης υλικών που χρησιμοποιείται στη μηχανική. Για να φθάσει ένα υλικό στην ελάχιστη κατάσταση ρευστότητας (minimal-energy solid state) είναι απαραίτητο να ζεσταθεί μέχρι τα μόρια να διανεμηθούν τυχαία στη ρευστή κατάσταση, στη συνέχεια για να αποφευχθούν τα τοπικά ελάχιστα η θερμοκρασία μειώνεται σταδιακά μέχρις ώτου το σύστημα φθάσει σε ένα σημείο ισορροπίας για ένα συγκεκριμένο επίπεδο θερμοκρασίας. Σε μια υψηλή θερμοκρασία T , υπάρχουν όλες οι πιθανές καταστάσεις αλλά καθώς το σύστημα ψυχραίνει, οι πιθανότητες μειώνονται και η διαδικασία συγκλίνει σε μια σταθερή κατάσταση.

Στα προβλήματα βελτιστοποίησης ο σκοπός είναι να γίνει μετάβαση από μια δεδομένη αρχική λύση στη λύση ελάχιστου κόστους, πραγματοποιώντας σταδιακές αλλαγές στην αρχική λύση. Θέτοντας T την κατάσταση διαδικασίας (όπου T αντιστοιχεί στο επίπεδο θερμοκρασίας ενός φυσικού συστήματος), στην αρχή η τιμή της T είναι υψηλή και ο πλήθος των επιτρεπόμενων κινήσεων είναι επίσης υψηλός. Το πλήθος των κινήσεων μειώνεται μαζί με την T μέχρι να μη είναι δυνατή καμία αλλαγή στη λύση.

Για μια δεδομένη τιμή της T , ο αλγόριθμος είναι παρόμοιος με την διαδικασία r-opt : όλες οι λύσεις y στη γειτονιά της λύσης x εξετάζονται. Ωστόσο επιτρέπεται ορισμένες φορές η αντικατάσταση της x από την y ακόμα και αν το αποτέλεσμα είναι μεγαλύτερου κόστους. Αυτού του τύπου η αντικατάσταση μειώνει την πιθανότητα της ενδεχόμενης παγίδευσης σε ένα τοπικό βέλτιστο. Η προσομοιωμένη ανόπτηση μπορεί να εφαρμοστεί σε μεγάλο φάσμα προβλημάτων συνδυαστικής βελτιστοποίησης , και έχει εφαρμοστεί για την αντιμετώπιση του ΠΠΠ από αρκετούς συγγραφείς με διάφορους βαθμούς επιτυχίας

(c) Tabu search. Όπως και στις προηγούμενες δύο μεθόδους εξετάζονται οι επιτυχημένοι γείτονες της λύσης x και όσον αφορά την προσομοιωμένη ανόπτηση το αντικείμενο επιτρέπεται να χειροτερέψει ώστε να αποφευχθούν τα τοπικά ελάχιστα. Για να αποτραπούν οι κύκλοι, απαγορεύονται οι λύσεις οι οποίες έχουν ήδη εξετασθεί με την εισαγωγή τους σε μια σταθερά ενημερωμένη λίστα “tabu list”.

Σύνθετοι αλγόριθμοι (composite algorithms)

Δύο αποτελεσμτικοί σύνθετοι αλγόριθμοι έχουν αναπτυχθεί . Ο πρώτος είναι ο ευρηστικός CCAO, ο δεύτερος είναι ο GENIUS

(a) Αλγόριθμος CCAO. Ο ευρηστικός αυτός αλγόριθμος σχεδιάστηκε για το συμμετρικά Ευκλείδεια ΠΠΠs. Εκμεταλλεύεται την πολύ γνωστή ιδιότητα αυτών των προβλημάτων, ότι σε οποιαδήποτε βέλτιστη λύση η επίσκεψη στις κορυφές οι οποίες βρίσκονται στο κυρτό πολύγωνο όλων των κορυφών γίνεται με τη σειρά με την οποία εμφανίζονται στα σύνορα του κυρτού πολύγωνου

(b) Αλγόριθμος GENIUS. Ένα μεγάλο μειονέκτημα του αλγορίθμου CCAO είναι ότι το στάδιο της παρεμβολής είναι μυωπικό με την έννοια ότι αφού οι παρεμβολές εκτελούνται σειριακά χωρίς να ληφθεί υπόψη το καθολικό βέλτιστο μπορεί να έχει σαν αποτέλεσμα τη διαδοχή κακών αποφάσεων τις οποίες η μεταγενέστερη φάση βελτιστοποίησης να μην μπορεί να τις αναιρέσει. Ο αλγόριθμος GENIUS εκτελεί τις παρεμβολές πιο προσεκτικά πραγματοποιώντας συγχρόνως με την ίδια την παρεμβολή ένα περιορισμένο αριθμός τοπικών μετασχηματισμών της περιοδείας . Αποτελείται από δύο μέρη : μια γενική φάση παρεμβολής, ακολουθούμενη από τη φάση της βελτιστοποίησης η οποία διαδοχικά απομακρύνει κορυφές από τη περιοδεία και τις επανεισάγει κάνοντας χρήση ενός γενικευμένου κανόνα παρεμβολής.

Ο συγκεκριμένος αλγόριθμος σύμφωνα με τα αποτελέσματα δοκιμών παράγει καλύτερες λύσεις από τον CCAO σε συντομότερο χρόνο, και θεωρείται ανώτερος από όλες τις προαναφερόμενες μεθόδους κατασκευής ευρηστικών. Επίσης μπορεί να συγκριθεί με τη μέθοδο tabu search καθώς και την προσομοιωμένη ανόπτηση.

