ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΛΟΠΟΝΝΗΣΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Δημήτριος Σελίμης

Γεωμετρικά Επικαλύπτοντα γραφήματα

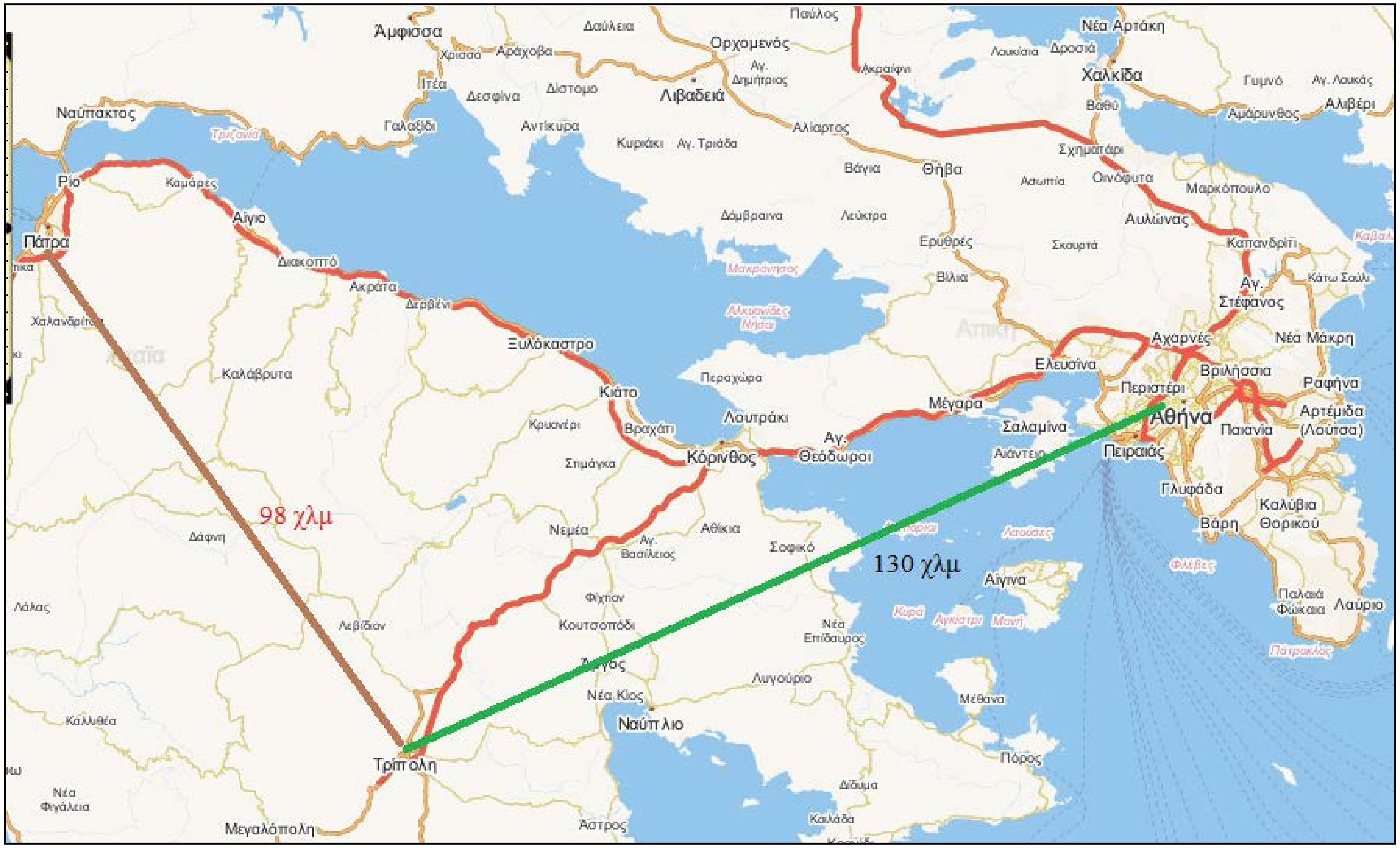
ΤΡΙΠΟΛΗ 2013

Επιβλέπον Καθηγητής: Δημήτριος Βλάχος

Περιεχόμενα

- Παράγοντας Επέκτασης
- Κατασκευή Επικαλύπτοντος γραφήματος
- Θ-γράφημα (Clarkson (1987) και Keil (1993))
- Αποσύνθεση Καλώς διαχωριζόμενων ζευγών (Arya (1995))
- Gap Greedy