Γενετικοί αλγοριθμοι και το Πρόβλημα του Περιοδεύοντος Πωλητή Τα τελευταία χρόνια έχουν γίνει αρκετές προσπάθειες για να προσεγγιστεί το ΠΠΠ και με χρήση ΓΑ. Μία προσέγγιση από αυτές είναι η χρήση του τελεστή διασταύρωσης OX

Με το Εργαλείο Γενετικού Προγραμματισμού GENITOR, το οποίο έχει αρκετά αξιόλογες επιδόσεις και το οποίο προέκυψε υλοποιώντας συγκεκριμένες σχεδιαστικές επιλογές διασταύρωσης και μετάλλαξης, επιτεύχθη μια πολύ καλή επίδοση στην εύρεση λύσης για το πρόβλημα ΠΠΠ, χρησιμοποιώντας διασταύρωση ανασυνδυασμού ακμών.

6.5 Μελέτη του προβλήματος ΠΠΠ

[ΛΜΣ07], [Hel07],[ACR03], [Klo+09], [Lap92], [HKM97],[ACR92], [Hel00]

Στην παρούσα μελέτη έμφαση δίνεται στις ευρηστικές μεθόδους με εμπειρικά καλές επιδόσεις και ειδικότερα στις μεθόδους βελτίωσης περιοδείας (στην οποία γενική κατηγορία ανήκει και η k-opt). Αξίζει επίσης να σημειωθεί το ενδιαφέρον που προκαλούν τα κριτήρια επιλογής κορυφής προς εισαγωγή στους αλγορίθμους παρεμβολής που ανήκουν στις μεθόδους κατασκευής περιοδείας. Η προσέγγιση του TSP που παρουσιάζεται στη μελέτη αυτή και στην οποία γίνεται εφαρμογή των αρχών της ΕΘΠ αξιοποιεί τον αλγόριθμο r-opt καθώς και τροποποιήσεις/βελτιώσεις του όπως παρουσιάζονται στη συνέχεια, ενώ σχετίζεται με την μέθοδο της προσομοιωμένης ανόπτησης λαμβάνοντας επίσης υπόψιν τη μέθοδο tabu list.

6.5.1 Αλγοριθμος Lin-Keringhan

Έστω Τ η αρχική διαδρομή. Σε κάθε επαναληπτικό βήμα ο αλγόριθμος επιχειρεί να βρεί δυο σύνολα από ακμές $X = x_1, \ldots, k_x$ και $\Psi = \psi_1, \ldots, \psi_k$ τέτοιο ώστε εάν οι ακμές του Χ διαγραφούν από την Τ και αντικατασταθούν από το Υ το αποτέλεσμα είναι μια καλύτερη διαδρομή. Τα δύο σύνολα Χ και Ψ κατασκευάζονται βήμα προς βήμα, ενώ αρχικά το Χ και Ψ είναι κενό

Κριτήρια αλγορίθμου

Για να επιτευχθεί ένας επαρκώς ικανοποιητικός αλγόριθμος μόνο οι ακμές που ικανοποιούν τα ακόλουθα κριτήρια μπορούν να μπουν στα σύνολα Χ και Ψ.

Κριτήριο διαδοχικής ανταλλαγής.(Sequential exchange criterion) Τα x_i, c_i πρέπει να έχουν κοινό σημείο τέλους . Το ίδιο ισχύει για τα c_i και x_{i+1}. Δηλαδή $x_i = (t_{2i-1}, t_{2i}), y = (t_{2i}, t_{2i+1}), x_{i+1} = (t_{2i+1}, t_{2i+2})$ για $i >= 1$. Όπως είναι φανερό η σειρά $(x_1, \psi_1, x_2, \psi_2, x_3, \ldots, x_\kappa, \psi_\kappa)$ συνιστά μια αλυσίδα από συνδεόμενες ακμές . Αξίζει επίσης να σημειωθεί ότι όλες οι 2- και 3- opt κινήσεις είναι διαδοχικές. Η πιο απλή μη διαδοχική κίνηση είναι η 4-opt η οποία και καλείται double – bridge κίνηση.

Το κριτήριο της εφικτότητας. (The feasibility criterion). Απαιτείται από το $x_i = (t_{2i-1}, t_{2i})$ να επιλέγεται έτσι ώστε εάν το t_{2i} συνδεθεί με το t_1, αυτό που θα προκύψει είναι μια διαδρομή. .

Το κριτήριο του θετικού κέρδους. (The positive gain criterion) Απαιτείται πάντα να επιλέγεται η ψ_i έτσι ώστε το αθροιστικό κέρδος G_i από το προτεινόμενο σύνολο αλλαγών να είναι θετικό

Το κριτήριο της μη συνδεσιμότητας. (The disjunctivity criterion). Απαιτείται τα σύνολα Χ και Ψ να μην συνδέονται .

Για να περιοριστεί ακόμα περισσότερο η αναζήτηση οι Lin και Kernighan εισήγαγαν κάποια επιπρόσθετα κριτήρια από τα οποία το επόμενο είναι το πιο σημαντικό.

Το κριτήριο του συνόλου των υποψηφίων (The candidate set criterion). Η αναζήτηση της ακμής που θα εισαχθεί στη διαδρομή $c_i = (t_{2i}, t_{2i+1})$ περιορίζεται στους πέντε κοντινότερους γείτονες του t_{2i}

6.5.2 Τροποποίηση 1 αλγορίθμου Lin-Keringhan, LKH-1

Η τροποποίηση LKH-1 αναθεώρησε κάποια κριτήρια, κάνοντας δυνατή την εύρεση βέλτιστων λύσεων με μεγαλύτερη συχνότητα.