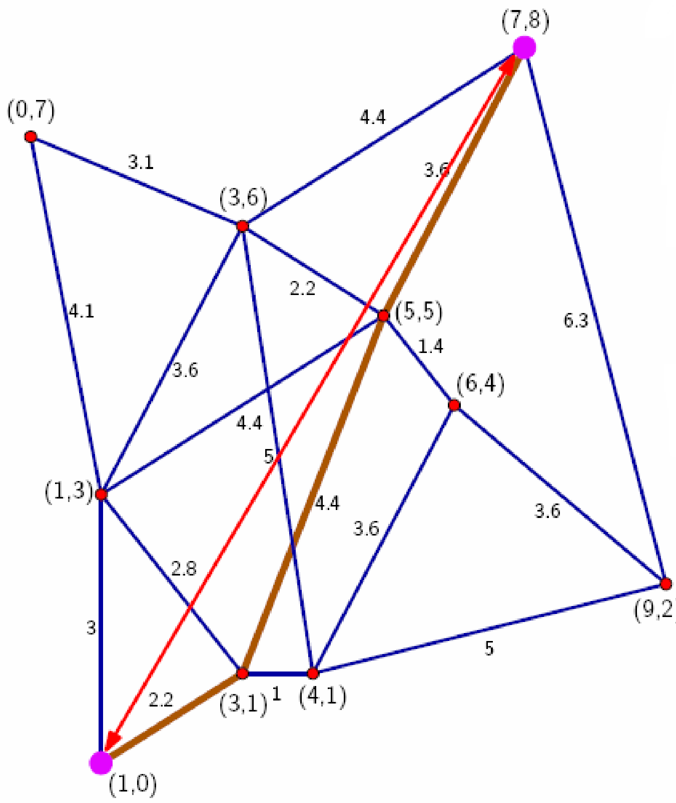
Παράγοντας Επέκτασης (Stretch factor)



Τρίπολη- Αθήνα: πραγματική απόσταση/ ευκλείδεια απόσταση = 160/130=1.23

Τρίπολη-Πάτρα: απόσταση με αυτοκίνητο/ ευθεία στο χάρτη = $\frac{202}{98} = 2.06$

Γεωμετρικό γράφημα-Παράγοντας Επέκτασης

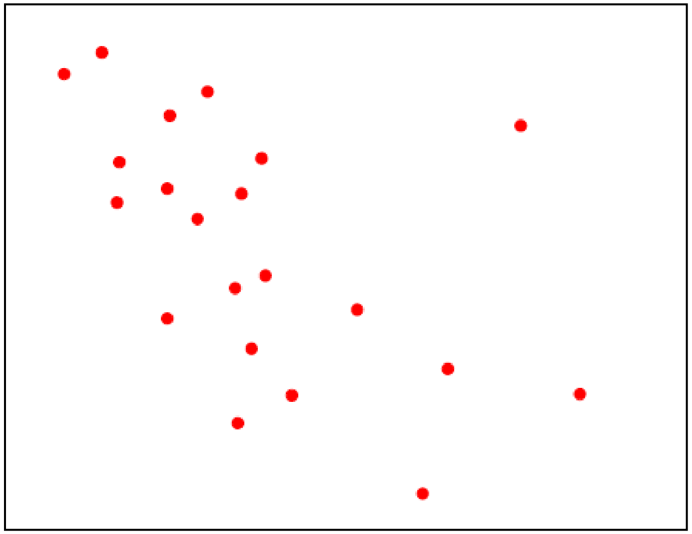


- μη κατευθυνόμενο γράφημα G (V,E) , V είναι κορυφές και E ζεύγη κορυφών.
- e= (u,v) є E, wt(e)=||uv|| , e=ακμή

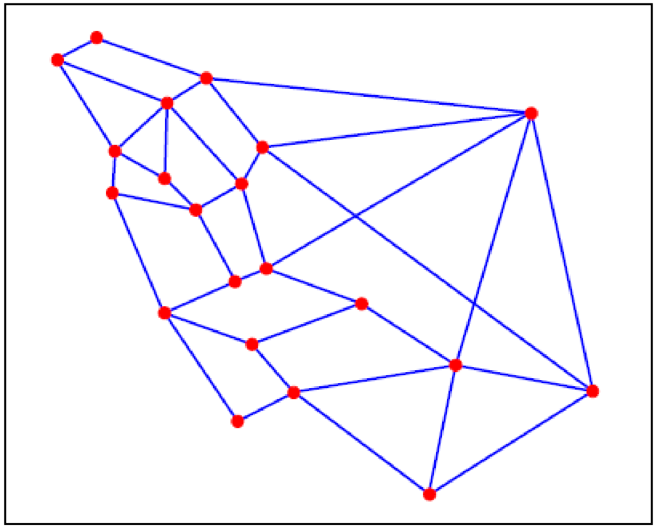
•*Παράγοντας επέκτασης*= απόσταση στο γράφημα / ευκλείδεια απόσταση