Κριτήριο της διαδοχικής αλλαγής. Το κριτήριο αυτό έχει κάπως χαλαρωθεί. Όταν δεν μπορεί να βελτιωθεί πλέον μια διαδρομή με διαδοχικές κινήσεις, γίνονται προσπάθειες για βελτίωση με μη διαδοχικές κινήσεις 4-opt και 5-opt.

Κριτήριο της εφικτότητας. Μια διαδοχική κίνηση 5-opt χρησιμοποιείται σαν τη βασική υποκίνηση. Χρησιμοποιώντας μια 5-opt κίνηση σαν βασική κίνηση αντί της 2 ή 3-opt κίνηση διευρύνεται η αναζήτηση και αυξάνεται η δυνατότητα του αλγορίθμου στο να βρεθούν καλές διαδρομές με αντάλλαγμα βέβαια την αύξηση του χρόνου εκτέλεσης

Κριτήριο διαζευκτικότητας. Τα σύνολο Χ,Ψ δεν χρειάζεται πλέον να είναι ασύνδετα. Για να αποφευχθεί μια άπειρη αλυσίδα από υποκινήσεις εφαρμόζεται ο ακόλουθος κανόνας : *Η τελευταία ακμή προς διαγραφή σε μια 5-opt κίνηση πρέπει να μην έχει προηγουμένως προστεθεί στην τρέχουσα αλυσίδα της 5-opt κίνησης* .

Κριτήριο του συνόλου των υποψηφίων. Η α-value μιας ακμής είναι η αύξηση του κόστους όταν ένα ελάχιστο 1-tree απαιτείται να περιέχει μια ακμή. Οι α-values δίνουν μια καλή εκτίμηση για την πιθανότητα μια ακμή να περιέχεται σε μια βέλτιστη διαδρομή. Χρησιμοποιώντας μια α-nearness είναι συχνά πιθανό να περιοριστεί η αναζήτηση σε σχετικά λίγους από τους α-nearness γείτονες του κόμβου, και παρόλα αυτά να παρέχονται βέλτιστες διαδρομές

6.5.3 Τροποποίηση 2 αλγορίθμου Lin-Keringhan, LKH-2

Η τροποποίηση LKH2 παρέχει λύσεις ακόμα υψηλότερης ποιότητας και για την επίλυση πολύ μεγάλων στιγμιοτύπων.

Γενικές k-opt κινήσεις. Ένα από τα πιο σημαντικά στοιχεία της τροποποίησης. Τώρα οι κ-opt κινήσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν με επιλογή του κ να είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 2 και μικρότερο από το πλήθος των πόλεων. Κάθε υποκίνηση είναι διαδοχική, ωστόσο, κατά τη διάρκεια τέτοιων κινήσεων, μπορεί να εκτελεστούν και κινήσεις που δεν είναι διαδοχικές. Έτσι σε αντίθεση με την αρχική έκδοση οι μη διαδοχικές κινήσεις όχι μόνο δεν δοκιμάζονται σε έσχατη ανάγκη αλλά ενσωματώνονται στην κανονική αναζήτηση

Διαμερισμός. Για να μειωθεί η πολυπλοκότητα της επίλυσης μεγάλης κλίμακας στιγμιότυπων η νέα τροποποίηση του αλγορίθμου κάνει δυνατό το διαμερισμό του προβλήματος σε μικρότερα υποπροβλήματα. Κάθε υποπρόβλημα λύνεται ξεχωριστά και η λύση του χρησιμοποιείται (αν είναι δυνατό) για τη βελτίωση ολόκληρης της δεδομένης διαδρομής.

Ο LKH2 υλοποιεί τα ακόλουθα έξι σχήματα διαμερισμού

(a) Διαμέριση διαδρομής σε τμήματα. Μια δεδομένη διαδρομή σπάει σε τμήματα ίσου μεγέθους. Κάθε τμήμα συνιστά ένα υποπρόβλημα Μετά την επεξεργασία των υποπροβλημάτων αυτής της διαμέρισης, μια αναθεωρημένη διαμέριση γίνεται όπου, κάθε τμήμα έχει τους μισους κόμβους από κάθε ένα από τα δύο γειτονικά παλιά τμήματα.

(b) Διαμερισμός Karp. Ολόκληρη η περιοχή που περιέχει τους κόμβους υποδιαιρείται σε ορθογώνια με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε ορθογώνιο να περιέχει συγκεκριμένο αριθμό από κόμβους. Κάθε ορθογώνιο μαζί με μια δεδομένη διαδρομή συνιστά ένα υποπρόβλημα που περιέχει όλους τους κόμβους μέσα σε ένα ορθογώνιο

(c) Διαμερισμός Delaunay. Ο γράφος Delaunay χρησιμοποιείται για τη διαίρεση του συνόλου των κόμβων σε ομάδες. Οι ακμές στο γράφο Delaunay εξετάζονται με αύξουσα διάταξη του μήκους και προστίθενται στην ομάδα εαν το μέγεθος της ομάδας δεν υπερβαίνει το προβλεπόμενο μέγιστο μέγεθος. Κάθε ομάδα μαζί με μια δεδομένη διαδρομή συνιστά ένα υποπρόβλημα

(d) Διαμέριση K-means. Η K-means είναι μια μέθοδος διαμέρισης least-squares η οποία διαιρεί το σύνολο των κόμβων σε κ ομάδες έτσι ώστε η συνολική απόσταση μεταξύ όλων των κόμβων και των κέντρων των ομάδων (centrads) να ελαχιστοποιείται

(e) Διαμέριση Sierpinski. Η διαδρομή διαμερίζεται σε τμήματα ίσου μεγέθους. Κάθε ένα από αυτά τα τμήματα μαζί με μια δεδομένη διαδρομή συνιστά ένα υποπρόβλημα. Μετά από την επεξεργασία όλων των υποπροβλημάτων, μια αναθεωρημένη διαμέριση του Sierpinski χρησιμοποιείται όπου κάθε καινούργιο τμήμα παίρνει τους μισούς κόμβους του από κάθε ένα από τα δύο προσκείμενα παλιά τμήματα.