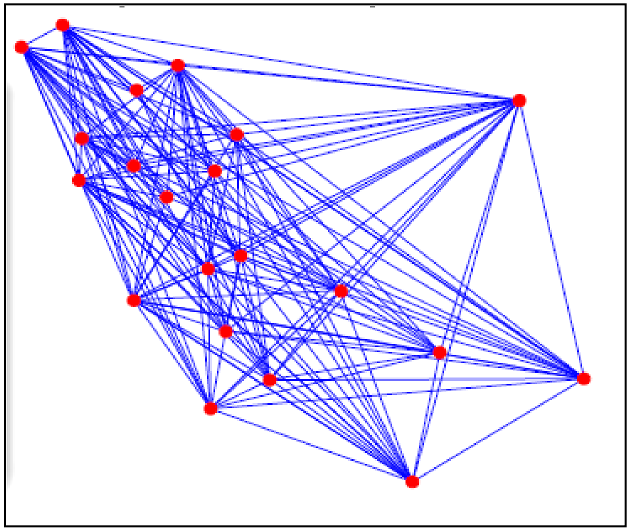
•*t- επικαλύπτον γράφημα:* το γράφημα με παράγοντας επέκτασης το πολύ t **ή** ∀ u,v є V, υπάρχει ένα μονοπάτι ανάμεσα στο u και στο v το μήκος του οποίου είναι ≤ t *||uv||, (t-μονοπάτι)

Κατασκευή Επικαλύπτοντος γραφήματος



Δοθέντος ενός συνόλου S και t>1





Κατασκευή t- Επικαλύπτοντος γραφήματος

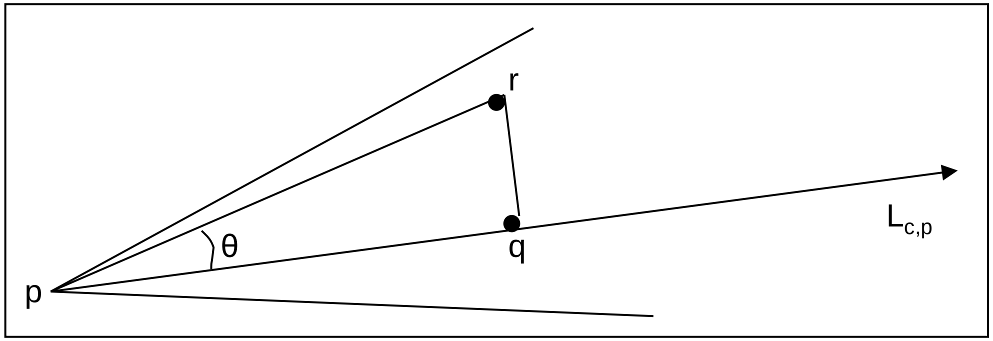
- Θ-γράφημα (Clarkson (1987) και Keil (1993))
- Αποσύνθεση Καλώς διαχωριζόμενων ζευγών (Arya (1995))
- Gap Greedy (Bern (1989) και Althoefer (1988)

Θ-γράφημα

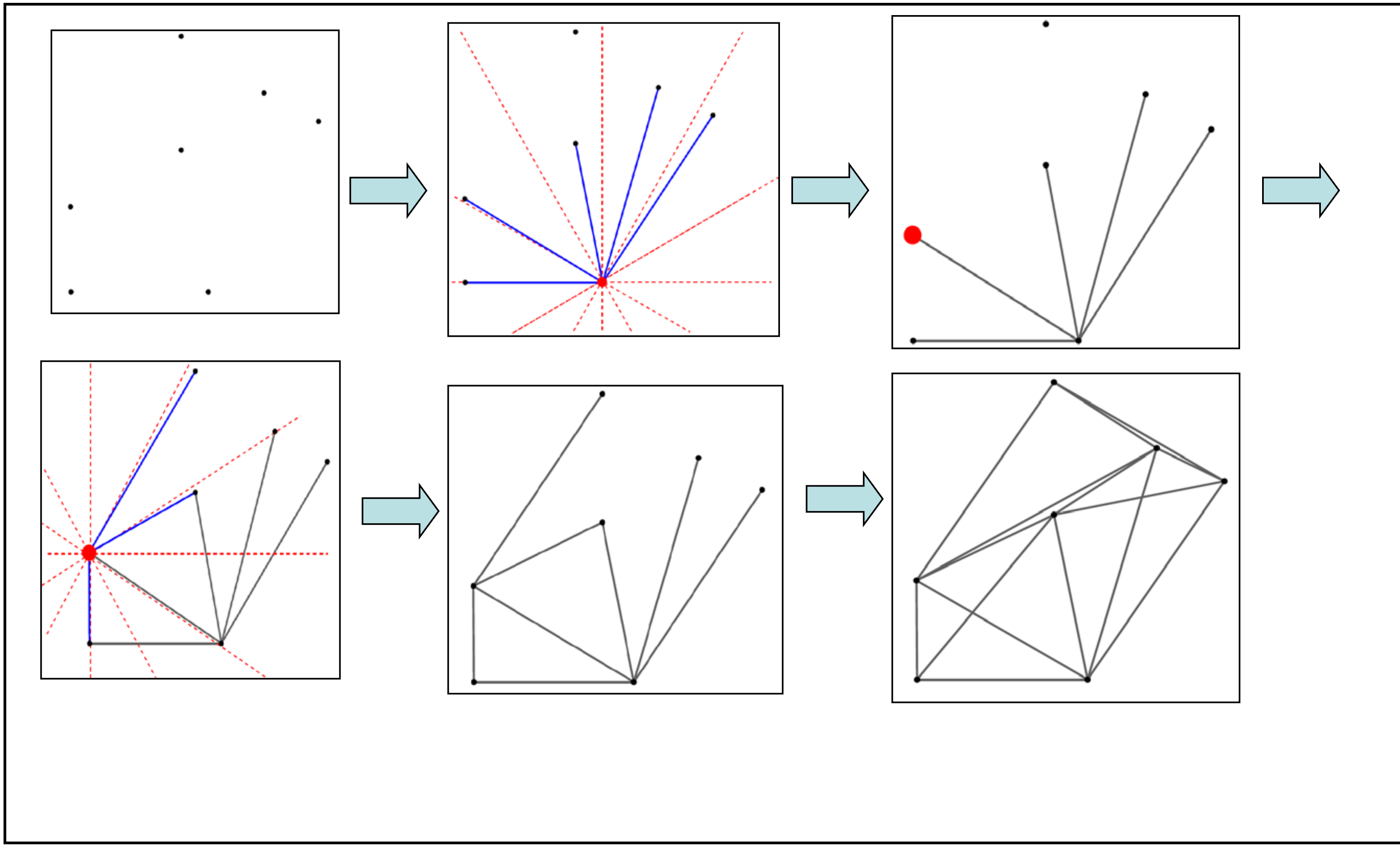
Έστω S ένα σύνολο σημείων στο επίπεδο. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα G με την ιδιότητα ότι για οποιαδήποτε δύο διαφορετικά σημεία p και q στο S, το G περιέχει μία ακμή (p, r) τέτοια ώστε:

- *το διάνυσμα* $\overrightarrow{pr}$ *είναι "στη γενική διεύθυνση" του q και*
- *ακολουθώντας την ακμή από το p στο r δεν μας πηγαίνει "πολύ μακριά" πέρα από το q*

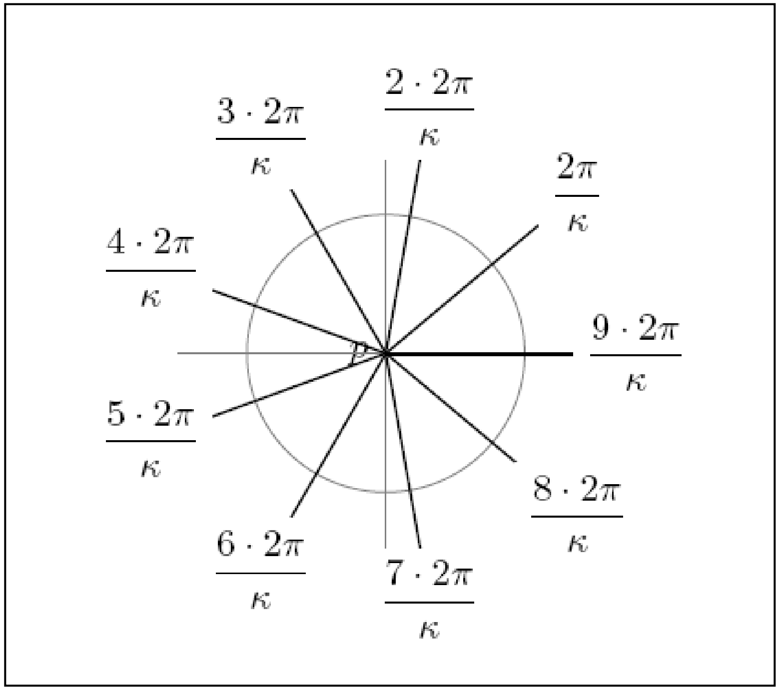
1. Οι κορυφές του Θ(S, κ) είναι τα σημεία του S.
2. Για κάθε σημείο p του S και για κάθε κώνο C του C_k το γράφημα Θ(S, κ) περιέχει μία ακμή (p, r), του οποίου η ορθή προβολή είναι πιο κοντά στο p.