(f) Διαμέριση Rohe. Τυχαία ορθογώνια χρησιμοποιούνται για διαμέριση του συνόλου των κόμβων σε μη συνδεόμενα υποσύνολα από περίπου ίσα μεγέθη. Κάθε ένα από αυτά τα υποσύνολα μαζί με μια δεδομένη διαδρομή συνιστούν ένα υποπρόβλημα.

Συγχώνευση διαδρομής. Ο LKH-2 παρέχει μια διαδικασία συγχώνευσης διαδρομής η οποία προσπαθεί να παράγει την καλύτερα δυνατή διαδρομή από δύο ή περισσότερες δεδομένες με τη λογική ότι οι διαδρομές που είναι κοντά στο βέλτιστο τυπικά έχουν πολλές κοινές ακμές.

Επαναληπτικά μερική μεταγραφή. Η επαναληπτικά μερική μεταγραφή είναι μια διαδικασία για τη βελτίωση της εκτέλεσης της τοπικής αναζήτησης που είναι βασισμένη σε ευρηστικό αλγόριθμο. Επιχειρεί να βελτιώσει δύο μεμονωμένες (ξεχωριστές) διαδρομές αντικαθιστώντας ορισμένα μέρη από κάθε λύση με τα σχετικά μέρη της άλλης λύσης

Αναζήτηση Backbone-guided. (Μέχρι το κόκαλο καθοδήγηση – καθοδήγηση σπονδυλικής στήλης). Οι ακμές των διαδρομών που παράγονται από ένα σταθερό αριθμό από αρχικές δοκιμές μπορούν να χρησιμοποιηθούν σαν υποψήφιες ακμές των επιτυχημένων δοκιμών

6.5.4 Μεταβλητού μεγέθους λίστα γειτόνων

Η τιμή του κ έχει μεγάλη επιρροή στο χρόνο εκτέλεσης του αλγορίθμου σε αρκετούς τύπους προβλημάτων. Παρόλο που η ποιότητα της περιοδείας είναι βελτιωμένη για μεγαλύτερες τιμές του κ, ο χρόνος εκτέλεσης είναι αξιοσημείωτα μεγαλύτερος. Μειώνοντας το κ μειώνεται ο χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου σχεδόν γραμμικά. Αν μπορούσε να βρεθεί η βέλτιστη τιμή για το κ , ο χρόνος εκτέλεσης θα μειωνόταν σημαντικά ενώ συγχρόνως η επίδραση στην ποιότητα της περιοδείας θα επηρεαζόταν ελάχιστα, με θετικό ή αρνητικό τρόπο.

Όσον αφορά την τιμή κ της λίστας γειτόνων, αυτή έχει σχέση με τον κόμβο του οποίου είναι η λίστα γειτόνων

- Για ένα κόμβο x ο οποίος είναι απομακρυσμένος από οποιοδήποτε άλλο κόμβο, ασχέτως πως θα γίνουν οι αλλαγές ακμών το πλήθος των πιθανών κινήσεων βελτίωσης είναι μικρό. Ετσι η λίστα γειτόνων του x μπορεί να είναι σχετικά μικρή σε σχέση με τη λίστα γειτόνων οποιουδήποτε άλλου κόμβου

- Με δεδομένο ένα κόμβο ψ ο οποίος είναι κοντά σε πολλούς άλλους κόμβους, τότε θα μπορούσαν να υπάρχουν πολύ τρόποι για κινήσεις ακμών από και προς τον ψ έτσι ώστε να βρεθούν καλύτερες περιοδείες από ότι στην προηγούμενη περίπτωση

- Τη στιγμή που ένα πρόβλημα δεν μπορεί να αποτελείται μόνο από κόμβους των δύο προηγούμενων περιπτώσεων, θα ήταν πιο λογικό το κ να μην ήταν μια σταθερά , αλλά μια συνάρτηση η οποία χαρτογραφεί σε ένα δεδομένο κόμβο ένα νούμερο

- Προφανώς το κ δεν μπορεί να είναι 0 αφού αυτό θα είχε σαν αποτέλεσμα τον τερματισμό οποιασδήποτε 2/3/4-opt αναζήτησης, ούτε όμως το κ όσο το μέγεθος προβλήματος δεν είναι ελκυστικό αφού αυτό προκαλεί υπερβολικά πολλές δυνατότητες.

Ενώ δημιουργείται η λίστα γειτόνων, υπολογίζεται η απόλυτη διαφορά (M) μεταξύ του βάρους μιας ακμής και του βάρους της προηγούμενης. Η βασική ιδέα είναι η δημιουργία της μεγαλύτερης ομάδας από κόμβους με την έννοια ότι θυμίζουν **συστάδα**. Δηλαδή έχουν μεταξύ τους το M μικρό. Μια συστάδα όμως θα μπορούσε να προσδιοριστεί και αντίστροφα. Το πλήθος των κόμβων μιας συστάδας δεν μπορεί να είναι πολύ μικρό για το λόγο ότι οι συστάδες απομονώνονται και η ποιότητα της περιοδείας μειώνεται, αλλά όταν οι ομάδες συστάδων είναι μεγάλες, οι λίστες γειτνίασης που δημιουργούνται είναι επίσης μεγάλες, διευρύνοντας έτσι την αναζήτηση και ορισμένες φορές έχει σαν αποτέλεσμα καλύτερη διδρομή .

Γενικότερα αυτή η βελτίωση σχεδόν πάντα εγγυάται μειωμένο χρόνο εκτέλεσης, εκτός από πολύ μικρά προβλήματα και εξαρτάται κυρίως από τη δομή του στιγμιότυπου. Όταν το στιγμιότυπο έχει πολύ μικρές συστάδες η ποιότητα της διαδρομής μειώνεται πιο πολύ.

6.5.5 Μέθοδος ”don’t look bits”

Μία μέθοδος που χρησιμοποιείται για τον περιορισμό της αναζήτησης είναι η μέθοδος “don’t – look bits”. Η ιδέα πίσω από αυτή τη μέθοδο είναι ότι εάν για ένα δεδομένο κόμβο t_1 δεν μπορεί να βρεθεί καμία έγκυρη 3 ή 4-opt κίνηση τότε δυστυχώς δεν πρόκειται να βρεθεί στις επόμενες κινήσεις καμμία κίνηση βελτίωσης εκτός εάν κάποια ακμή προσκείμενη στην t_i αλλάξει.

6.5.6 Chained Lin-Kernighan

Ο αλόριθμος Chained Lin Kernighan για να αποφύγει τη μη αποδοτικότητα της επαναλαμβανόμενης εκτέλεσης του αλγορίθμου για καινούριες διαδρομές προκειμένου να πάρει δείγματα από τις τοπικά βέλτιστες λύσεις, διαταράσσει ελαφρώς της διαδρομή (κάνει ένα kick στη L-K διαδρομή) και επαναλαμβάνει τον αλγόριθμο.

Αν αυτή η διαταραχή παράγει καλύτερη διαδρομή, απομακρύνεται η παλιά L-K διαδρομή και ο αλγόριθμος συνεχίζει με την καινούργια διαδρομή .

Ο αλγόριθμος έχει τρία χαρακτηριστικά

- το πλάτος της αναζήτησης
- τη δομή της διαταραχής
- την επιλογή της αρχικής διαδρομής

Η αναζήτηση εξερευνά μέχρι 5 επιλογές στη σειρά για την πρώτη εναλλαγή για κάθε μια από αυτές τις εναλλαγές εξερευνά μέχρι 5 επιλογές, για κάθε εναλλαγή του προηγούμενου επιπέδου. Στα επόμενα επίπεδα της αναζήτησης ο αλγόριθμος επιτρέπει μια μόνο επιλογή

Για την επιλογή της διαταραχής δημιουργούνται τυχαίες double bridge αλλά χρησιμοποιούνται μόνο αυτές στις οποίες εμπλέκονται ζεύγη ακμών που σχετίζονται με χαμηλό συνολικό κόστος. Αυτή η διαδικασία καλείται cost-restricted kick. Επειδή από την τυχαία δημιουργία double bridge μόνο ένα μικρό μέρος θα γινόταν αποδεκτό, όταν γίνεται επιλογή της πρώτης ακμής προτείνονται για εφαρμογή συγκεκριμένες διαδικασίες κατασκευής των τοπικά kick , δεν υπάρχουν όμως δυνατά επιχειρήματα υπέρ αυτών των διαδικασιών κατασκευής.

Παρόλο που ο αλγόριθμος συμπεριφέρεται αρκετά καλά σε ένα μεγάλο φάσμα διαδρομών, η εκτέλεση μπορεί να επηρεαστεί από την δομή της αρχικής λύσης (περιοδείας), γιαυτό το λόγο υπάρχει μια σειρά από μεθόδους κατασκευής αρχικής διαδρομής

6.6 Το εξελικτικό παίγνιο του Προβλήματος του Πλανόδιου Πωλητή

Θεωρείται πως ο γράφος του ΠΠΠ που αναπαριστά τις n πόλεις είναι συμμετρικός και μη κατευθυνόμενος, ο οποιος ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα και έχει n κορυφές με κάθε κορυφή να έχει βαθμό τουλάχιστον 3.

Οι παραδοχές αυτές τίθενται προκειμένου να εξασφαλιστεί ότι υπάρχει τουλάχιστον μια διαδρομή ως λύση του προβλήματος.

6.6.1 Ανάλυση εξελικτικού παιγνίου ΠΠΠ

Στην ΕΘΠ πρωταγωνιστές είναι στρατηγικες/συμπεριφορές, οι οποίες εξελίσσονται στο χρόνο και όχι οι ορθολογικοί παίχτες. Συνεπώς στο εξελικτικό παίγνιο του ΠΠΠ δίνεται **έμφαση** στο σύνολο των στρατηγικών το οποίο αποτελείται από το **σύνολο των εναλλακτικών διαδρομών Κάθε στρατηγική (συμπεριφορά) είναι το σύνολο ακεραίων αριθμών 1 εως n που αντιπροσωπεύουν τη σειρά επίσκεψης των n πόλεων.**

Η συνάρτηση καταλληλότητας υπολογίζει την καταλληλότητα της κάθε συμπεριφοράς δηλαδή το κόστος της διαδρομής και ισούται με το άθροισμα των αποστάσεων των πόλεων με τη σειρά επίσκεψης που καθορίζει η διαδρομή. Όσο μεγαλύτερη καταλληλότητα έχει μια διαδρομή τόσο πιο μεγάλη διάδοση θα έχει στον πληθυσμό των συμπεριφορών, καθώς αυτές εξελίσσονται στο χρόνο.

Σύμφωνα επίσης με τις αρχές της ΕΘΠ **μια μετάλλαξη** είναι μια εναλλακτική συμπεριφορά, όπου στην προκειμένη περίπτωση είναι μια εναλλακτική διαδρομή, δηλαδή μια αλλαγή στην σειρά επίσκεψης των πόλεων. Ο τρόπος με τον οποίο θεωρείται ότι συμβαίνει η αλλαγή ακολουθεί την 3-opt. Συνεπώς το σύνολο των μεταλλάξεων είναι το σύνολο των εναλλακτικών διαδρομών.