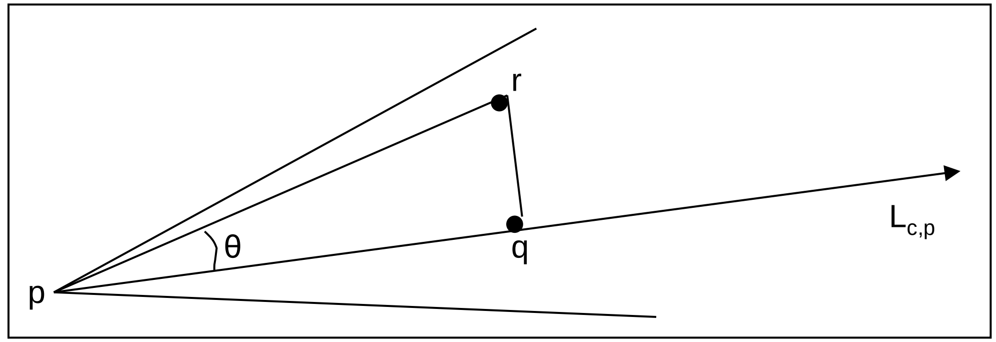


Θ-γράφημα



Θ-γράφημα





- $\|pr\| \leq \|pq\| / \cos\theta$
- $\|rp\| \leq \|pq\| - (\cos\theta - \sin\theta)\|pq\|$

Κύκλος χωρισμένος σε
κ=9 κώνους

Το Θ-γράφημα Θ(S,k) είναι επικαλύπτον γράφημα για *t=1/(cosθ-sinθ)*

Το Θ-μονοπάτι Αλγορίθμου

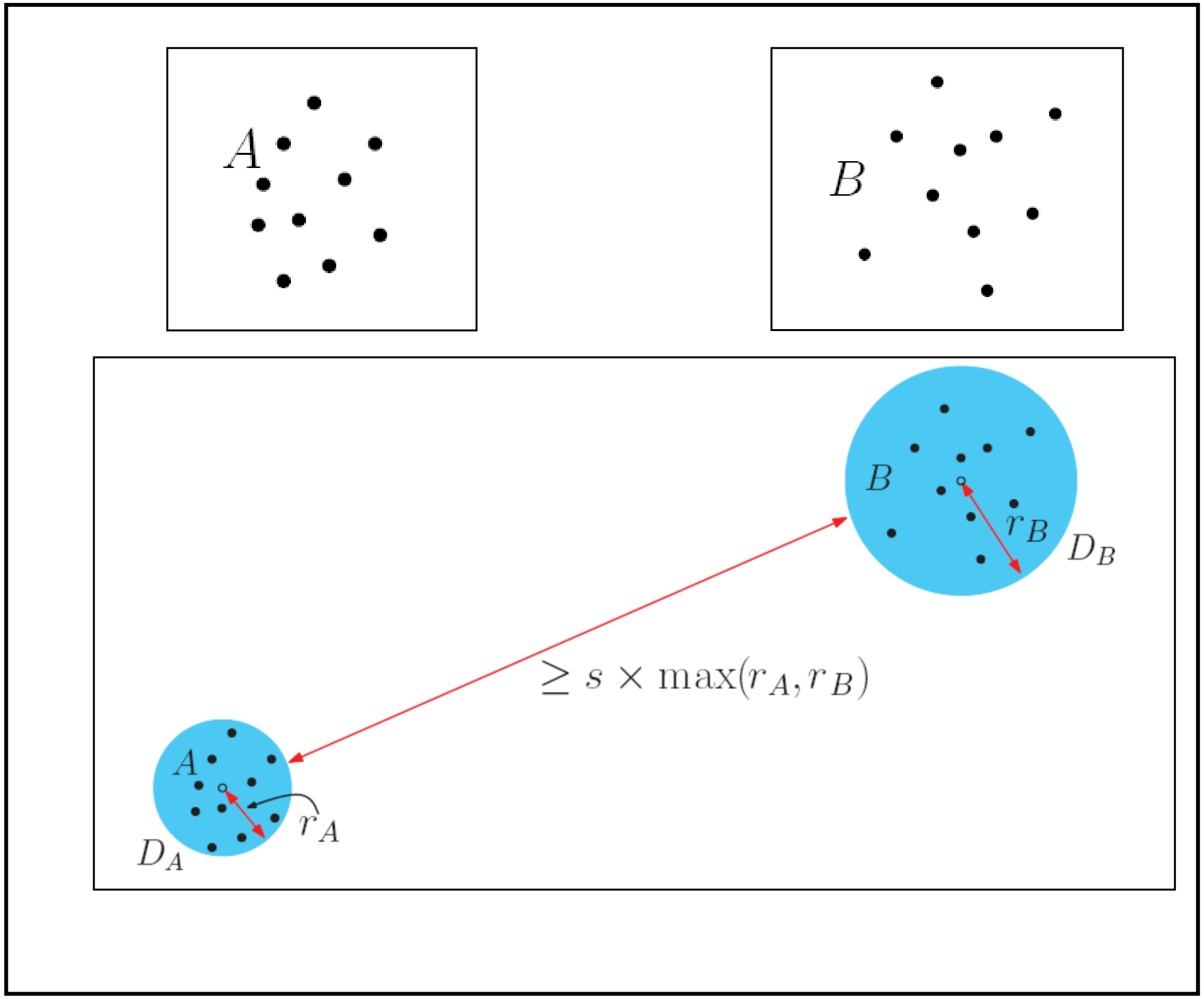
- **Αλγόριθμος 1:** *Αλγόριθμος Θ-μονοπατιού (p,q)*
- Ο παρακάτω Αλγόριθμος λαμβάνει ως δεδομένα δύο σημεία p και q στο S και
- επιστρέφει ένα μονοπάτι Θ(S, k) ανάμεσα στο p και στο q.
- p_0=p
- i=0
- **while** pi≠ q **do**
- p=p_0, p_1,..., p_i είναι ένα μονοπάτι στο Θ(S, k)
- C είναι κώνος του C_k όπου το q є C $_{pi}$
- pi+1 είναι σημείο του C $_{pi}$ ∩ S όπου(p_i, p $_{i+1}$) είναι μια ακμή του Θ(S, k)
- i=i+1
- **end while**
- **return** το μονοπάτι p_0, p_1, …, p_i

Χρόνος: O(nlogn) **Χώρος:** O(n)

Καλώς διαχωριζόμενα ζεύγη

- Τα A, B c R^d είναι καλώς διαχωριζόμενα (s>0, s є R) αν υπάρχουν σύνολα-μπάλες D_A και D_B :

1. A c D_A και το B c D_B
2. d (D_A , D_B) ≥ s*max (r_A , r_B)



Αποσύνθεση καλώς διαχωριζόμενων ζευγών (WSPD)

Έστω S c R ^{d} και s>0. Η *αποσύνθεση των καλώς διαχωριζόμενων ζευγών* για το S σε σχέση με την αναλογία διαχωρισμού s είναι μια σειρά **$\{A_1, B_1\}, \{A_2, B_2\}, \ldots, \{A_m, B_m\}$** ζευγών μην κενών υποσυνόλων του S για μερικά m τέτοια ώστε:

❖ για κάθε i με 1 ≤ i ≤ m, τα A_i και B_i είναι καλώς διαχωριζόμενα σε σχέση με το s,

❖ για οποιαδήποτε δύο διακριτά σημεία p και q του S, υπάρχει ακριβώς ένας δείκτης i με 1 ≤ i ≤ m, τέτοιος ώστε:

- p є A_i και q є B_i,
- p є B_i και q єA_i

Ο ακέραιος m καλείται ***μέγεθος*** της αποσύνθεσης των καλώς διαχωριζόμενων ζευγών

Επικαλύπτοντα γραφήματα βασιζόμενα στην αποσύνθεση των καλώς διαχωριζόμενων ζευγών

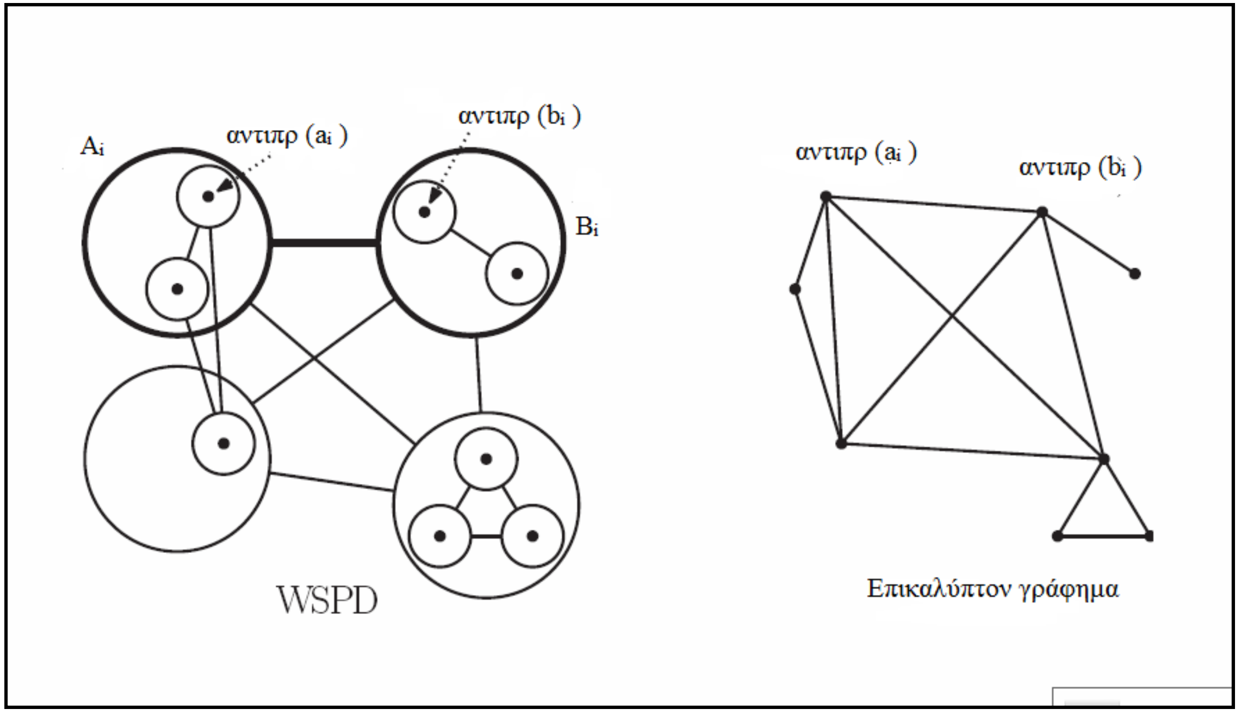
Έστω S να είναι ένας σύνολο σημείων στον R^d χώρο , t>1 να είναι ένας πραγματικός αριθμός και s = 4(t+1)/(t − 1).