Η διαισθητική παράσταση του παιγνίου αποτελείται από ένα γράφο του οποίου κορυφές είναι οι εναλλακτικές διαδρομές και οι οποιες αποτελούν τα μέλη του πληθυσμού. Κάθε κορυφή (διαδρομή) γειτνιάζει με αυτές που δημιουργούνται από αυτήν με εφαρμογή της 3-change με άλλα λόγια με μια μετάλλαξη

Σε κάθε αναμέτρηση επιλέγεται τυχαία μια διαδρομή, (δηλ μια κορυφή του γράφου) και συγκρίνεται η καταλληλότητά της με την καταλληλότητα ενός τυχαίου γείτονά της και επικρατεί αυτή με την μεγαλύτερη. Η διάδοση στον πληθυσμό της καλύτερης μέσω απογόνων συμβαίνει μέσω της μίμησης δηλαδή αυτή που έχει την μικρότερη καταλληλότητα αντιγράφει αυτήν με την μεγαλύτερη..

Τροποποίηση 1

Προκειμένου να μειωθούν οι επαναλήψεις, όταν αυτή που έχει επικρατήσει συμμετέχει σε μια νεα αναμέτρηση με μια μετάλλαξή της και επικρατήσει η δεύτερη τότε η προηγούμενη μετάλλαξή της πρώτης θα μιμηθεί την τελευταία όπως και αυτή που είχε επικρατήσει πάνω της. Διαισθητικά αυτό που θα συμβεί μετά από έναν αριθμό αναμετρήσεων είναι σαν να λαμβάνει χώρα κάθε φορά μια μόνο αναμέτρηση : αυτή της τυχαία επιλεγμένης διαδρομής με το σύνολο των γειτόνων της και να μιμείται τον καλύτερο από αυτούς, όχι μονο αυτή αλλά και οι υπόλοιποι γείτονές της. Σε αυτή την περίπτωση μειώνεται το σύνολο των αναμετρήσεων σε μεγάλο βαθμό και κατά συνέπεια το σύνολο των επαναλήψεων.Για να επιτυχθεί αυτο τοποθετούνται σε μία ”tabu list” βρίσκονται οι εναλλακτικές διαδρομές οι οποιες έχουν εμπλακει σε καποια αναμέτρηση.

Τροποποιηση 2

Η δημιουργία όλων των 3-change εναλλακτικών διαδρομών δημιουργεί αφενός μια στατική απεικόνιση του χώρου αναζήτησης της βέλτιστης διαδρομής αφετέρου δε η διαδικασία αναζήτησης ενδέχεται να εγκλωβιστεί σε ένα τοπικό βέλτιστο. Η μετάλλαξη δεν είναι πραγματική αλλά εννοιολογική για το λόγο ότι υπάρχει μέσα στα πλαίσια του αρχικού συνόλου των εναλλακτικών διαδρομών.

Η μετάλλαξη κατά τη διάρκεια εξέλιξης του παιγνίου στο χρονο θεωρείται πλέον μια 4-change διαδρομή (double-bridge) η οποία μπορεί να συμβεί σε μια από τις δύο διαδρομές 3-change που εμπλέκονται στην αναμέτρηση .

Αυτού του είδους η αναμέτρηση μπορεί να συμβεί κάλλιστα όταν θεωρηθεί ότι μια τυχαία εναλλακτική διαδρομή έρχεται σε σύγκρουση με μια double-bridge μετάλλαξή της, αλλά και όταν η εναλλακτική διαδρομή έρχεται σε σύγκρουση με ένα γείτονά της ο οποίος έχει μεταλλαχθεί.

Αν η μεταλλαγμένη διαδρομή επιβιώσει στην αναμέτρηση τότε διαφοροποιείται στην επόμενη γενεά το σύνολο των εναλλακτικών διαδρομών 3-change. Ετσι μειώνεται ο χρόνος επανάληψης.

Κατά αυτή την έννοια δεν υπάρχει έστω και διαισθητικά στατικός γράφος απεικόνισης με τις εναλλακτικές διαδρομές , αφού το σύνολο κάθε γενεάς διαφοροποιείται. Εκτός αυτού από μια μετάλλαξη ή ακόμα και από τη δημιουργία των εναλλακτικών διαδρομών στη νέα γενεά θα μπορούσε να προκύψει μια ήδη υπάρχουσα εναλλακτική διαδρομή για αυτό το λόγο δημιουργειται μια tabu list ώστε να εξαιρούνται από το σύνολο διαδρομές οι οποίες έχουν δημιουργηθεί αλλά και εξαλειφθεί σε προηγούμενες γενεές.

Εφόσον σε καθε γενεά δημηιουργείται νεο σύνολο εναλλακτικών διαδρομών, αυτο θα μπορούσε να προκύπτει όχι απο τις εναλλακτικες 3-change αλλά από το συνολο των 3-opt που προκυπτει από την τοπική αναζήτηση σε κάθε 3-change που παραγεται από την διαδρομη που επιβίωσε στην προηγούμενη γενεά. Συνεπώς κατά την αναμέτρηση εμπλέκονται δύο διαδρομές 3-opt.

Τροποποίηση 3

Διαφορετικά ειδωμένο στο εξελικτικό παιγνιο θα μπορούσε να ειπωθεί ότι υπάρχει ένα σύνολο από υποπληθυσμούς (οι οποιοι δημιουργουνται από εφαρμογη μιας απο τις διαμερίσεις)όπου ο κάθε ένας εξελίσσεται ξεχωριστά. Ο κάθε υποπληθυσμός εξελίσσεται και μέσω της μίμησης επικρατεί η διαδρομή με την υψηλότερη καταλληλότητα. Στη συνέχεια και αφού έχει επιβιώσει μια διαδρομή σε κάθε υποπληθυσμό οι αναμετρήσεις λαμβάνουν χώρα μεταξύ των διαδρομών του πληθυσμού που έχει προκύψει

Παρουσίαση Εξελικτικού Παιγνίου ΠΠΠ

Πληθυσμός : το σύνολο των εναλλακτικών διαδρομών 3-change (στρατηγικών) που εχουν προκύψει από μια αρχικη τυχαία διαδρομη . Κάθε στρατηγική (συμπεριφορά) είναι το σύνολο ακεραίων αριθμών 1 εως n που αντιπροσωπεύουν τη σειρά επίσκεψης των n πόλεων. **Συνάρτηση καταλληλότητας :** υπολογίζει την καταλληλότητα της κάθε συμπεριφοράς δηλαδή το κόστος της διαδρομής **Αναμέτρηση :**Σε κάθε αναμέτρηση επιλέγεται μια τυχαία διαδρομή, (δηλ μια κορυφή του γράφου) και συγκρίνεται η καταλληλότητά της με την καταλληλότητα ενός τυχαίου γείτονά της και επικρατεί αυτή με την μεγαλύτερη. Συγχρόνως αντιγράφεται και σε αυτές που ειχε κυριαρχήσει σε προηγούμενες αναμετρησεις. Με άλλα λόγια η διάδοση της καλύτερης διαδρομής στον πληθυσμό μέσω απογόνων συμβαίνει μέσω της μίμησης και της ενισχυμένης μαθησης δηλαδή αυτή που έχει την μικρότερη καταλληλότητα αντιγράφει αυτήν με την μεγαλύτερη. Η Εφαρμογή της μάθησης μέσω μίμησης και ενισχυμένης μάθησης εμπεριέχει επίσης την οπτικη του συνόλου υποπληθυσμών όπου εξελίσσονται μεμονομένα και στο τέλος οι αναμετρήσεις λαμβάνουν χώρα μεταξύ των υποπληθυσμών . **Μια μετάλλαξη** : 4-change διαδρομή (double-bridge) που μπορεί να εχει συμβεί σε μια από τις δύο διαδρομές 3-change που εμπλέκονται στην αναμέτρηση. Συγχρονως υπάρχει μια tabu list με τις μεταλλαξεις οι οποιες έχουν συμβεί ώστε να μην λαμβανοναι υπόψιν στις μελλοντικες αναμετρήσεις, καθώς και μία που περιέχει τις διαδρομές που έχουν εξαληφθεί σε προηγούμενες γενεές.

6.7 Ανοιχτά Θέματα

[Now90], [Nis]
Μεσω της παρουσας μελέτης και την προσεγγιση του προβληματος του Πλανόδιου Πωλητη αναδείχθηκαν ορισμενα ερωτήματα που χρήζουν περαιτέρω έρευνας.Ο προσδιορισμός μέσω πειραμάτων του πληθους των επαναλήψεων κρίνεται σκόπισμος ούτως ώστε να γίνει εφικτή η σχεδίαση

του εξελικτικού αλγορίθμου όπως και ο υπολογισμός του χρόνου εκτέλεσης ο οποιος και θα καθορισει την αποτελεσματικότητά του. Κατά πόσον ειναι προσιτή η όχι η συντομότερη διαδρομή ειναι ενα επιπλεον ερώτημα, καθώς υπάρχουν αναφορες τόσο για την απαίτηση εξαιρετικα μεγάλου πλήθους επαναληψεων όσο για πιθανότητα η Εξελικτικα Σταθερη Στρατηγικη να ειναι απρόσιτη. Η αναμετρηση μεταξύ 3-opt διαδρομών κρίνεται επίσης σκόπιμο να ερευνηθεί κατα πόσον σε τι συχνότητα επιφέρει τη βέλτιστη διαδρομή και αν έχει επιπτώσεις στον αλγοριθμο. Επίσης καλό είναι να ληφθεί υπόψιν το ειδος του πληθυσμού το οποιο θα υποστεί τις εξελικτικές πιέσεις και να πραγματοποιηθεί περαιτερω μελετη για το κατά πόσον κρίνεται σκόπιμος ο εξαρχης διαμερισμός του πληθυσμού σε σύνολο υποπληθυσμών για μεμομωμένη εξελιξη αυτων, και όχι η έμμεση υπάρξή τους μεσω της αναμετρησης.

Βιβλιογραφία

[ACR03] D. Applegate, D. Cook και A. Rohe. «Chained Lin Kernighan for large traveling Salesman problems». Στο: *INFORMS Journal on Computing* 15.1 (2003), σσ. 82–92.

[ACR92] D. Applegate, D. Cook και A. Rohe. «Large-Step Markov Chains for the TSP Incorporating Local Search Heuristics». Στο: *Operation Research Letters* 11 (1992), σσ. 219–224.

[Dam00] E. Damme. «Strategic equilibrium». Στο: (2000).

[EK10] D. Easley και J. Kleinberg. *Networks, Crowds, and Markets : Reasoning about a Highly Connected World*. 1η έκδοση. Cambridge, The MIT Press, 2010.

[Fie01] G. Fiestras-Janeiro. *Finite strategic games and solution concepts*. lecture 1897. University of Vigo, Spain, Μαρ. 2001.

[FL93] D. Fudenberg και D.K. Levine. «Steady State Learning and Nash Equilibrium». Στο: *Econometrica* 61.3 (Μάι. 1993), σσ. 547–573.

[GW05] S. Govindan και R Wilson. *Refinements of Nash Equilibrium*. research paper 1897. University of Stanford, Ιούλ. 2005.