Δεδομένης μια αυθαίρετης αποσύνθεσης καλώς διαχωριζόμενων ζευγών για το S σε σχέση με το s μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα **επικαλύπτον γράφημα** για το S που αποτελείται από *m* ακμές όπου *m* το μέγεθος της αποσύνθεσης των καλώς διαχωριζόμενων ζευγών

Επικαλύπτοντα γραφήματα βασιζόμενα στην αποσύνθεση των καλώς διαχωριζόμενων ζευγών

• Το μονοπάτι μήκους L ανάμεσα στο pq ισούται με:

$$L \leq \left(\left(\frac{4(t+1)}{s} \right) + 1 \right) \|pq\|$$



Ο Αλγόριθμος της αποσύνθεσης των καλώς διαχωριζόμενων ζευγών για επικαλύπτον γράφημα

Ο παρακάτω Αλγόριθμος λαμβάνει ως δεδομένα ένα σύνολο S και t > 1και επιστρέφει το επικαλύπτον γράφημα G(S, E).

1. Για αρχή W= W.S.P.D σε σχέση με το s = 4(t+1)/(t − 1)

2. Αρχικά E = 0 (κενό σύνολο)

3. for each (A_i , B_i) є W

επέλεξε τυχαίους αντιπροσώπους $α_i$ є A_i και b_i є B_i

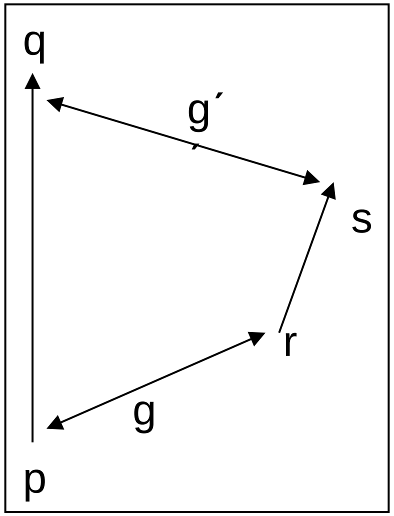
πρόσθεσε την ακμή ($α_i$, b_i) στο E

4. **return** G (S, E)

Χρόνος: O(n log n). **Χώρος:** O(n).

Ο Αλγόριθμος Gap-Greedy

Ο αλγόριθμος ξεκινά με ένα κενό σύνολο E ακμών και θεωρεί ότι όλα διατεταγμένα ζεύγη διαφορετικά σημεία σε αύξουσα σειρά τους όσον αφορά τις αποστάσεις. Έστω ότι p και q σχηματίζουν ένα ζεύγος σημείων. Ο αλγόριθμος προσθέτει την ακμή (p, q) στο E, αν δεν παραβιάζεται η ισχυρή ιδιότητα του κενού. Δηλαδή, η απόφαση αν θα προστεθεί η ακμή (p, q) στο E βασίζεται στο *Λήμμα:* Ακμή (p, q) προστίθεται αν και μόνο αν υπάρχει ακμή (r, s) στο τρέχον σύνολο E τέτοια ώστε:



- (p,q) και (r,s) έχουν περίπου την ίδια κατεύθυνση και
- τουλάχιστον μία από τις αποστάσεις και να είναι μικρή.

Επικαλύπτον γράφημα μέσω του αλγορίθμου Gap Greedy.