[Hel00] K. Helsgaun. «An Effective Implementation of the Lin Kernighan traveling salesman heuristic». Στο: *European Journal of Operational Reserach* 126.1 (2000), σσ. 106–130.

[Hel07] K. Helsgaun. *An Effective Implementation of K-opt Moves for the Lin Kernighan TSP Heuristic*. Roskilde University, Denmark, 2007.

[HKM97] I. Hong, B. Kahng και BR Moon. «Improved Large Step Markov Chain Variants for the Symmetric TSP». Στο: *Journal of Heuristics* 3 (1997), σσ. 63–81.

[Jon08] J. Jones. *Evolutionary Game Theory*. Stanford University, Δεκ. 2008.

[Klo+09] T. Klos, J. Scharpff, A. Suson, JM. Vuong και R. Weiman. *Traveling Salesman Problem (TSP) IN4082 Local (Heuristic Search Methods)*. Delft University of Technology, Ιούν. 2009.

[KM86] Elon Kohlberg και Jean-Francois Mertens. «On the Strategic Stability of Equilibria». Στο: *Econometrica* 54.5 (Σεπτ. 1986), σσ. 1003–37. URL: http://ideas.repec.org/a/ecm/emetrp/v54y1986i5p1003-37.html.

[Lap92] G. Laporte. «The Traveling Salesman Problem: An overview of exact and approximate algorithms». Στο: *European journal of Operational Research* 59 (1992), σσ. 231–247.

[Nas50a] John Nash, επιμελητής. *Equilibrium Points in n-Person Games*. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. Τόμ. 54. 1950, σσ. 48–49.

[Nas50b] John. Nash. «Non Cooperative Games». Princeton University, 1950.

[Nis] N. Nisan. *Note on the Computational Hardness of Evolutionary Stable Strategies*. draft. URL: http://citeseerx.ist.psu.edu/10.1.1.77.9478.pdf.

[NM44] V. Neumann και Oscar Morgenstern. *Theory of games and economic behavior*. Oxford university Press, 1944.

[Now90] M. Nowak. «An Evolutionarily Stable Strategy May Be Inaccessible». Στο: *J. theor. Biol* 142 (1990), σσ. 237–241.

[NTV07] N. Nisan, T. Tardos και V. Vazirani. *Algorithmic Game Theory*. 1η έκδοση. Georgia Institute of Technology, 2007.

[OR94] M.J. Osborne και A. Rubinstein. *A Course in Game Theory*. 1η έκδοση. Cambridge, The MIT Press, 1994.

[Osb02] M.J. Osborne. *An Introduction to Game Theory*. 1η έκδοση. Oxford university Press, 2002.

[Pel] M. Pelillo. *Replicator Dynamics in combinatiorial Optimization*. Κεφ. 6.

[PS] C. Papadimitriou και K. Steiglitz. *Combinatorial Optimization - Algorithms and Complexity*. 1η έκδοση. Cover Publications.

[Ree] T. Rees. *An Introduction To Evolutionary Game Theory*. UBC, Department of Computer Science.

[Roo09] P. Roos. *Evolutionary Game Theory*. Univerites of Maryland, 2009.

[SA02] U. Sumaila και J. Apaloo. *A selected survey of traditional and evolutionary game theory*. 2002/07. Chr. Michelsen Institute, 2002.

[San09] M. San. *Evolutionary Game Theory (Stanford Encyclopedia of Philosophy)*. Stanford University, 2009. URL: http://plato.stanford.edu/entries/game-evolutionary/.

[Smi74] J.M. Smith. «The theory of Games and the Evolution of animal Conflicts». Στο: *J.theor.Biol* 246 (1974), σσ. 209–221.

[SN99] K. Sigmund και M. Nowak. «Evolutionary game theory». Στο: *Current Biology* 9 (1999).

[SP73] J.M. Smith και G.R. Price. «The logic of Animal Conflict». Στο: *Nature* 246 (Δεκ. 1973).

[Wei98] J. Weibull. *What have we learned from Evolutionary Game Theory so far*. Stockholm School of Economics και I.U.I., Μάι. 1998.

[Wiki12] *Evolutionary Game Theory. Wikipedia the free encyclopedia*. 2012. URL: http://www.wikipedia.org.

[Βαρ07] Γιάνης Βαρουφάκης. *Θεωρία παιγνίων: Η θεωρία που φιλοδοξεί να ενοποιήσει τις κοινωνικές επιστήμες*. 1η έκδοση. Gutenberg, 2007.

[ΚΣ02] Κ. Κοτταρίδη και Γ. Σιουρούνης. *Αφιέρωμα στον John Nash Θεωρία Παιγνίων*. 1η έκδοση. Ευρασία, 2002.

[ΛΜ12] Σ. Λυκοθανάσης και Σ. Μαυρουδή. *Θεωρία Αποφάσεων*. Πολυτεχνείο Πάτρας, Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, 2012. Κεφ. 6.

[ΛΜΣ07] Σ. Λυκοθανάσης, Σ. Μαυρούδη και Λ. Σκάρλας. *Εισαγωγή στις Ευρετικες Μεθόδους*. Πολυτεχνείο Πάτρας, Τμήμα Μηχανικων Η/Υ και Πληροφορικής, 2007.

[Λυκ01] Σ. Λυκοθανάσης. *Γενετικοί αλγόριθμοι και Εφαρμογές*. 1η έκδοση. Τόμ. Γ. ΕΑΠ, 2001.

[Λυκ12] Σ. Λυκοθανάσης. *Υπολογιστική Νοημοσυύνη II Γενετικοί Αλγοριθμοι-Εξελικτικός Προγραμματισμός*. Πολυτεχνείο Πάτρας, 2012.