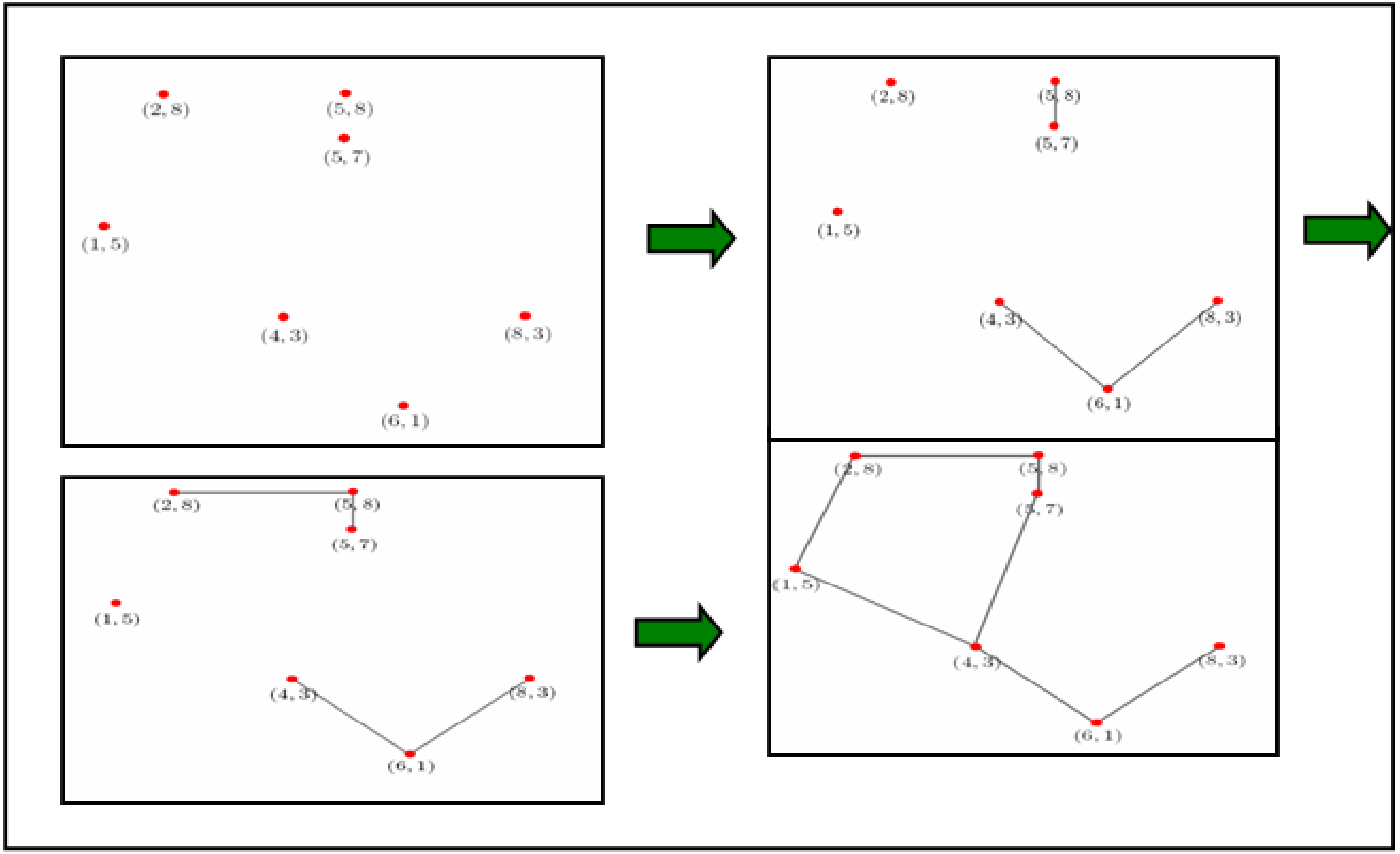
Μια απλή εφαρμογή:

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να ταξιδέψουμε από την κορυφή p προς την κορυφή q. Επιπλέον, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μια κατευθυνόμενη ακμή (r, s), τέτοια ώστε:

- η (r,s) να είναι σχεδόν παράλληλη στην (p, q),
- το $\|rs\|$ να μην είναι πολύ μεγαλύτερο από το $\|pq\|$, και
- το r είναι κοντά στο p .

Τότε έχουμε μια σύντομη διαδρομή μεταξύ του p και του q, πηγαίνοντας καταρχάς από το p προς το r, ύστερα ακολουθώντας την ακμή (r, s), και τέλος πηγαίνοντας από το s στο q.

Επικαλύπτον γράφημα μέσω του αλγορίθμου Gap Greedy.



Ο Αλγόριθμος Gap-Greedy

Σχόλιο: παίρνει ως είσοδο ένα σύνολο S από n σημεία στο επίπεδο, και δύο αριθμούς θ και w τέτοιοι ώστε $0 < \theta < \pi / 4$ και $0 \leq w < (\cos\theta - \sin\theta) / 2$.Επιστρέφει ένα t-επικαλύπτον γράφημα G = (S, E), για $t = 1 / (\cos\theta - \sin\theta - 2w)$.

ταξινόμηση των διατεταγμένων ζευγών σε διακριτά σημεία σε μη-φθίνουσα σειρά σε σχέση με τις αποστάσεις τους και αποθήκευση σε μία λίστα L:

E:=0; (κενό σύνολο για αρχή)

for each διατεταγμένο ζεύγος (p,q) є L {Θεωρούμε ότι τα ζεύγη είναι ταξινομημένα}

do add=true;

for each ακμή (r,s) є E

do if η γωνία ≤ θ

then add := add **end if**

end for;

if add = true **then** E := E ∪ {(p, q)} **endif**

enf for;

επέστρεψε το γράφημα G=(S,E)

Χρόνος: O (n^3logn).

Χώρος: O (n^2)

Ευχαριστώ για την προσοχή σας!!